

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Educativa



Tesis de Maestría
“Serie Geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo de software
Geogebra en estudiantes universitarios”

Tesista
Franklin Alberto Mejía Ochoa

Asesor de Tesis
Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa M.D.C., diciembre, 2019

“Serie Geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo software de
Geogebra en estudiantes universitarios”

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Educativa



“Serie Geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo de software
Geogebra en estudiantes universitarios”

Tesis para obtener el título de
Máster en Matemática Educativa

Tesista
Franklin Alberto Mejia Ochoa

Asesor de Tesis
Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C., diciembre, 2019

AUTORIDADES

Ph.D. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA**
Rector

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO**
Vicerrectora Académica

M.Sc. **NAHUM ALFREDO VALLADARES CARRANZA**
Vicerrector Administrativo

Dra. **ROSARIO BUEZO VELÁSQUEZ**
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA**
Vicerrector del CUED

M.Sc. **BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA**
Secretario General

Ph.D. **ESTELA ROSINDA ÁLVAREZ MARTÍNEZ**
Directora de Postgrado

Tegucigalpa M.D.C., diciembre, 2019

Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán como requisito para optar al grado académico de Máster en Matemática Educativa

Tegucigalpa M.D.C., diciembre, 2019

Grado académico, nombres y apellidos completos
Presidente(a) Examinador(a)/Tribunal

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

Nombres y apellidos completos
Tesisista

Dedicatoria

Dedico este trabajo:

Dios, mi Padre Celestial, por ser el que me guía cada día y bendice en los buenos y malos momentos, a Él la Honra y la Gloria por Siempre.

A mis queridos padres Allax Alberto Mejia Bú y Alba Luz Ochoa Ortega por brindarme su apoyo incondicional y ser un ejemplo de dedicación y superación, quienes en todo momento han sido pilares en mi vida y fuente de inspiración. Gracias por sus consejos, palabras, alientos y llamados de atención.

A mis hermanas Dania Alejandra Mejia Ochoa y Mayrin Yackzell Mejia Ochoa, gracias por estar allí con su apoyo, animándome siempre.

A mis abuelos, a mis tíos y tías, primos y primas, familia y amigos.

Agradecimiento

Mi agradecimiento a Dios por darme la fuerza necesaria para seguir adelante y la oportunidad de vivir esta experiencia valiosa de formación académica, que sin lugar a dudas implica un cierre, pero a la vez abre muchas oportunidades en mi vida profesional.

A mis padres por estar siempre conmigo apoyándome en todo momento. Gracias a mi madre Alba Luz Ochoa Ortega por sus oraciones y palabras de apoyo cuando más lo necesitaba, por no dejar que me rindiera, por su amor incondicional, por su confianza y por toda su ayuda.

Gracias a mi padre Allax Alberto Mejia Bú por ser un ejemplo en mi vida, quien estuvo apoyándome en todo este tiempo transcurrido deseando y anhelando lo mejor para mi vida, gracias por sus lecciones y sus llamados de atención. Infinitas gracias a ambos por su amor y su apoyo.

Gracias Dania Mejia y Mayrin Mejia, por su apoyo y por ser hermanas y amigas en todo momento.

Al doctor Marvin Roberto Mendoza Valencia, para él mi especial agradecimiento, admiración y respeto, ya que con su amistad, apoyo, dirección y tiempo en el proceso de esta investigación se hizo realidad este sueño. Gracias por todo.

A mi abuela María Lidia Ortega por sus oraciones, a mis tías y tíos, primos, primas que siempre estuvieron a mi lado, preocupados por mí y alentándome hasta el final. Se logró esta meta y quiero compartirlo con todos ustedes con la mayor felicidad.

A los doctores Carlos Cabezas Manríquez y Wilson Gordillo por todo su apoyo y orientaciones y por compartir sus conocimientos, los que han hecho posible realizar con éxito este trabajo de investigación.

Un agradecimiento a mi amigo el ponente Carlos Alberto Cabrera quien con su amistad incondicional hizo más ligero este camino y me brindó todos sus ánimos para seguir adelante en cada módulo de la maestría. Gracias por sus consejos y aportes constructivos, siempre los tuve presente en todo momento.

A Esly Marisela Rodezno, una persona importante en mi vida, muchas gracias por todo el apoyo brindado en cada momento que lo requerí. Gracias por tu compañía, comprensión y ayuda incondicional.

Mi agradecimiento a los coordinadores y profesores del postgrado, y a los compañeros de la XIII generación de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

A todas las demás personas y amigos que estuvieron conmigo en todo momento y me dieron su apoyo incondicional.

Tabla de contenido

Introducción	19
1 Construcción del objeto de estudio	23
1.1 Planteamiento del problema.....	23
1.2 Problema de investigación	32
1.3 Objetivos	33
1.3.1 Objetivo general	33
1.3.2 Objetivos específicos	33
1.4 Preguntas de investigación.....	34
1.5 Justificación	35
2 Marco teórico	43
2.1 Contexto histórico de las series	44
2.1.1 Babilonia.....	44
2.1.2 El Antiguo Egipto.....	45
2.1.3 La antigua India (900 a.C – 200 d.C)	46
2.1.4 La antigua Grecia (hasta el 300 d.C)	47
2.1.5 La Edad Media.....	48
2.1.6 Las matemáticas en el Renacimiento.....	49
2.1.7 Edad Contemporánea.....	50
2.2 Historia de las Progresiones geométricas	52
2.3 Conceptos de Progresión geométrica y sus interpretaciones	54
2.4 Pensamiento matemático variacional.....	55
2.4.1 Elementos del pensamiento y lenguaje variacional.....	57
2.4.2 Pensamiento variacional como razonamiento covariacional y sus acciones mentales.....	61
2.4.3 Desarrollo del pensamiento Variacional.....	62
2.4.4 Niveles del desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional....	65

2.5	Visualización	66
2.6	Registros de representación	68
2.6.1	Transformaciones tipo tratamiento y conversión	70
2.6.2	Registros de representación del objeto matemático serie geométrica	72
2.7	El uso de la tecnología en matemáticas	75
2.8	Software dinámico: Geogebra	77
2.8.1	Geogebra como herramienta para desarrollar pensamiento matemático variacional.....	81
2.9	Enfoque Ontosemiótico como una herramienta de análisis didáctico en matemática.....	83
2.10	Articulación de los distintos elementos teóricos para la construcción de la serie geométrica.	87
3	Metodología de la investigación	89
3.1	Enfoque de la investigación	89
3.2	Tipo de investigación	89
3.3	Diseño de la investigación.....	90
3.4	Categoría de análisis.....	92
3.5	Fuentes de información	98
3.6	Estrategia de recolección de datos	99
3.7	Diagnóstico y sesiones de trabajo	104
3.7.1	Prueba diagnóstica.....	104
3.7.2	Sesión de trabajo # 1.....	106
3.7.3	Sesión de trabajo # 2.....	114
3.7.4	Sesión de trabajo # 3.....	121
3.7.5	Sesión de trabajo # 4.....	128
3.7.6	Sesión de trabajo # 5.....	134
3.7.7	Sesión de trabajo # 6.....	141
3.7.8	Prueba Final.....	145
4	Análisis de Resultados	151

4.1	Prueba diagnóstica	151
4.1.1	Ítem # 1	152
4.1.2	Ítem #2	155
4.1.3	Ítem # 3	157
4.1.4	Ítem # 4	159
4.2	Sesiones de Trabajo	162
4.2.1	Sesión de trabajo # 1	165
4.2.3	Sesión de trabajo # 2	179
4.2.4	Sesión de trabajo # 3	192
4.2.5	Sesión de trabajo # 4	208
4.2.6	Sesión de trabajo # 5	225
4.2.7	Sesión de trabajo # 6	240
4.3	Prueba final	254
4.4	Rúbricas de evaluación	284
5	Conclusiones y recomendaciones.....	323
5.1	Conclusiones	323
5.2	Recomendaciones	336
6	Referencias	338
7	Anexos.....	349
	Anexo #1. Cartas de Validación.....	335
	Anexo #2. Prueba Diagnóstica.....	341
	Anexo #3. Sesiones de trabajo.....	343
	Anexo #4. Prueba Final.....	385
	Anexo #5. Fotos de las sesiones de trabajo.....	388

Índice de Figuras

Figura 1 Papiro egipcio de Rhind	46
Figura 2 Modelo de interacción de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional	58
Figura 3 Acciones mentales para determinar la covariación	62
Figura 4 Propuesta para el desarrollo del pensamiento variacional	64
Figura 5 Niveles del desempeño de los estudiantes en relación al desarrollo	66
Figura 6 Ejemplo de transformación tipo tratamiento y tipo conversión	71
Figura 7 Ejemplo relación entre las representaciones internas, y representaciones	75
Figura 8 Captura de pantalla del sitio Web Geogebra.....	79
Figura 9 Interfaz gráfica de la herramienta Geogebra classic 5	80
Figura 10 Ejemplo de construcción y protocolo de construcción de un posible trazo	80
Figura 11 Configuración de objetos primarios	85
Figura 12 Articulación entre diferentes elementos teóricos que intervienen	88
Figura 13:Diseño Fenomenológico desde una perspectiva operativa	92
Figura 14- 1 Cuadrados inscritos.....	166
Figura 14- 2 Afirmaciones mediante registro de lenguaje natural de grupo uno en el nivel dos.....	168
Figura 14- 3 Cálculo del valor de la hipotenusa obtenida por grupo uno en el nivel dos ..	168
Figura 14- 4 Afirmaciones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo cuatro	170
Figura 14- 5 Magnitudes de cuadrados obtenidos por grupo cuatro en el nivel cuatro.....	171
Figura 14- 6 Descomposición del cuadrado en triángulos y articulación entre registros geométrico y aritmético presentada por grupo uno en el nivel cuatro.....	172
Figura 14- 7 Círculos concéntricos.....	179
Figura 14- 8 Magnitudes obtenidas de las circunferencias y afirmaciones mediante registro verbal presentada por grupo uno en el nivel dos	182
Figura 14- 9 Afirmaciones mediante registro de lenguaje natural de grupo cuatro en el nivel dos.....	182

Figura 14- 10 Secuencia de las longitudes de las circunferencias presentadas por el grupo uno en el nivel cuatro.....	183
Figura 14- 11 Secuencia, patrón y conclusiones de las áreas de las circunferencias calculadas por el grupo uno en el nivel cuatro	184
Figura 14- 12 Patrones y conclusiones de las longitudes de las circunferencias observadas por el grupo dos en el nivel cuatro	185
Figura 4- 13 Secuencia de las áreas y perímetros de las circunferencias calculadas por el grupo cuatro en el nivel cuatro	185
Figura 14- 14 Semicírculos	193
Figura 14- 15 Conclusiones sobre áreas de semicircunferencias en diferentes registros del grupo uno referentes al nivel uno	195
Figura 14- 16 Articulaciones y conclusiones entre registros verbal y aritmético presentada por grupo uno referentes al nivel dos	196
Figura 14- 17 Conclusiones mediante registro verbal y aritmético de la suma de las áreas de las cuatro semicircunferencias obtenidas por el grupo uno referente al nivel dos.	197
Figura 14- 18 Secuencia de las longitudes de las semicircunferencias calculadas por el grupo uno referentes al nivel tres	198
Figura 14- 19 Conclusiones de áreas y perímetros de las semicircunferencias en el cálculo de áreas y perímetros por el grupo cuatro referentes al nivel tres	198
Figura 14- 20 Secuencias de las áreas de las semicircunferencias calculadas por el grupo uno referentes al nivel tres.....	199
Figura 14- 21 Resumen de magnitudes, semicircunferencias y sus diámetros presentados por el grupo uno referentes al nivel tres	200
Figura 14- 22 Triángulos equiláteros inscritos	209
Figura 14- 23 Conclusiones en diferentes registros con respecto a las áreas de los triángulos por el grupo uno referente al nivel dos	211
Figura 14- 24 Conclusiones en registro figural y verbal con respecto al área del tercer triángulo por el grupo uno referente al nivel tres	213
Figura 14- 25 Magnitudes y cálculos aritméticos de las áreas de los triángulos inscritos realizados por grupo cuatro referentes al nivel tres	214
Figura 14- 26 Triángulos inscritos y sus respectivas longitudes de lados señalados por grupo uno referentes al nivel cuatro	215
Figura 14- 27 Conclusiones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo uno nivel cuatro	215

Figura 14- 28 Magnitudes de los triángulos obtenidos por el grupo uno referentes al nivel cuatro	216
Figura 14- 29 Afirmaciones mediante registro verbal y figural del grupo tres referentes al nivel cuatro	217
Figura 14- 30 Conclusiones en registro verbal sobre los triángulos inscritos por el grupo tres referente al nivel cuatro	217
Figura 14- 31 Magnitudes de los triángulos obtenidos por el grupo tres referentes al nivel cuatro	217
Figura 14- 32 Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro referentes al nivel cuatro	218
Figura 14- 33 Cálculos de las áreas basados en estrategias algebraicas por grupo cuatro nivel cuatro	218
Figura 14- 34 Hexágonos inscritos	225
Figura 14- 35 Cálculos aritméticos del área del hexágono original obtenida por el grupo cuatro referente al nivel dos.....	228
Figura 14- 36 Cálculo aritmético por semejanza de la longitud de lado de la segunda figura inscrita obtenida por el grupo uno referente al nivel dos	228
Figura 14- 37 Magnitudes y afirmaciones en registro aritmético y verbal del grupo cuatro referente al nivel dos.....	229
Figura 14- 38 Cálculos de las áreas de los primeros hexágonos inscritos en registro figural y aritmético obtenida por el grupo uno referente al nivel dos	229
Figura 14- 39 Descomposición del hexágono en triángulos y cálculo de la longitud de un lado de un triángulo por semejanza realizada por grupo uno referente al nivel tres	230
Figura 14- 40 Conclusiones del área del tercer hexágono en registro figural y aritmético obtenida por el grupo uno referente al nivel tres	231
Figura 14- 41 Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo cuatro referentes al nivel cuatro	232
Figura 14- 42 Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo uno referentes al nivel cuatro	232
Figura 14- 43 Longitud de los lados de algunos hexágonos inscritos dibujados y cálculo aritmético de áreas realizada por grupo cuatro referente al nivel cuatro	233
Figura 14- 44 Espiral	241
Figura 14- 45 Suma de las áreas de los cuadrados inscritos obtenida por el estudiante uno referente a la pregunta uno	258

Figura 14- 46 Suma de la serie geométrica obtenida por el estudiante cuatro referente a la pregunta uno	259
Figura 14- 47 Cálculos y conclusiones de la suma de la serie geométrica obtenida por el estudiante cinco referente a la pregunta uno	259
Figura 14- 48 Patrón de las áreas de los círculos concéntricos obtenido por el estudiante uno referente a la pregunta dos.....	260
Figura 14- 49 Patrón de las áreas de los círculos concéntricos obtenido por el estudiante cinco referente a la pregunta dos	261
Figura 14- 50 Suma de la serie geométrica obtenidas de las circunferencias concéntricas por el estudiante diez referente a la pregunta dos	262
Figura 14- 51 Suma de la serie geométrica de las semicircunferencias obtenidas por el estudiante dos referente a la pregunta tres.....	263
Figura 14- 52 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante siete referente a la pregunta cuatro	264
Figura 14- 53 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante once referente a la pregunta cuatro	265
Figura 14- 54 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante trece referente a la pregunta cuatro	265
Figura 14- 55 Argumentos descritos mediante registro verbal del estudiante dieciséis referente a la pregunta cinco.....	266
Figura 14- 56 Suma de la serie geométrica de los infinitos triángulos obtenidos por el estudiante uno referente a la pregunta siete.....	267
Figura 14- 57 Cálculo de la razón y de la suma de la serie geométrica de los infinitos triángulos inscritos obtenida por el estudiante once referente a la pregunta siete.....	268
Figura 14- 58 Suma de la serie geométrica de los hexágonos inscritos obtenido por el estudiante uno referente a la pregunta ocho	269
Figura 14- 59 Conclusiones mediante registro aritmético y verbal del estudiante quince referente a la pregunta ocho.....	270
Figura 14- 60 Cálculo del patrón y de la suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante uno referente a la pregunta nueve.....	271
Figura 14- 61 Cálculo del patrón y suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante diez referente a la pregunta nueve	272
Figura 14- 62 Suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante nueve referente a la pregunta nueve	273

Figura 14- 63 Suma de los perímetros de los triángulos, hexágonos y cuadrados por el estudiante cuatro referente a la pregunta diez	273
Figura 14- 64 Cálculo de las razones y suma de la serie geométrica de los infinitos triángulos, cuadrados y hexágonos inscritos obtenidos por el estudiante diez referente a la pregunta diez.....	274
Figura 14- 65 Cálculo de patrones de las sumas de áreas construidas por el estudiante siete referente a la pregunta once.....	275
Figura 14- 66 Cálculo de patrones de las sumas de los perímetros y áreas construidas por el estudiante once referente a la pregunta once	276

Índice de tabla

Tabla 3.7.1 Objetivo y descripción de los ítems de la prueba diagnóstica.....	105
Tabla 3.7.2 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 1	108
Tabla 3.7.3 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 2	115
Tabla 3.7.4 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 3	122
Tabla 3.7.5 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 4	128
Tabla 3.7.6 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 5	135
Tabla 3.7.7 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 6	142
Tabla 4.0 Producciones contenidas en las sesiones de trabajo.....	243
Tabla 4.1 Rúbrica de evaluación de la prueba diagnóstica.....	285
Tabla 4.2 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 1	287
Tabla 4.3 Resultados de la sesión de trabajo # 1	292
Tabla 4.4 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 2	294
Tabla 4.5 Resultados de la sesión de trabajo # 2	298
Tabla 4.6 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo #3	300
Tabla 4.7 Resultados de la sesión de trabajo # 3	305
Tabla 4.8 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 4	306
Tabla 4.9 Resultados de la sesión de trabajo # 4	311
Tabla 4.10 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 5	313
Tabla 4.11 Resultados de la sesión de trabajo # 5	318
Tabla 4.12 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 6	320
Tabla 4.13 Resultados de la sesión de trabajo # 6	322

Índice de Gráficas

Gráfica 1 Resultados del ítem 1 de la prueba diagnóstica aplicada.....	153
Gráfica 2 Resultados del ítem 2 de la prueba diagnóstica aplicada.....	156
Gráfica 3 Resultados del ítem 3 de la prueba diagnóstica aplicada.....	158
Gráfica 4 Resultados del ítem 4 de la prueba diagnóstica aplicada.....	160
Gráfica 5 Resultados de la sesión de trabajo # 1	293
Gráfica 6 Resultados de la sesión de trabajo # 2	300
Gráfica 7 Resultados de la sesión de trabajo # 3	306
Gráfica 8 Resultados de la sesión de trabajo # 4	313
Gráfica 9 Resultados de la sesión de trabajo # 5	320
Gráfica 10 Resultados de la sesión de trabajo # 6	322

Introducción

La Matemática Educativa se ocupa de buscar herramientas que permitan explicar cómo se construye, extrapola y evidencia el conocimiento matemático en los diferentes ámbitos en los que se presenta. En los últimos años, la investigación en Matemática Educativa ha tenido un amplio auge, el cual se ve reflejado en la diversidad de propuestas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Pero a pesar de estos aportes en educación, aún persisten problemas en cuanto al aprendizaje de contenidos básicos, en el cual los estudiantes muestran poca comprensión de los conceptos matemáticos abordados en el salón de clases.

En las matemáticas los problemas geométricos han generado mayor dificultad en los estudiantes, debido a lo complicado que se torna visualizar mentalmente figuras geométricas que les lleven a dar una respuesta correcta. Es así que en la geometría no solo el uso de fórmulas es lo importante, sino también visualizar y tener un razonamiento adecuado. Es común escuchar que la enseñanza de las matemáticas en educación primaria, secundaria y educación superior se hace de forma memorística o la realización de ejercicios tediosos que mecanizan al alumno.

Si bien es cierto, el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es engorroso y con el tiempo el hombre ha desarrollado muchas metodologías para alcanzar el éxito de dicho proceso. No obstante, con la llegada de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC, ICT en inglés), en particular las computadoras, se abre un nuevo campo de investigación en contextos y ambientes distintos de aprendizaje y metodologías de enseñanza aprovechando el enorme potencial de estos recursos, ya que la utilización de software y

materiales educativos computarizados está adquiriendo una importancia enorme en la mejora de los procesos pedagógicos que caracterizan la educación, y aún más la superior.

En este sentido la Educación Matemática ha abordado estos desafíos desde la comprensión de los esquemas mentales de los individuos, y de cómo este logra desarrollar competencias y habilidades de pensamiento matemático, y se evidencien al resolver problemas, y que el objetivo sea obtener logros significativos en el aprendizaje (Cabezas y Mendoza, 2016).

El presente estudio tiene relevancia, ya que atiende al pensamiento matemático desde una mirada variacional, la cual está ligada al cálculo en sus inicios y vinculada con la variación y el cambio que son aspectos medulares de gran importancia por la razón de ser aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales y cotidianos en diferentes situaciones. Estos fenómenos se explican en la génesis del análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal de Newton, Leibniz y de sus antecesores en los que el cambio se consideró un punto importante en aras de responder a diferentes necesidades de la época; así como de brindar solución a problemas `no rutinarios.

En este caso, el trabajo se vincula directamente al área de trabajo de la matemática, ya que se hizo una indagación de cómo se construyen series geométricas, que es un tema de la malla curricular de cálculo. Es así que es un gran desafío encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado en distintos espacios de enseñanza y aprendizaje a nivel de educación.

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación del programa de maestría de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán la cual es “Estudios Disciplinarios” en la que está esta línea de investigación tiene como objeto de estudio aquellos problemas y

situaciones relacionadas directamente con las ciencias puras, ciencias aplicadas, innovación y producción (UPNFM, 2017). Esta línea de investigación tiene como objetivo la potencialización de las capacidades, así como del personal especializado en campos específicos de las ciencias y la tecnología, buscando impulsar la investigación, desarrollo e innovación nacional, así como la prestación de servicios especializados y la generación de conocimientos aplicados. Haciendo uso de esta línea de investigación intento explicar el fenómeno de la variación al interior de un curso de cálculo universitario.

Para una mejor comprensión, este estudio se estructura en capítulos que se detallan a continuación. En el primero se hace el planteamiento del problema de investigación, incluyendo evidencia teórica. También se plantea el objetivo general, así como los objetivos específicos, preguntas de investigación y la justificación.

En el segundo capítulo se describen aspectos teórico-conceptuales relativos a la serie geométrica y la evolución histórica de este. También los elementos teórico-conceptuales del pensamiento variacional, así como de pensamiento matemático, de los registros de representación semiótica que incluye las tareas de tratamiento, conversión y la visualización en la actividad matemática de los estudiantes. Todo ello, como elementos que se articulan con el concepto de serie geométrica.

El tercer capítulo aborda el marco metodológico de la investigación como el enfoque, tipo, diseño, la población y la muestra, las técnicas de recolección de datos, las descripciones de la prueba diagnóstica, sesiones de trabajo, prueba final y los niveles en que se abordaron cada una de estas; además, se presenta las consideraciones teóricas del Enfoque Ontosemiótico

como una herramienta de análisis; las categorías de análisis, las fuentes de información, las estrategias de recolección de datos y el análisis de los mismos.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos, tanto de la prueba diagnóstica como de las sesiones de trabajo, y la prueba final, desarrolladas a lo largo de esta investigación. Estas fueron analizadas en función del marco teórico, las preguntas y objetivos de investigación que se expusieron en el apartado metodológico.

Al final del estudio se presentan las conclusiones, recomendaciones, bibliografía y los anexos.

1 Construcción del objeto de estudio

1.1 Planteamiento del problema

El Pensamiento Variacional constituye una línea de investigación en Educación Matemática que tiene su génesis en el análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal de Newton, Leibniz y de sus antecesores en los que el cambio se consideró un punto medular en aras de responder a diferentes necesidades entre las épocas del siglo XVI-XVII cuyos trabajos marcaron un hito en el desarrollo histórico del cálculo, donde se brindó solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas (Mendoza, 2013). Es así que la variación y el cambio han sido aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales y cotidianos en diferentes situaciones.

En este sentido, el pensamiento variacional se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos (Cabezas y Mendoza, 2016).

Es así que el pensamiento variacional es argumentado como una manera dinámica de pensar que produce mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2002).

Hoy en día las ciencias y las tecnologías han tenido un grado de influencia de gran magnitud en la conducta de las personas. No obstante, el sistema de educación actual no se ha escapado

de esa influencia. Lo nuevo de este milenio, exige un nivel de compromiso, y la educación responsable con el desarrollo personal y social, forma parte esencial de este cambio. En los últimos años nuestro país ha venido experimentando cambios realmente significativos en el Sistema Educativo Universitario en el área de las ciencias exactas (matemáticas), los cambios han sido trascendentales ya que se ha procurado incorporar nuevos conocimientos y técnicas de enseñanza que le permitan a los estudiantes pensar reflexiva y críticamente en toda circunstancias que se le presenten en la vida cotidiana.

Ante la situación planteada, el trabajo e implementación de un proceso en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, por muchos años se ha realizado de manera secular la enseñanza tradicional, donde el estudiante, muestra poco interés y falta de compromiso en su proceso de aprendizaje, así como la poca participación y responsabilidad en el desarrollo de las actividades propuestas por parte del docente (Alvarado, 2017). Específicamente, si se hace referencia a un curso de matemáticas se revelan muchos inconvenientes en el proceso, pues los estudiantes además de establecer dicha área como la más difícil y aburrida, se sienten desmotivados por las actividades de conocimientos matemáticos que deben adquirir, pero sin lograr que el estudiante comprenda de manera significativa los conceptos involucrados en dichas actividades.

Pero esta situación no sucede solamente en un curso, ni solamente en una universidad, sino en la gran mayoría de universidades de Honduras, de Centroamérica, de nuestro continente y también de otros continentes, en países como Francia, España, E.U, Italia, entre otros (Artigué, 1995), es decir, estamos frente a una problemática universal. Por ejemplo, la experiencia en la docencia de la matemática evidencia que generalmente los estudiantes que ingresan a la universidad y que traen conocimientos previos en matemáticas obtenidos en

educación media (10°, 11°, 12°, grado) presentan dificultad para realizar actividades matemáticas en las que particularmente están involucradas las series y progresiones, como por ejemplo, reconocer elementos en situaciones de variación, dar solución a problemas de series y particularmente establecer patrones y modelos, así como usar distintas formas de representación; para García (2018) quizás estas problemáticas obedezcan al mal uso de los libros de textos o a la selección de descontextualizadas actividades propuestas por estos.

De acuerdo con los razonamientos que se han ido deduciendo, Mendoza (2016) menciona que los estudiantes presentan una gran falencia en cuanto al desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior, es por eso que surge la necesidad de construir e implementar estrategias que permitan mejorar los procesos de enseñanza – aprendizaje mejorando la calidad de la educación y los resultados de pruebas internas en general. Si hablamos de falencias en educación y de cómo mejorarla calidad educativa principalmente en el área de las matemáticas en donde según han presentado muchos problemas de enseñanza aprendizaje en su estudio.

Sistemas educativos, organizaciones de distintos países se han involucrado y puestos a trabajar por mejorar el rendimiento y encontrar mejoras en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes en esta área. Entre estas organizaciones internacionales de evaluación de aprendizajes están: Primer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (PERCE); Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE); Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), en los que se dan a conocer los resultados del desempeño de los estudiantes en América Latina y el Caribe; el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos, por sus siglas en inglés PISA; Consejo Nacional de Profesores de Matemática, por sus siglas en inglés NCTM; el Estudio Internacional de

Tendencias en Matemáticas y Ciencias, por sus siglas en inglés TIMSS; la fundación para la Educación Ricardo Ernesto Maduro Andreu, por sus siglas FEREMA, entre otros.

Los informes de rendimiento académico en Honduras de los años 2013 al 2016 revelan una deficiencia en el desempeño escolar de los estudiantes en matemáticas. Para efectos de interés de este estudio, en los estudiantes de último año próximos a entrar a la universidad se evidenciaron los siguientes resultados: en el 2017 en Matemáticas en la escala de puntuación estandarizada, tomando como referencia que para alcanzar el nivel Satisfactorio debe alcanzarse un mínimo de 300 puntos y el máximo es 500, se obtuvo 260% el cual en promedio todos los estudiantes se ubican en el nivel Debe Mejorar. Por otro lado, durante el período 2007 – 2017 la meta de aprendizaje del Plan EFA-FTI Honduras 2003-2015 no se alcanzó para Matemáticas, y no solo no se alcanzó, sino que realmente el resultado para los años 2014 y 2015 se quedaron muy por debajo de la meta, a 19 puntos porcentuales, 51% respecto a 70% en otras áreas como español (SE, 2017:41).

En este orden de ideas, en los diferentes niveles de la educación se intenta mejorar, buscar, reflexionar y desarrollar habilidades, conocimientos y competencias para un desarrollo adecuado del aprendizaje y conocimiento en matemáticas desde el punto de vista cognitivo. No obstante, investigadores como Tall (2009) resaltan la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática en este sentido y el papel importante de los softwares en la reproducción de efectos visuales del cálculo. Así mismo Dolores (2007; 1999), por su parte, llama la atención sobre la necesidad de acercarse a la noción de conceptos del cálculo desde un estudio de la variación y desarrolla una propuesta en la que reflexiona sobre algunas de las dificultades inherentes a la comprensión de este concepto.

Es así que las nuevas Tecnologías y los softwares dinámicos (específicamente en matemáticas), nos presentan herramientas que pueden ser utilizadas por el docente para fortalecer la adquisición de conocimientos en matemáticas, ya que encontramos herramientas y programas que son significativos, de manera que se motive al estudiante y que le permitan a través de la práctica construir los nuevos conocimientos. La situación tan generalizada que se han incorporado innovaciones con el uso de las llamadas TICS, softwares de visualización, programas especiales, desarrollos de situaciones puntuales con el uso del computador o de la calculadora, que permiten en sí, un apoyo visual y un poco más de sentido y significado (Neira, 2017).

No obstante, las diferentes asignaturas de matemáticas que se imparten a nivel universitario, son una oportunidad para que los estudiantes profundicen sus conocimientos, habilidades, destrezas (ahora con la ayuda de softwares dinámicos), los cuales contribuyen para mejorar su desempeño en sus estudios, y procuran, intentan afianzar y desarrollar habilidades de orden superior en asignaturas como el cálculo.

Las Investigaciones a partir de 1985 de los expertos en la Didáctica del Cálculo (Artigue, 1998; Cantoral, Cordero y Farfán, 1990; Tall, 1991; Sierpinska, 1985; Cornu, 1983) develan que hubo desde la década antes mencionada una preocupación en torno a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. En este sentido los investigadores antes mencionados se encontraron con una realidad muy compleja en la comprensión de objetos matemáticos (límite, derivada, anti derivada, entre otros). De igual manera se encontraron dificultades relativas a metodologías de enseñanza aprendizaje del cálculo (Mendoza, 2013).

En los últimas tres décadas se han desarrollado diferentes investigaciones como ser (Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio, de Farfán (1997); Epistemologías de la función derivada de Ramírez (2013); Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, de Sierpinska (1985); El pensamiento matemático de estudiantes universitarios de cálculo y tecnologías informáticas, de Villarreal (2000); Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación, de Vrancken, Engler, Müller y Santa Fe (2008); Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo, de Bucari, Bertero, y Trípoli (2007); El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones, de Hitt (2003); Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto, de Hitt y Páez (2003); entre otros). Cabe señalar que la didáctica del cálculo es una línea con un desarrollo importante en el siglo XXI, ya que sus producciones científicas en artículos, tesis y libros son notables.

No obstante, de acuerdo a la enseñanza y aprendizaje del cálculo, Posada y Jaramillo (2003:21) mencionan que “a los estudiantes en asignaturas como cálculo se les dificulta la solución de algunos objetos matemáticos y por ejemplo problemas que tienen que ver con sucesión y series; una posible razón es que no exploran otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares”. Es así que se evidencia poco desarrollo en las formas y metodologías para enseñar los objetos matemáticos en el salón de clases, en los cuales se deben buscar estrategias y metodologías según las teorías de enseñanza aprendizaje para encontrar en los estudiantes posibles obstáculos al resolver problemas, desarrollar capacidades de resolución y favorecer la transferencia de sus conocimientos a una gran variedad de situaciones.

Respecto a esto Mendoza (2013) afirma puntualmente que las dificultades en la enseñanza del cálculo que se han reflejado a lo largo de los años provienen de a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza y, c) la ruptura álgebra /cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico. También manifiesta que en el cálculo, la actividad matemática se apoya en las competencias algebraicas, pero al mismo tiempo se requiere de una ruptura de cierta cantidad de prácticas para poder acceder al dominio del cálculo.

Por otro lado dada la poca interacción que se genera en los salones de clase en la enseñanza del cálculo en las universidades, la posibilidad de generarse debates en torno a un tema específico del cálculo y en particular las series infinitas, se ve reducida para poder afianzar los contenidos asociados a este concepto. Esta situación influye en las carreras de Ingeniería, en donde es de suma importancia el manejo comprensivo de las series finitas e infinitas para su posterior aplicación en situaciones problemas, propias a su especificidad. El Cálculo es un curso obligatorio para las carreras de Ingeniería, siendo el requisito esencial para poder cursar otras asignaturas por que los contenidos de los programas académicos de estas carreras tienen una dosis fuerte de abstracción y generalización.

En el curso de Cálculo II, de la carrera de Ingeniería Informática del Centro Universitario Tecnológico Centroamericano (CEUTEC), en su sede regional de la ciudad de la Ceiba, la asignatura posee cuatro unidades valorativas y cuenta con cuatro horas de clases semanales en los períodos regulares (10 a 12 semanas). Breve (2018:1) afirma que en CEUTEC “el estudiante tiene una cultura de temor al aprendizaje de las matemáticas dando como resultado

un estancamiento en esta área, por lo que se tiene que combatir ese miedo y este se logrará implementando nuevas técnicas”.

De lo anterior para Breve (2018) según datos de CEUTEC los jóvenes tienen debilidades en el dominio del área aritmética (operaciones con diferentes conjuntos numéricos, cálculo de porcentaje, utilización adecuada del concepto de razón y proporción, uso de la regla de tres directa e inversa, entre otros); porque según él los estudiantes que egresan de secundaria no saben muchos conceptos básicos que deberían saber en matemáticas. Según Artigue (1998) en el proceso de enseñanza aprendizaje y en las evaluaciones del cálculo se ha practicado durante muchos años la enseñanza tradicional. Este tipo de enseñanza no favorece el desarrollo de significados acerca de la comprensión del contenido y de su aplicabilidad, por que debido a esto los estudiantes en su mayoría no son capaces de lograr y reproducir de manera significativa en sus evaluaciones los conocimientos supuestamente aprendidos y no muestran una apropiación significativa de los conceptos básicos del cálculo tales como: función, límite, derivada, anti derivada, serie, entre otros (Mendoza, 2013).

Hechas las consideraciones anteriores CEUTEC por su condición de Centro de Tecnología e Innovación Educativa, año a año busca formas o metodologías de enseñanza-aprendizaje que pretendan afianzar el proceso educativo de manera eficiente en todas sus especialidades de estudio. Es así que se hace necesario construir, desarrollar y organizar un nuevo elemento de enseñanza que impulse el desarrollo de estas capacidades, específicamente en temáticas referentes a la clase de cálculo. En ese mismo sentido, se puede hacer uso de la tecnología como un apoyo didáctico, es decir, el uso de software dinámico educativo, uso de páginas electrónicas educativas en línea (www.vitutor.com, www.julioprofe.net, www.studypug.com, www.khanacademy.org) y otros recursos electrónicos para afianzar el

proceso de aprendizaje en los estudiantes y formar parte de un cambio que día a día se presenta con las reformas curriculares que se pretenden implementar en los diferentes niveles educativos en Honduras y también ante las exigencias de la dinámica educacional de cada asignatura de enseñanza en particular (Argueta, 2012).

Sobre los argumentos anteriores, y coincidiendo con autores como Cabezas y Mendoza (2016), Villa y Ruiz (2010) exponen que en el estudio objetos matemáticos en álgebra y cálculo se propicia el análisis de variación y cambio en el comportamiento de fenómenos de la vida. De acuerdo con Mendoza (2013) el pensamiento variacional permite que el estudiante haga uso del análisis y el pensamiento crítico para entender y explicar fenómenos de cambio y variación en diferentes contextos.

Por tanto, este estudio de investigación tiene su origen en el deseo de contribuir con los procesos de enseñanza y de aprendizajes del cálculo, tomando en consideración la problemática que dichos procesos presentan, y a la vez, puede ser de mucha ayuda específicamente en las clases de la asignatura antes mencionada, como otra alternativa didáctica – pedagógica que aportara nuevos elementos para el abordaje de la enseñanza de las series geométricas para el desarrollo de habilidades de pensamiento variacional, facilitando el proceso educativo mediante el uso adecuado y el aprovechamiento eficiente de estos recursos didácticos (software matemático) como metodología interactiva.

El panorama antes descrito aportó elementos sustantivos para el desarrollo de esta investigación. Considerando la falta de propuestas explícitas para enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del fenómeno del cambio y la variación, particularmente con el fin de aportar al surgimiento de una propuesta de enseñanza del cálculo en el nivel inicial de la

educación superior, interesa poner en evidencia las producciones estudiantiles que manifiesten indicios de pensamiento variacional que hayan podido desarrollar los estudiantes en su proceso educativo.

De acuerdo a la situación planteada anteriormente, surge el interés de responder a la siguiente pregunta problema de investigación.

1.2 Problema de investigación

Es pertinente formular la siguiente pregunta problema que guiará esta investigación: ¿Se constituye Geogebra classic 5 un mediador de pensamiento variacional en la construcción de la serie geométrica en estudiantes universitarios?

Para plantear de manera clara y ordenada nuestro problema, en el siguiente apartado se enuncia las preguntas y objetivos de investigación.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Analizar los elementos del proceso de construcción de series geométricas desde una perspectiva variacional con apoyo del software Geogebra en el curso de Cálculo II de CEUTEC.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes referentes a sumas finitas e infinitas vinculadas con el concepto de series geométricas en un curso de Cálculo II de CEUTEC.
2. Diseñar sesiones de trabajo orientadas a la construcción de la serie geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo del software Geogebra classic 5 en un curso de Cálculo II de CEUTEC.
3. Analizar los elementos que reflejan las producciones estudiantiles al construir la serie geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo del software Geogebra classic 5 en un curso de Cálculo II de CEUTEC.
4. Categorizar los rasgos distintivos de las producciones estudiantiles en la construcción de series geométricas, con apoyo del software Geogebra, asociados a un pensamiento variacional.

1.4 Preguntas de investigación

1. ¿Qué conocimientos previos y habilidades matemáticas de pensamiento variacional con apoyo del software Geogebra classic 5, poseen los estudiantes de un curso de Cálculo II de CEUTEC?
2. ¿Qué tipología de sesiones de trabajo potencian el desarrollo de pensamiento variacional en la construcción de la serie geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo del software Geogebra classic 5 en un curso de Cálculo II de CEUTEC?
3. ¿Cuáles elementos reflejan las producciones estudiantiles al construir la serie geométrica desde una perspectiva variacional con apoyo del software Geogebra classic 5 en un curso de Cálculo II de CEUTEC?
4. ¿En qué medida los rasgos distintivos de las producciones estudiantiles en la construcción de series geométricas, con apoyo del software Geogebra, se podrían asociar a un pensamiento variacional?

1.5 Justificación

La experiencia docente en la enseñanza de las matemáticas evidencian que los estudiantes, específicamente universitarios, muestran dificultades para resolver problemas en las que están involucradas las series y progresiones, como por ejemplo, poder resolver situaciones matemáticas, reconocer situaciones y elementos de variación, usar distintas formas de representación y establecer comportamientos y patrones.

La comprensión de los objetos matemáticos (siendo más específico las progresiones), para García (2018:17) no se da por el uso repetitivo de las operaciones algorítmicas, ni por la simple práctica; si no que:

La comprensión de las progresiones se completa a partir de la asimilación y el reconocimiento de sus distintas representaciones, de su noción abstracta, formal y generalizada desde situaciones auténticas, que permita la comprensión desde su evolución conceptual, histórica y epistémica, como se tratan escasamente en los textos de matemática escolares.

Por tanto Gómez (2015), afirma que una concepción incorrecta de un concepto u objeto matemático podría redundar en un bajo rendimiento en el aprendizaje del cálculo. Los problemas en cuanto al aprendizaje de los objetos matemáticos en cálculo son varios, como por ejemplo, Cornu (1986) reporta obstáculos epistemológicos que no provienen estrictamente de la noción del cálculo matemático, pero que están relacionados. Tal es el caso de la idea de series geométricas, donde se afirma que una suma infinita debe ser infinita, y que la idea de que toda convergencia es monótona y otras ideas creadas por las concepciones espontáneas.

De manera particular Sierpinska (1985) y Artigue (1998) ponen en evidencia numerosos obstáculos que presentan los estudiantes antes y después de la enseñanza de objetos matemáticos relacionados a conceptos de cambio y variación en el aprendizaje del cálculo. Estos obstáculos fueron categorizados. El primer obstáculo se denominó “Horror Infiniti” el cual está vinculado con el miedo al infinito, luego se sitúan los obstáculos concernientes al concepto de función. Otro obstáculo está relacionado con la concepción de la noción de límite visto desde lo geométrico, y por último el obstáculo epistemológico, que hace referencia a como un sujeto puede comprender el significado de una noción o de un concepto matemático particular.

La investigación sobre la problemática del cálculo en los últimos años tiene ya importantes resultados, como es la identificación de sus principales causas (Márquez, 2014). Es así que las dificultades en la enseñanza del cálculo trae ligado dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior, y las dificultades de dicha enseñanza provienen de la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, y la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico (Artigue, 1995).

Investigadores como Tall (1992); Hitt (1998a); Cantoral, Montiel y Reyes (2014a); Cantoral, Reyes y Montiel (2014b), hacen propuestas sobre como el estudiante puede superar estos obstáculos que suelen presentar al momento de estar ante situaciones de cambio y variación. Realizaron algunos análisis donde el resultado fue la descripción de factores que son generadores de obstáculos de aprendizaje que se agruparon en: epistemológicos, cognitivos, didácticos y emocionales. Se finaliza destacando como los diferentes factores que originan obstáculos se entrelazan complejamente siendo necesario su consideración para el

diseño, implementación y evaluación con la finalidad de mejorar efectivamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

De los planteamientos expuestos, estos autores afirman que al tener concepciones deficientes de conceptos en objetos de asignaturas como en el cálculo, limitarán el desarrollo de nuevos conocimientos ligados a este. Sobre el asunto es poca la información relacionada con los procesos cognitivos que demandan las actividades didácticas matemáticas propuestas en libros de textos, puntualmente para los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas (García, 2018).

Por otro lado, Tall (1992) resalta la importancia de los aspectos dinámicos de la matemática y el papel del uso de la tecnología en la reproducción de efectos visuales del cálculo, así como de enseñar procesos más que productos para obtener una aproximación construida de un objeto con apoyo en raíces cognitivas: conceptos familiares para los estudiantes que a la vez brinden una base para el desarrollo formal posterior y realizar estudios en torno a la importancia de usar software, como un elemento iterativo, dinámico y una herramienta que permite visualizar otro tipo de interacción pedagógica en el salón de clases.

En función de las necesidades en educación donde se puedan implementar con las nuevas tecnologías, así como de los problemas integradores presentes en diversas modalidades, el campo conceptual en matemáticas debe contribuir con las temáticas que se aborden en la educación en general, permitiendo así integrar los conocimientos que se han adquirido en otras áreas (Murillo, 2009). Con referencia a lo anterior, en educación, una asignatura en general, implica una continuación de conocimientos articulados entre sí, y este es el caso particular del cálculo, el cual propone trabajar contenidos que se focalicen fuertemente en

objetos y herramientas matemáticas de tipo aplicado, que permitirán “expresar”, “y ver” fenómenos del mundo natural mediante ciertos modelos, los cuales permitirán comprender, representar y actuar sobre situaciones de la vida real.

Así pues, por los aportes didácticos alcanzados en este estudio a través del análisis de fenómenos que implican el cambio y variación junto con el desarrollo del pensamiento variacional servirán para los docentes de matemáticas, con el fin de complementar su quehacer en el aula, y que con el uso de este pensamiento los estudiantes logren construir y comprender el concepto de series geométricas al igual que también este trabajo sea una base para nuevas investigaciones relacionadas.

Atendiendo a estas consideraciones, el pensamiento variacional es muy importante y es crucial en el proceso de enseñanza aprendizaje y en el desarrollo del pensamiento matemático. En este sentido, MEN (2006:66) afirma que este pensamiento “cumple un papel crucial en la resolución de problemas de la vida cotidiana apoyados en el estudio del cambio y la variación, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana y las matemáticas mismas”. Para Villa y Ruiz (2010) en el desarrollo del pensamiento variacional se involucran procesos de experimentación cognitiva y tecnológica a partir de los cuales los estudiantes e investigadores visualizan, generalizan y abstraen relaciones y propiedades de los objetos matemáticos que se estudian.

Dentro de este marco, ser matemáticamente competente se expone en el pensamiento lógico y matemático; y en el pensamiento matemático se incluye al pensamiento variacional. En Latinoamérica, el estudio de procesos de variación en las instituciones educativas de nivel primario, medio y superior ha sido sugerido por los Lineamientos Curriculares para el área

de Matemáticas como es en el caso del Ministerio de Educación Nacional-MEN en Colombia, el cual lo describe como (MEN, 2006:66):

[...] el PV tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

El pensamiento variacional es concebido desde una perspectiva curricular que ubica el accionar de la matemática a través de distintos pensamientos y procesos. Desde esta perspectiva curricular para MEN (2006) ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de los procesos generales que se contemplan en Lineamientos Curriculares de Matemáticas (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia, y esto concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

El pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Este pensamiento es modular y céntrico porque articula el cambio y la variación que están presentes a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos

matemáticos (Mendoza, 2016). La relación con otros pensamientos se da frecuentemente, porque la variación y el cambio, se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos, analíticos, geométricos, de medidas y de datos, porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

El pensamiento variacional por su concepción de un pensamiento dinámico, articulador que pretende que los individuos logren captar los procesos y distintas situaciones del entorno que puedan ser modeladas matemáticamente o a través de un software dinámico donde haya cambio y variación. Entendiéndose el cambio como la evolución de un estado inicial y otro estado, y la variación como la cuantificación de ese cambio, donde tres elementos son fundamentales. En la génesis del cálculo se orientó desde la perspectiva de Newton, Leibniz y de sus antecesores en situaciones vivenciales del entorno donde había que resolver problemas de cambio y variación que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas. Dentro de ese marco los distintos objetos que fueron gestándose (función, límite, derivada, anti derivada, series, sucesiones), tienen una característica que para su definición propia o al interior de ellas mismas es vital la cuantificación de como varían.

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de la detección de los criterios que rigen las reglas para detectar patrones que se repiten. Las unidades de repetición se encuentran en sucesiones o series que presentan objetos, sucesos y formas, uno detrás de otro en un orden establecido y de acuerdo a un patrón. No obstante al identificar en qué se asemejan y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o series, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (MEN, 2006).

Desde esta mirada teórica la serie geométrica por su característica desde una concepción dinámica como un objeto que es la acumulación de sucesivos estados, esto es la suma infinita de a_n términos, en cada una de sus sumas parciales no es el cálculo sino el dinamismo de pasar de un estado a una suma parcial $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, es oportuno investigar acerca del objeto serie geométrica en el proceso enseñanza-aprendizaje en vista que este tema es de suma importancia en los cursos de cálculo universitario, ya que es un tema base para la comprensión de otros objetos matemáticos que se estudiarán consecuentemente en asignaturas posteriores y que debe ser parte del conocimiento que el estudiante de cualquier carrera de Ingeniería debe poseer, además que es un tema importante del plan de estudios de estas carreras. Para ello, se presentan sesiones de trabajo que involucran diversos aspectos subyacentes a la construcción de serie geométrica y uso de pensamiento variacional, donde se quiere que los estudiantes puedan acercarse al concepto de serie geométrica de una manera más significativa, centrando el trabajo en el estudiante y en su desempeño.

Es por ello que se sugiere la exploración e indagación de elementos de pensamiento variacional que poseen y/o logran desarrollar los estudiantes de ingeniería de CEUTEC-UNITEC al momento de construir series geométrica con apoyo del software Geogebra Classic 5 cuando se enfrentan a diferentes situaciones relacionadas con la variación en el curso de Cálculo II, analizando de forma sistémica el desarrollo del pensamiento variacional, desde las interacciones entre el estudiante, el saber, y el profesor.

En vista del panorama del cálculo y a la importancia del uso de herramientas tecnológicas, esta investigación está focalizada en conocer las manifestaciones de pensamiento variacional

que evidencian los estudiantes de Cálculo en diferentes actividades propuestas por el profesor a lo largo de las sesiones de trabajo, y que constituyen el sustrato de este trabajo de investigación. De lo anterior, se tiene como objeto de estudio profundizar en el análisis de las producciones escritas y verbales realizadas por estudiantes universitarios cuando abordan las distintas actividades asociadas al desarrollo del pensamiento variacional. No obstante considero que esta investigación, contribuirá a una alternativa didáctica – pedagógica, y además aportaría nuevos elementos para el abordaje de la enseñanza de las series geométricas para el desarrollo de habilidades de pensamiento variacional desde otro enfoque.

Por tanto, es importante centrar el interés en proveer a los estudiantes de las herramientas didácticas y tecnológicas con las que logren comprender el objeto de series geométricas a través del análisis de situaciones de variación y cambio para desarrollar el pensamiento variacional con apoyo de software y la articulación de los diversos registros de representación semiótica.

2 Marco teórico

En este capítulo se presentan los fundamentos conceptuales que sustentan esta investigación los cuales hacen referencia a las nociones que proponen algunos autores sobre el estudio del pensamiento variacional y cómo la tecnología a través del Software Geogebra puede aportar al desarrollo de este pensamiento. Para afrontar tal situación, se describen algunas consideraciones de cómo ha sido abordado el estudio del pensamiento variacional y se expone cómo el proceso de visualización puede ayudar al desarrollo de este pensamiento.

Es importante destacar que la Educación en Matemáticas en los últimos años ha asignado relevancia al estudio histórico de los objetos matemáticos que forman parte de la currícula matemática. La exploración educativa en el ámbito de la orientación universitaria de la Matemática se ha desarrollado recientemente, hace veinte años, con particular énfasis en los procesos de instrucción y aprendizaje del Cálculo. El crecimiento de investigaciones en didáctica de las matemáticas relacionadas con el crecimiento de educación y aprendizaje de las matemáticas en los inicios de los niveles de educación superior ha puesto de manifiesto la gran cifra de problemas que suelen presentarse en este proceso (Holton, 2003).

La Educación Matemática ha abordado este desafío desde la comprensión de la cognición humana, de cómo el individuo logra desarrollar competencias, habilidades de pensamiento matemático de manera significativa, para que puedan ser puestos en escena al resolver problemas y obtener logros significativos en los aprendizajes (Mendoza, 2016).

En este segundo capítulo de estudio, el segundo apartado versa acerca de los fundamentos y orígenes de las series y progresiones en los números reales, para ello es necesario remitirnos

a la raíz histórica de su surgimiento: conocer los contextos, desafíos y problemáticas propios de este momento.

2.1 Contexto histórico de las series

Las series y sucesiones es una de las bases del principio de la historia de las matemáticas donde se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética. Constituyen una herramienta muy poderosa para el desarrollo de otros conceptos como el de función, límite o infinito, y para la matematización de la vida cotidiana a partir de la modelización (Weigand, 2004). El origen de las series, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas es incierto. Las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. C. La aparición de los primeros conceptos que dan origen a las series infinitas, son las sucesiones, éstas están en forma de versos como aparecen en el *Mandala II* del *Rg Veda* en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a.C. al 1750 a.C. (Gutiérrez, 2009). No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto. A continuación veamos su desarrollo en algunas civilizaciones.

2.1.1 Babilonia

Las matemáticas babilónicas se refieren a la de los pueblos de Mesopotamia (Irak moderno) desde los días de los primeros sumerios hasta el comienzo del período helenístico. El nombre de matemáticas babilónicas es debido al papel central de Babilonia como un lugar de estudio, que dejó de existir durante el período helenístico. Desde este punto, la matemática babilónica se fusionó con las matemáticas griegas y egipcias para dar lugar a las matemáticas

helenísticas. Más tarde, bajo el imperio árabe, Irak (Mesopotamia), especialmente Bagdad, una vez más se convirtió en un importante centro de estudio de la matemática islámica (Codes, 2010).

En la época de los babilonios y su auge de las matemáticas, según expertos es conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las progresiones geométricas (Pérez, 2012).

2.1.2 El Antiguo Egipto

En el antiguo Egipto ya se estudiaban las relaciones aritméticas en relación con sus problemas cotidianos. En cuanto al trato de las progresiones sus conocimientos se recogen en el “papiro Amhes”. Donde aparece tablas de descomposición de $\frac{2}{n}$ en suma de fracciones unitarias (con n impar pues para n par equivale a una unitaria al simplificarse), y otra en las que se escriben las descomposiciones de las fracciones de la forma $\frac{n}{10}$ (Pérez, 2012).

Otros de los textos importantes que recogen los conocimientos importantes de esta civilización es “El papiro Rhind”. Es un papiro de unos seis metros de longitud y 33 cm de anchura, en un buen estado de conservación, con escritura hierática y contenidos matemáticos. Contiene 87 problemas matemáticos en los que aparecen fórmulas de áreas y volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, trigonometría básica. También encontramos como trabajar con fracciones unitarias (las inversas de los números naturales: $1/n$), números primos y compuestos; media aritmética, geométrica y armónica;

interpretaciones sencillas de la **Criba de Eratóstenes**. Muestra la forma de resolver ecuaciones lineales de primer grado, así como las series aritméticas y geométricas.

El papiro egipcio de Rhind como se muestra en la figura 1, es un antiguo documento egipcio que data cerca del año -1650, obtenido de las ruinas de Tebas en 1858 por el anticuario escocés Henry Rhind y descifrado en 1866 por el egiptólogo Eisenhol (Collete, 1986:41).

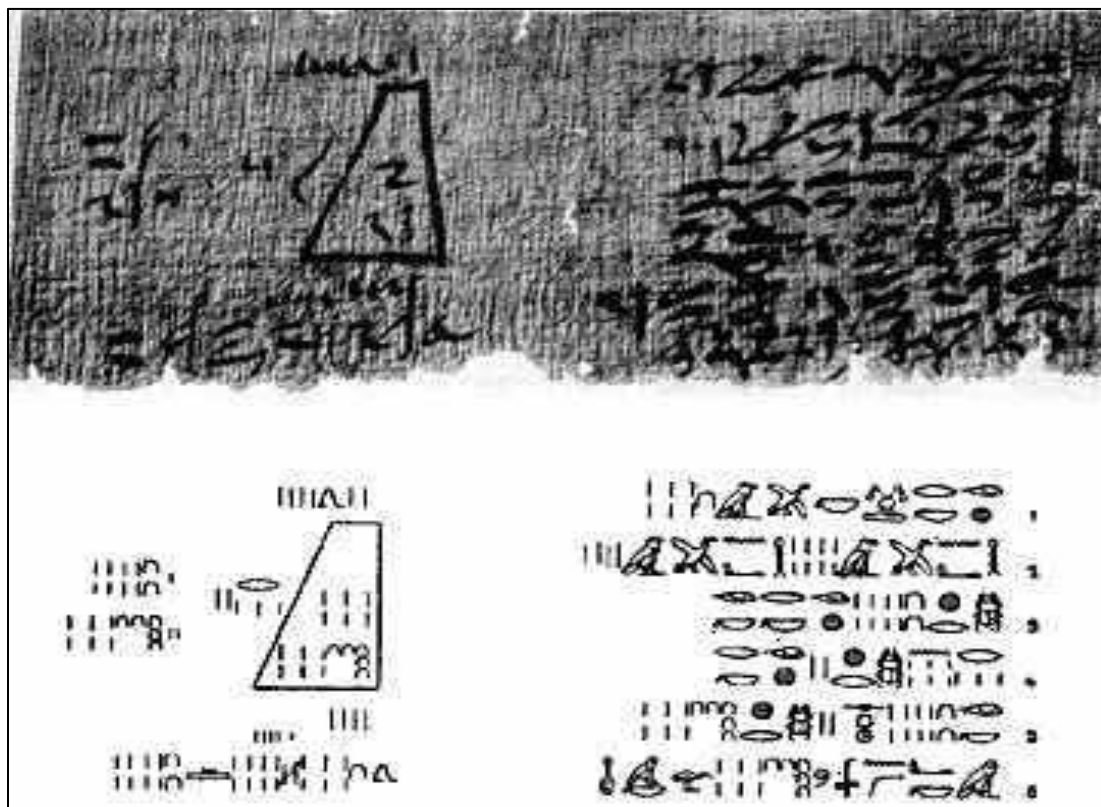


Figura 1 Papiro egipcio de Rhind

Tomado de Boyer (1986)

2.1.3 La antigua India (900 a.C – 200 d.C)

Uno de los personajes más destacados de esta época fue Pingala (siglos III al I a. C.) el cual en su obra expone ideas básicas sobre los números de Fibonacci, llamados mātrāmeru. Por otro lado, entre el 400 a. C. y el 200 a. C., los matemáticos yainas comenzaron el estudio de

las matemáticas para el exclusivo propósito de las matemáticas, desarrollando matemáticamente las sucesiones y progresiones. El Manuscrito “Bakhshali”, escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C., incluía soluciones de progresiones aritméticas y geométricas y de series compuestas, entre otras cosas (Pérez, 2012).

2.1.4 La antigua Grecia (hasta el 300 d.C)

Las corrientes filosóficas, pitagóricos y los eleáticos, influyeron notablemente en el desarrollo de la matemática griega. Los discípulos de Parménides, contrarios a la idea de multiplicidad y cambio que defendía la escuela pitagórica, adoptaron el principio de unidad y permanencia del ser que dio lugar a las famosas paradojas de Zenón (Boyer, 1994). Entre un sin número de aportaciones de la cultura griega a las matemáticas, cabe destacar que se comienza a hablar en este tiempo de sucesiones de números pares e impares. Aunque se asociaba lo “par” con lo ilimitado y lo “impar” con limitado, cabe destacar a Arquímedes (287 a.C– 212 a.C). Este matemático griego trabajó durante su vida con algunas sucesiones y series de gran importancia. Las relativamente pocas copias de trabajos escritos de Arquímedes que sobrevivieron a través de la Edad Media fueron una importante fuente de ideas durante el “Renacimiento” (Pérez, 2012).

Por otro lado las series no aparecen tal y como se entienden actualmente. Las primeras manifestaciones de sumas infinitas aparecen en las paradojas de Zenon de Elea (490-425 a.C.): el cual defendía la filosofía de Parménides que rechazaba el pluralismo y la realidad de cualquier tipo de cambio, defendiendo la creencia de que todo es un indivisible, realidad inmutable, y la razón descarta cualquier presunción de lo contrario. Zenón pretendía demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y divisibilidad mediante el

método dialéctico, consistente en suponer cierto lo contrario de lo que se pretende demostrar y llegar así a una contradicción o a un argumento absurdo (Codes, 2010). En el siglo XVII Saint Vincent demostró la convergencia de la serie geométrica, añadió un comentario a la paradoja de Aquiles afirmando que Zenón no había considerado que la distancia total es la suma de una serie geométrica convergente, por lo que su suma es finita.

Otro discípulo fue Demócrito de Abdera (460-370 a.C.): inspirado quizá en el atomismo geométrico de los pitagóricos, defiende una teoría física atomista que no encontró herederos (Boyer, 1994). También Aristóteles (384-322 a.C.): rechazó la existencia del infinito actual, limitando el uso del término infinito sólo para referirse al infinito potencial (Boyer, 1959) porque pensaba que si algo es desconocido, existe sólo potencialmente. Euclides de Alejandría (325-265 a.C.): a pesar de que se conocen varios textos de este autor, se suele asociar su nombre a los “Elementos”. Los “Elementos” han formado parte de la instrucción de los científicos a través de los siglos (Codes, 2010).

2.1.5 La Edad Media

En esta época las series infinitas aparecen asociadas al concepto de la latitud de las formas y se ponen de manifiesto en la resolución de problemas suscitados por el estudio del movimiento. En este período se destaca la pérdida del miedo al infinito que caracterizó la época griega. Boyer (1994:341) sostiene que:

Los matemáticos del Occidente europeo mostraron durante el siglo XIV imaginación y notable claridad de pensamiento, pero lo que les faltaba era habilidad tanto algebraica como geométrica, y así sus contribuciones no consistieron en una extensión de la obra de los clásicos, sino en la exploración de nuevos puntos de vista.

Otros autores destacan la transición de la etapa entre la Edad Media y el Renacimiento sin resultados brillantes. En esta época, se fusionó nuevamente la matemática a la ciencia y la tecnología, como en la época de Alejandría, asegurando así su posterior desarrollo (Kline, 1992).

Se destaca en cuanto al desarrollo de las series y sucesiones a Bhaskara II (1114 - 1185), importante matemático de la India en el siglo XII. En el libro IX de Los Elementos de Euclides aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Bhaskara plantea en su más conocida obra “**En Lilavati**”, diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas. Además, en la época destaca el matemático Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido como Fibonacci, su principal aportación a las matemáticas fue el estudio y cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, que como se puede comprobar actualmente tiene múltiples aplicaciones en los fenómenos (especialmente naturales). Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci (Pérez, 2012).

Otro matemático de la época media que se destacó en el desarrollo de series fue Leonardo de Pisa (1170-1250): se interesó principalmente por la aritmética. En su obra “Liber abaci” aparece un problema que da lugar a la conocida sucesión de Fibonacci, Esta sucesión, aparte de sus aplicaciones, tiene interesantes propiedades como la de que el límite del cociente entre dos términos consecutivos es igual al número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1.6 Las matemáticas en el Renacimiento

En el Renacimiento se abordan y resuelven problemas relacionados con el álgebra, y por relación con las sucesiones de gran envergadura. Nicolás de Cusa (1401-1464) sigue una

vertiente filosófica relacionada con las matemáticas. Al igual que merece la pena mencionar la importancia de Michael Stifel, al cual se le debe el estudio tan serio que hizo de las series y de las progresiones Aritméticas y Geométricas (Pérez, 2012).

2.1.7 Edad Contemporánea

Desde el siglo XVII, la convergencia de las series ha suscitado desacuerdos sobre la validez de muchos resultados en los que intervenía series infinitas. La falta de una estructura teórica firme sobre sumas de series infinitas provocó muchos resultados contradictorios. Una de las razones que produjeron conclusiones erróneas, fue el uso del álgebra de las sumas finitas aplicada a las sumas infinitas. Esto es consecuencia de la falta de una teoría de cálculo infinitesimal consolidada que aún debía esperar para asentarse (Codes, 2010).

En la Edad Contemporánea Isaac Newton (1642-1727), uno de los científicos más importantes de la historia, con su aportación más conocida: “El binomio de Newton”, mediante el Teorema del binomio Newton es capaz de desarrollar cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos. No obstante, Euler contribuyó a todas las ramas de las matemáticas activamente y trabajó con sucesiones y series. De igual manera Cauchy investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Además, caracterizó el concepto de límite mediante las sucesiones. Así mismo Joseph Fourier (1768-1830) introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier (Pérez, 2012).

Por otro lado, ya desde temprana edad Gauss destaca por sus habilidades matemáticas, incluso a los 7 años consiguió resolver el problema de la suma de los 100 primeros números

en una clase en el colegio estableciendo una relación simétrica en esta progresión aritmética. Y por último con Stolz nos encontramos ante uno de los grandes matemáticos austriacos y de la época. Es conocido por sus trabajos en materia de análisis matemático e infinitesimal. Sobre el tema de sucesiones consiguió estudiar la convergencia de una sucesión a partir de otra sucesión monótona creciente y divergente (Pérez, 2012).

De los trabajos realizados en los siglos XVII, XVIII y XIX hay muchos aspectos fundamentales para trabajar coherentemente con sumas infinitas (Codes, 2010).

- Las series trigonométricas utilizadas por algunos matemáticos anteriores a Fourier, como Lagrange, D. Bernoulli o D'Alembert, aparecieron en muchas ocasiones en cálculos de astronomía, principalmente para aproximar distancias.
- Cuando Dedekind definió las ideas relativas al infinito donde un conjunto infinito como aquel que es semejante a una parte de él mismo, dotó al concepto de infinito de entidad lógica que hasta entonces no había tenido.
- El cálculo infinitesimal se formaliza a partir del siglo XVIII y emerge como una teoría consolidada en el siglo XIX. Tras la prohibición del uso de series no convergentes, se formaliza una teoría de series. En esta nueva teoría aparece el concepto de sumabilidad. Es posible definir la suma de una serie con otro significado distinto del habitual, en el que se asocia a un proceso de acumular, y así se puede definir una suma para una serie divergente.

Las investigaciones en astronomía promueven los trabajos sobre ecuaciones diferenciales, que requieren de la teoría de series divergentes. Con referencia a lo anterior, las sucesiones y series infinitas siempre se usaron para resolver problemas aritméticos y geométricos, pero

poniendo énfasis en ellos nunca utilizaron Cálculo Diferencial e Integral, al menos no como el que usamos en la actualidad. A pesar de lo artificial de las nuevas definiciones de suma, la validez de su interpretación física justifica su aceptación.

2.2 Historia de las Progresiones geométricas

La historia de las progresiones geométricas data de miles de años atrás, cuando el hombre ajustaba el concepto de número y podía representarlo por medio de códigos, para así lograr ordenarlos en forma creciente y progresiva, lo que contribuyó inicialmente a la formación de la sucesión natural de los números. Una vez establecida la sucesión natural de los números, contar se basaba en asignarle a cada objeto del grupo dado un elemento de la sucesión natural, principiando desde uno hasta llegar al último objeto; por lo tanto, la cantidad total de objetos correspondía al término de la sucesión natural en que se ubicaba el último objeto (Codes, 2010).

No obstante las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. C. la aparición de los primeros conceptos que dan origen a las series infinitas, son las sucesiones, éstas están en forma de versos como aparecen en el Mandala II del Rg Veda en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a. C. al 1750 a. C (Gutiérrez, 2013).

Las progresiones geométricas fueron planteadas en numerosas culturas y la mayoría tiene tablas que muestran el conocimiento implícito de la progresión geométrica, sin embargo, para la mayoría de historiadores se inicia más formalmente desde la matemática griega. Por ejemplo, en las dos paradojas de Zenón de Elea (490 – 430 a.C.) conocidas, una como la de “dicotomía” y otra como la de “Aquiles y la tortuga”, en la primer paradoja Zenón argumenta

que un corredor nunca llega a la meta, ya que primero deberá recorrer la mitad y posteriormente la mitad de la mitad, y así sucesivamente, lo que en términos modernos indica que, Zenón argumenta que dado que la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ es infinita el corredor nunca podrá llegar al final (Horta, 2018).

Esto nos dice que la noción de la progresión geométrica era conocida por los antiguos griegos, aunque no aparezca una relación con la progresión geométrica. Más adelante se encontraron hallazgos sobre relaciones entre progresiones aritméticas y geométricas, como lo explica Horta, (2018:58):

Uno de los primeros en encontrar la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas fue Arquímedes (287 – 212 a.C.) quien desarrolló propuestas sobre las progresiones geométricas, basado en el método de exhaustión con las cuales demostró resultados tales como que el área cercada por una línea y una parábola es igual a $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo con igual base y altura y para esto demuestra en su trabajo sobre la cuadratura de la parábola que la suma $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{4}{3}$.

Por otro lado, Hawking (como se citó en Horta, 2018) explica que en el Arenario, Arquímedes crea un sistema de numeración basado en la miríada (10 000) y la base 10 para contar el número de granos de arena que puede estar contenido en el universo en el cual hace uso de la progresión geométrica de razón 10, como en el sistema de numeración actual.

2.3 Conceptos de Progresión geométrica y sus interpretaciones

Una serie geométrica es una sucesión de números en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante r . La constante r se llama razón común. Ahora una serie geométrica infinita es una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

No obstante la fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita puede, dependiendo del valor de r , extenderse para producir una fórmula para la suma de una serie geométrica infinita. En ese mismo sentido podemos aplicar el razonamiento usado antes para hallar la suma de una serie geométrica infinita. Sea $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$ (1)

Al Multiplicar (1) por r , obtenemos $rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$ (2).

Al restar (2) de (1) se tiene $rS_n - S_n = a_1r^n - a$

$$(r - 1)S_n = a_1(r^n - 1)$$

Podemos dividir ambos lados de la última ecuación $r-1$ obteniendo, $S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$ ($r \neq 1$).

Se deduce que S_n se acerca a $\frac{a}{1-r}$ cuando n se hace grande, o bien

$S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la suma de esta serie geométrica infinita es $S = \frac{a}{1-r}$. Si

$|r| \geq 1$ la serie diverge (Stewart, Redlin y Watson, 2012).

Por otro lado para Horta, (2018) una serie geométrica es una sucesión de números en la que cada número a su antecesor multiplicado por una constante. Por ejemplo en la vida cotidiana, en el ámbito de las inversiones y las rentas, es importante conocer en este tipo de progresión su velocidad de crecimiento, evidenciada en el denominado “interés compuesto”. Así mismo en biología mediante este proceso natural cada célula obtiene dos células hijas, y cada una

de ellas obtendrá sus correspondientes dos células hijas, y así sucesivamente. Este suceso también puede modelar mediante una progresión geométrica.

2.4 Pensamiento matemático variacional

En los inicios del desarrollo del cálculo, diferentes ideas y aproximaciones a los objetos matemáticos (límite, derivada, funciones, integral, entre otros) se desarrollaron en diferentes contextos: aritmético, geométrico, algebraico a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos, y en alguna medida algebraica, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo: Newton y Leibnitz (Mendoza, 2016). En este sentido, la variación y el cambio han sido aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales y cotidianos en diferentes situaciones.

Investigadores como Vasco (2006) y Villa-Ochoa (2010) han planteado reflexiones, con la intención de que algunos conceptos y objetos en matemáticas sea percibido a través de fenómenos de cambio y variación, pues han ofrecido algunas reflexiones “experimentales” sobre la necesidad de desarrollar este tipo de pensamiento en salón de clase. En este aspecto y, desde una perspectiva que trasciende el pensamiento variacional, afirmamos que este busca conducir al estudiante a un aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos. Esta afirmación es coherente con la descripción que Mendoza (2016:35) hace del pensamiento variacional:

Si, en coherencia con esta concepción del pensamiento variacional, nos situamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los cuales puedan investigar sobre los procesos de cambio que viven a diario, éstos podrán poner en evidencia sus concepciones pre matemáticas y, a través de un currículum adecuado, conducirlos a un aprendizaje más

significativo de los conceptos matemáticos que el sistema educativo busca entregar, sistematizar y formalizar.

Es así que el Pensamiento Variacional es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos y a los indicadores de su desarrollo. Para Vasco (2006) el pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, en los subprocesos recortados de la realidad. En palabras de (Vasco, 2002:64) este pensamiento es un asunto de modelar y no meramente resolver ejercicios o problemas de matemáticas como lo afirma:

Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

Por otro lado, investigadores desde la perspectiva de socioepistemológica como Cantoral, Reyes y Montiel (2014a) señalan que la construcción social del conocimiento o epistemología de las prácticas sociales centra su interés en aquellas prácticas de naturaleza social que le den sentido y significado al saber matemático, dándose paso del conocimiento al saber. En palabras de Cantoral (2004) señala que se entenderá por pensamiento y el lenguaje variacional como una línea de investigación que estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje, comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y el cual presta atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y

culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales.

Para Cabezas y Mendoza (2016) consideran que pensar variacionalmente es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables y expresada en un soporte material (ostensivo).

2.4.1 Elementos del pensamiento y lenguaje variacional.

Investigadores como Caballero y Cantoral (2013), González (1999) y Salinas (2003) definen algunos conceptos relativos a elementos del pensamiento variacional, su interrelación, articulación y desarrollo. Estos autores sostienen que para generar el desarrollo del pensamiento variacional, es necesario el uso de los elementos que lo conforman (Ver figura 2).

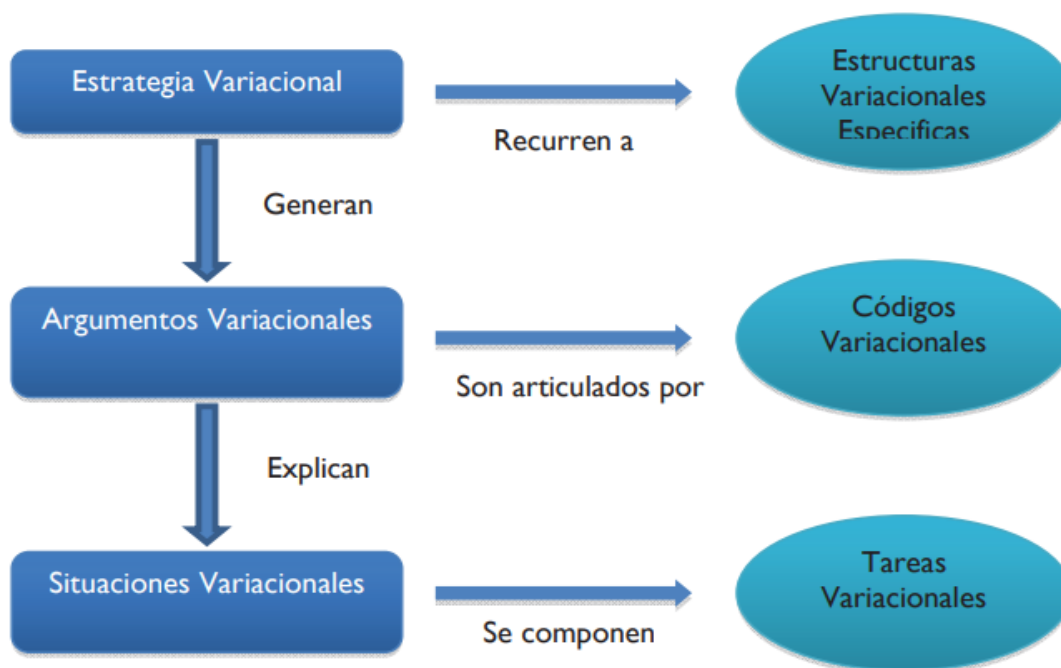


Figura 2 Modelo de interacción de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional

Fuente: Tomado de Caballero y Cantoral (2013:1024)

De acuerdo a la Figura anterior y siguiendo el trabajo de estos autores Caballero y Cantoral (2013), González (1999) y Salinas (2003), se estableció una caracterización de elementos del pensamiento y lenguaje variacional los cuales se resumen y describen de la siguiente manera:

Situación Variacional es un conjunto de problemas donde corresponden a experimentos planteados, los cuales demandan de estrategias variacionales y que, además, requieren cuantificar el cambio, conocer cómo y cuánto cambian las variables. No obstante se considera una situación no variacional si se resuelve empleando un proceso algorítmico que lleve a una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables.

Argumentos Variacionales son explicaciones que proporcionan los estudiantes para analizar el cambio y su cuantificación y las expresan mediante distintos procedimientos que

reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005).

Códigos Variacionales son modos de expresar el cambio y la variación, pueden consistir en frases, dibujos, tablas entre otros, y que son articulados para generar los argumentos variacionales y que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

Estructura Variacional Específica se compone de herramientas, procesos y procedimientos en el ámbito matemático y científico que funcionan como punto de apoyo abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en las situaciones variacionales. El uso de estos conocimientos en la situación permite a la persona tener un referente sobre el cual llevar a cabo el estudio de la variación del fenómeno.

Estrategia Variacional es una forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional, y generar argumentos variacionales que explican la situación. Entre las estrategias variacionales caracterizada figuran comparación, seriación, estimación, y predicción. Entre las estrategias variacionales reportadas por Caballero y Cantoral (2013) son:

Comparación está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno antes y otro después, o dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y variaciones en esos estados. Por ejemplo varios términos utilizados en el uso de esta estrategia son: “está más arriba que”, “es más pequeño que”, “está por debajo de”, “es más grande que”, entre otros.

Seriación está relacionada con la comparación, ya que está asociado con la acción de analizar estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos. pero se diferencia en que se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables.

Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. Por ejemplo dada una serie o secuencia de números, se pregunta por el número que corresponde a una posición posterior, e incluso una anterior. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado.

Estimación es a partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción en donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, se usa en el análisis del crecimiento de poblaciones para saber si crecerá o disminuirá, en tanto que la Predicción puede servir para decir hasta qué punto crecerá.

Tareas Variacionales son actividades, acciones y ejecuciones al interior de una situación variacional que que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los contextos en que se desarrollan. Entre las tareas variacionales que Caballero y Cantoral (2013) hacen referencia están: tabulación como variación numérica, análisis de datos en tablas numéricas,

construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, análisis gráfico con la variación como punto de referencia.

2.4.2 Pensamiento variacional como razonamiento covariacional y sus acciones mentales.

Con base a investigaciones de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) quienes expresan en otras palabras, para referirse al pensamiento variacional y lo denominan “**razonamiento covariacional**”. En este sentido lo definen como una actividad cognitiva que toma en cuenta la coordinación del cambio entre dos variables, cuantificando lo que sucede en una variable, si la otra variable cambia. Los autores antes señalados realizaron una investigación con estudiantes universitarios en la asignatura de cálculo, y proponen cinco acciones mentales asociadas a ciertos niveles para determinar la covariación entre dos cantidades, atendiendo al grado de desarrollo iniciando desde un nivel básico hasta el superior.

Una descripción de las cinco acciones mentales de razonamiento covariacional asociados a los comportamientos se proporcionan en la Figura 3, la cual esta ligada a la perspectiva teórica que tanto Vasco, Cantoral y otros proponen respecto al pensamiento variacional. Es por ello que se hace mención de las acciones y actividades mentales con su respectiva descripción.

Acción mental	Descripción de las acciones mentales
Acción Mental 1 (AM1)	La coordinación de los valores de las variables, cuando hay cambio en una y en otra.
Acción Mental 2 (AM2)	La coordinación de la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable.
Acción Mental 3 (AM3)	La coordinación de la cuantificación del cambio en una y en la otra variable.
Acción Mental 4 (AM4)	La coordinación de covariaciones.
Acción Mental 5 (AM5)	La coordinación adecuada de la suma S_n de n términos en los valores del dominio de la sucesión.

Figura 3 Acciones mentales para determinar la covariación

Fuente: Adaptado de Carlson et. al (2002)

2.4.3 Desarrollo del pensamiento Variacional

El desarrollo del pensamiento variacional para Aguirre y Gil (2015) requiere de combinar la utilización del formalismo matemático con la comprensión de métodos matemáticos para cuantificar, describir y predecir cambios de procesos continuos contextualizados a las características tecnológicas de la sociedad. En Colombia, en los Estándares curriculares de Matemáticas MEN (2006:66) se describe el pensamiento variacional y su desarrollo en los siguientes términos:

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para el desarrollo, comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus

sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

La propuesta del MEN para el desarrollo del pensamiento variacional, afirma que para desarrollar este pensamiento se requiere iniciar con el análisis de regularidades (entendidas como unidades de repetición se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos en un orden fijado o de acuerdo a un patrón) y la búsqueda de un patrón de repetición, en donde dichas regularidades se evidencian por secuencias ordenadas que presentan los objetos, las formas o eventos, para finalmente ser modeladas por un procedimiento, un algoritmo o una fórmula (MEN, 2006:66), no obstante autores como Javier, Colombia, Evelyn y Enrique (2015) precisan que los procesos matemáticos que están inmersos dentro del proceso de resolver problemas con los cuales los estudiantes puedan, razonar, comunicar, modelar, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos, son necesarios para lograr caracterizarlos como habilidades inherentes al pensamiento variacional, inmersas en el uso de las tecnologías digitales.

Por otro lado autores como Posada, Obando, Munera y Villa (2006) proponen un esquema del desarrollo del pensamiento variacional que se ilustra a continuación en la figura 4.

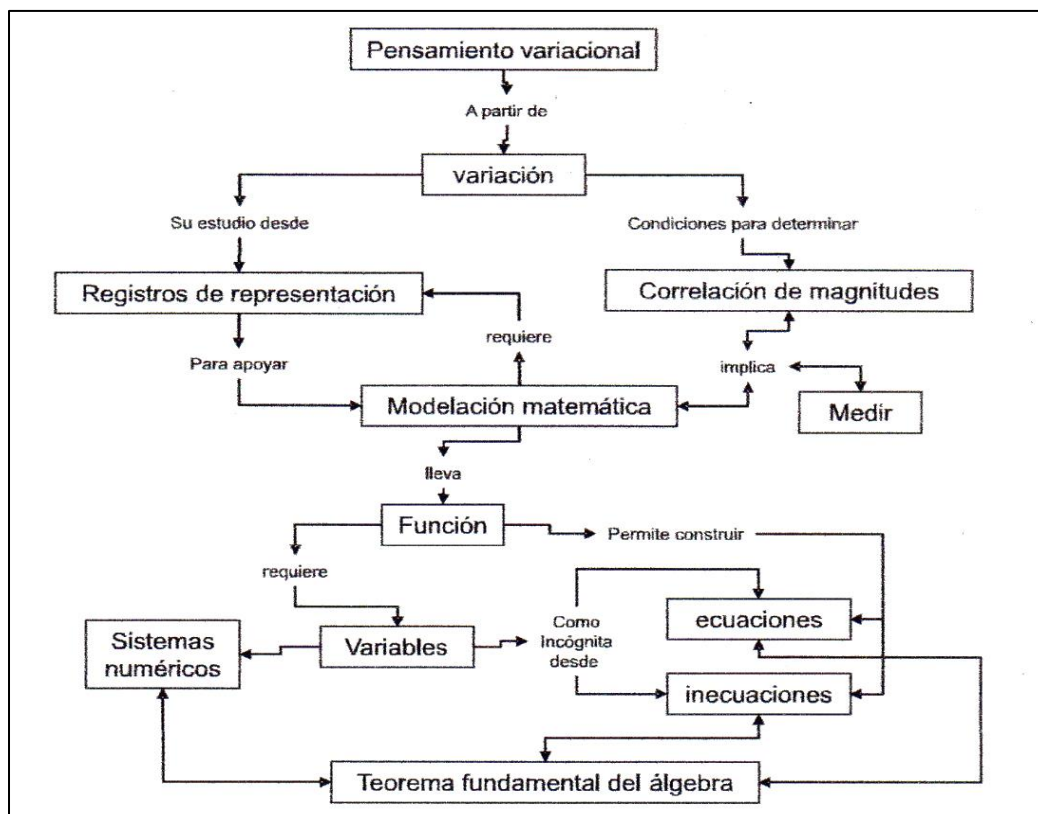


Figura 4 Propuesta para el desarrollo del pensamiento variacional

Fuente: Tomado de Posada, Obando, Munera y Villa (2006:18)

En el anterior esquema la variación se articula en función del teorema fundamental del álgebra en relación con el pensamiento numérico. Inicialmente un estudiante, ante una situación problema, transita su atención y considera una variable a la vez, y por lo tanto, su análisis de la situación es parcial. En segundo lugar, debe identificar las variables del problema, y su correlación. En tercer lugar, se caracteriza el uso de estrategias que se centren en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades y hacer relaciones de representaciones y sus registros. En cuarto lugar, se reconocen estructuras y relaciones que coordinan la variación de dos cantidades, y por último, se fundamenta en la comprensión de la relación de proporcionalidad como una razón que relaciona cualquier par de valores correspondientes a cada uno de las cantidades que se comparan.

2.4.4 Niveles del desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional se viene desarrollando desde al menos tres décadas. Este constructo se ha ido fortaleciendo en la medida que se ha contextualizado su proposito, sobre que es pensamiento variacional, los elemntos del pensamiento varacional, como se desarrolla este tipo de pensamiento y otro desafio en este momento es establecer niveles de desempeno que permita medir de manera cualitativa el avance que esta tendiendo un determinado individuo frente a esta situacion (Cantoral, 2013; Vasco, 2006; Moreno, Font y Juan, 2016; Arrieta Vera y Díaz Moreno, 2015; Mendoza, 2016).

A continuacion se muestra en la figura ilustrativa 5 los niveles del desempeño de los estudiantes en relación al desarrollo del pensamiento variacional que proponen Báez, Martínez y Pérez (2017:97) y que sirvan de referencia para el analisis en este trabajo de investigación.

<i>Nivel</i>	<i>Características</i>	<i>Criterios valorativos</i>
Reconocimiento (Nivel 1)	Como la expresión del nivel primario en el desarrollo del pensamiento variacional, donde se examinan de forma global la existencia y el significado de la variación en un fenómeno modelado matemáticamente y se distinguen los elementos en la variación.	Los estudiantes identifican y manipulan relaciones, patrones, transformaciones, procesos algebraicos y geométricos. Los estudiantes reconocen la existencia y el significado de la variación en un fenómeno modelado matemáticamente. Los estudiantes distinguen los elementos de la variación.
Relación (Nivel 2)	Es la expresión del nivel intermedio en el desarrollo del pensamiento variacional, donde dada una situación variacional, representada por un fenómeno modelado matemáticamente, y por los elementos que distinguen a la variación, se puedan establecer las relaciones entre dichos elementos expuestos en tablas, gráficas y otras formas de representación.	Los estudiantes establecen relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación, relacionan propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos informales. Los estudiantes comunican y reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático para argumentar la solución de problemas. Los estudiantes manipulan relaciones, transformaciones, procesos algebraicos y geométricos.
Deducción formal (Nivel 3)	Es el más alto indicio de desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante, el desempeño se concreta en la solución de actividades que modelan fenómenos ingenieriles.	Los estudiantes descubren nuevas relaciones y realizan clasificaciones inclusivas. Los estudiantes comunican y reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático para argumentar la solución de problemas. Los estudiantes comprenden las relaciones presentes en fenómenos ingenieriles y reconocen en ellos la existencia de relaciones variacionales y los objetos matemáticos que subyacen en dichas situaciones. Los estudiantes construyen nociones matemáticas en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería, a través del estudio de prácticas sociales que hacen emerger el conocimiento matemático.

Figura 5 Niveles del desempeño de los estudiantes en relación al desarrollo del pensamiento variacional

Fuente: Tomado de Báez, Martínez y Pérez (2017:97)

2.5 Visualización

Otro elemento considerado en este trabajo de investigación es la visualización matemática, puesto que es el medio pertinente para conectar lo ostensivo o perceptible con lo no ostensivo (imágenes mentales). La visualización como campo de investigación en educación matemática comienza a configurarse a partir de la década de los noventa hasta principios de

este siglo. De acuerdo con Crisólogo y Martínez (2015) la visualización es la asociación de imágenes-ideas que pueden ser internas (mentales) o externas (representaciones concretas: figuras, diagramas, gráficas, símbolos, etc.) en donde una imagen puede evocar o sugerir una idea; una idea puede exteriorizarse por medio del lenguaje y, a veces, por medio de una representación concreta.

Para Borba y Villarreal (2005) la visualización ha sido considerada como una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y en Educación Matemática. Basados en una amplia revisión de la literatura, estos investigadores presentan dos niveles en los que puede considerarse la visualización: el primero asociado a su uso en la prueba matemática formal, y otro, relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes.

Según Castellanos (2010), se debe hacer una diferenciación entre ver y visualizar, de tal forma que el ver se reduce a una capacidad fisiológica, mientras que la visualización es un proceso cognoscitivo, propio del ser humano, que está vinculado con la cultura del sujeto: historia, ideología, tradiciones, costumbres, valores, etc. Por su parte, Mejía (2007:16) afirma que:

Con la visualización en matemáticas se pretende múltiples tareas. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.

Es evidente entonces, que la visualización está relacionada estrechamente con la deducción que se pueda tener al momento de interpretar una figura, de igual forma se relaciona con la representación que se pueda hacer de lo que se observa e interpreta. Nuevamente Crisólogo y Martínez (2015:212) destaca que:

La visualización no es una “visión” inmediata de las relaciones contenidas en la representación, sino que es un proceso que culmina con la asociación imágenes ideas, que puede ocurrir luego de una interpretación de lo que se nos presenta en la contemplación; y que sólo podremos realizar eficazmente, si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. No cualquiera puede leer una radiografía y emitir un diagnóstico cercano a la realidad.

Es así que la visualización es como una primera instancia de comprensión de diferentes situaciones vinculadas con la variación, como un medio para el desarrollo y la potenciación de habilidades visuales y de otros sentidos. Con base a los expertos antes mencionados, en este estudio se hará uso del término visualización en el sentido de representaciones geométricas que ponga de manifiesto la representación de un determinado objeto y operaciones sobre este.

2.6 Registros de representación

En el aprendizaje de la matemática diversos enfoques teóricos describen el papel de los sistemas de representación en acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales, considerando que los cambios entre los sistemas de representación de los objetos matemáticos pueden facilitar la eventualidad de dichos objetos en los estudiantes (Contreras y Font, 2002). La formación del pensamiento, particularmente en matemática, está junto al

desarrollo de simbolismos específicos para representar a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos.

No obstante investigaciones de carácter cognitivo tales como Hitt (2001); D'Amore (2009); Duval (2006); enfatizan que en un contexto de objetos matemáticos se requiere que estos se visibilicen en algún sentido. En el pensamiento variacional Vasco (2003) se refiere a los modelos mentales, Mendoza (2016) habla de modelos ostensibles (manifestada en algún tipo de soporte material) y no ostensibles secuencias de (imágenes mentales), y señala que pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes tipos de representaciones, interpretarlas y poder analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación, si se modifica una condición particular. Dada la importancia del constructo representaciones se enfatiza la perspectiva teórica de Duval ya que este investigador es uno de los referentes de la construcción de diferentes objetos matemáticos.

Duval (2006) afirma que no existe conocimiento sin algún tipo de representación mediante los sistemas mentales, las cuales cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto. Todo objeto matemático necesita de representaciones, ya que no se dispone de cosas u objetos netamente físicos para ilustrar en su lugar una actividad sobre los objetos matemáticos. Según Duval (1999), los sistemas mentales se afinan y se convierten en representaciones mentales, los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números. En matemática las representaciones semióticas son importantes, tanto para los objetivos de comunicación, como para el desarrollo de la actividad matemática.

Respecto a las representaciones semióticas Duval (1999:14) señala que:

Son producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen distintos tipos de registros de representaciones semióticas, por ejemplo: registro de la lengua natural, registro gráfico, registro figural y registro algebraico.

Es así que Duval (2004a:26) sostiene que “no hay otro medio de acceso a los objetos matemáticos que las representaciones semióticas”.

2.6.1 Transformaciones tipo tratamiento y conversión

Para Duval (2004a) se distinguen dos tipos de transformaciones de una representación semiótica: el tratamiento, que es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro; la cual es una transformación estrictamente interna a un registro, y la conversión: que es una transformación de la representación de un objeto en un registro en otra representación del mismo objeto en otro registro. No obstante, la articulación de los registros de representación semiótica a este estudio constituye un enlace fundamental para conocer los procesos de comprensión de este concepto. Desde la teoría de las representaciones semióticas expuesta principalmente por Duval (2004a); Hitt (1998b:20) plantea que “la comprensión de un contenido está basada en la armonización de al menos dos registros de representación, y esta armonización queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva”.

Por ello, Duval considera que las tareas de conversión representan ser fundamentales para la comprensión de conceptos. De lo anterior se presenta un ejemplo sencillo para ilustrar estos dos tipos de transformaciones.

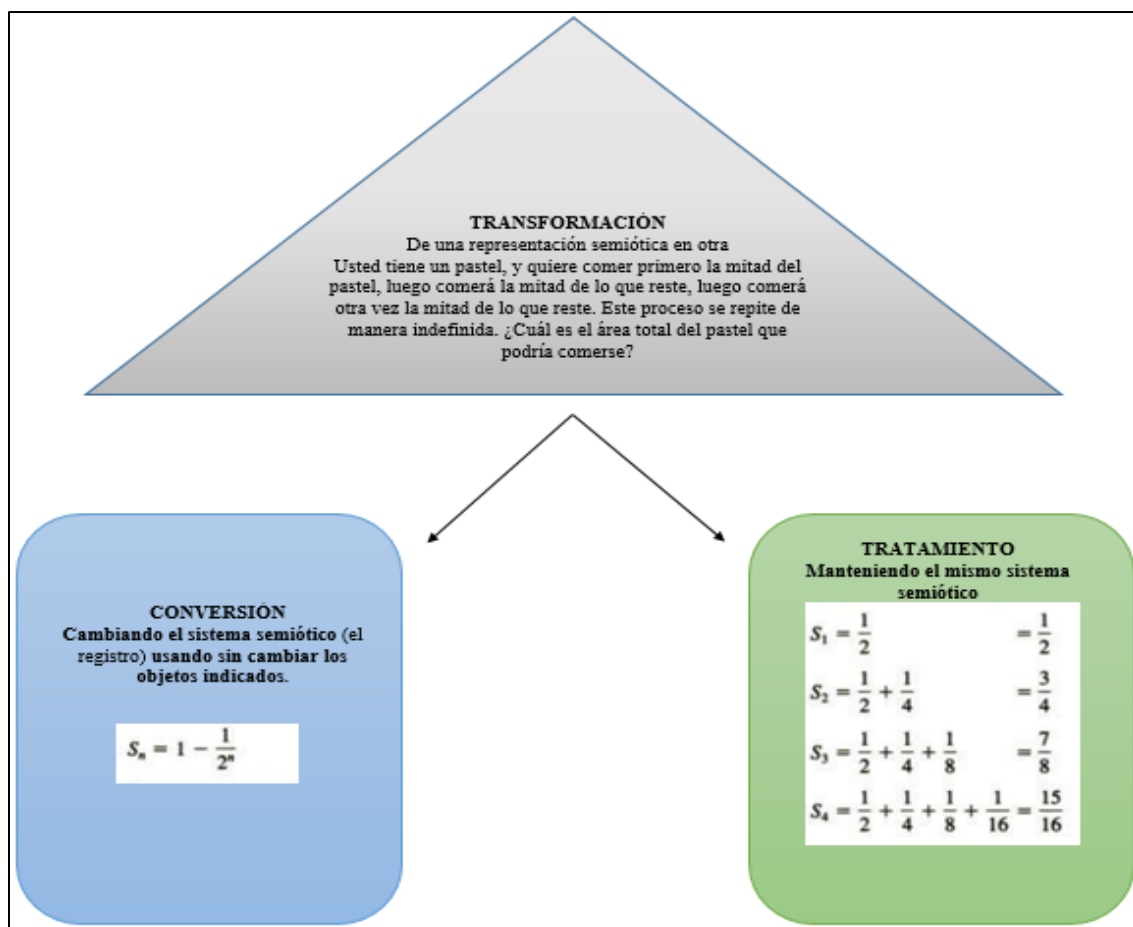


Figura 6 Ejemplo de transformación tipo tratamiento y tipo conversión

Fuente: Elaboración propia

De la figura anterior, en el lado izquierdo se vislumbra que hubo un cambio de registro al hacer un tránsito del lenguaje verbal al lenguaje algebraico. Es así que se dio la transformación tipo conversión, y al lado derecho se evidencia una secuencia de varias transformaciones tipo tratamiento porque se operó en el mismo registro.

2.6.2 Registros de representación del objeto matemático serie geométrica

La importancia de reconocer totalmente el conjunto de registros, específicamente en el objeto matemático de las series geométricas para utilizarse durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, reside en que se pueda admitir la aprehensión de conocimientos. De lo anterior, Duval (1999:63) afirma que “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la espontaneidad de las actividades de conversión”.

Por otro lado, Duval (1999) señala que la conceptualización en matemáticas implica una armonización de registros de representación, de los cuales la comprensión de un objeto matemático se reclina en la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica, esto es, todo el funcionamiento cognitivo o los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto (noesis) está determinado por los sistemas de representación semiótica (semiosis), es decir no hay noesis sin semiosis. En cuanto a la conceptualización y construcción de conceptos en matemáticas, autores como D'Amore (2009) afirma que lo antes mencionado está articulado con la habilidad de manejar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos como ser la de convertir representaciones de un registro dado a otro, tratar tales representaciones al interior de un mismo registro y de representarlos en un registro dado.

De los planteamientos anteriores se evidencia que el proceso de conversión de registros de representación semiótica según Duval (1999), garantiza la aprehensión conceptual en matemática. De manera articulada la visualización permite la realización de análisis cualitativos de contenidos más profundos, y además, el uso de secuencias didácticas o sesiones de trabajo permite dar evidencias descriptivas de los esquemas mentales que

moviliza la persona para la apropiación de dicho concepto. De acuerdo a lo anterior el concepto de series geométricas puede representarse en diferentes registros, con su respectivo tratamiento y conversión los que se describen a continuación:

Simbólico: “En este registro, se emplean sistemas de notación simbólica ajustada al lenguaje matemático” (García, 2018:40). Su tratamiento es (deducir definiciones, demostrar expresiones simbólicas), y su conversión es (explicar el significado de expresiones).

Registro algebraico: “El registro algebraico aprueba la realización de modelizaciones, generalizaciones y señalar características particulares de las progresiones” (García, 2018:40). Su tratamiento es (cálculo del valor de un parámetro desconocido de la progresión conociendo los demás, por reemplazo de variables y procesos Aritméticos, identificación de los parámetros de las Fórmula), y su conversión es (cálculo de elementos de una progresión a partir de otros parámetros).

Numérico: García (2018:41) explica que este tipo de registro representacional:

Permite considerar algunas de las tipologías y parámetros identificados de las progresiones, de igual manera acepta relacionarlos y vincularlos con representaciones gráficas y geométricas. Otro rasgo de este registro, es que admite efectuar operaciones de cálculo y emplear propiedades como la distributiva, conmutativa, etc. necesarias para la resolución de diversos problemas.

Su tratamiento es (identificación de una sucesión y cálculo de su término, así como encontrar el término que falta de una sucesión), y su conversión es (obtención del término general de una progresión).

Verbal - registro de la lengua natural: “Permite introducir definiciones, del mismo modo caracterizar, describir o designar aspectos asociados a otros registros” (García, 2018:41). Su tratamiento es (descripción del proceso a seguir y explicar lo expresado en un texto), y su conversión es (resolver situaciones problemas utilizando otros registros diferentes al verbal).

Geométrico: “Este tipo de registro tolera operaciones de manipulación y reconfiguración, que proporcionan la comprensión y la instauración de vínculos entre las progresiones” (García, 2018:41). Su tratamiento es (analizar figuras, probar, construir, así como observar una figura, o de describir su construcción), y su conversión es (representar en tablas las dimensiones de una figura, describir la variación con que crece o decrece el cuerpo geométrico, hallar fórmulas que describa lo representado por la sucesión de figuras).

A continuación en la figura 7 se muestra la relación de las representaciones internas (mentales), las que solamente el estudiante tiene acceso y las representaciones externas que son utilizadas para poder comunicar las representaciones internas.

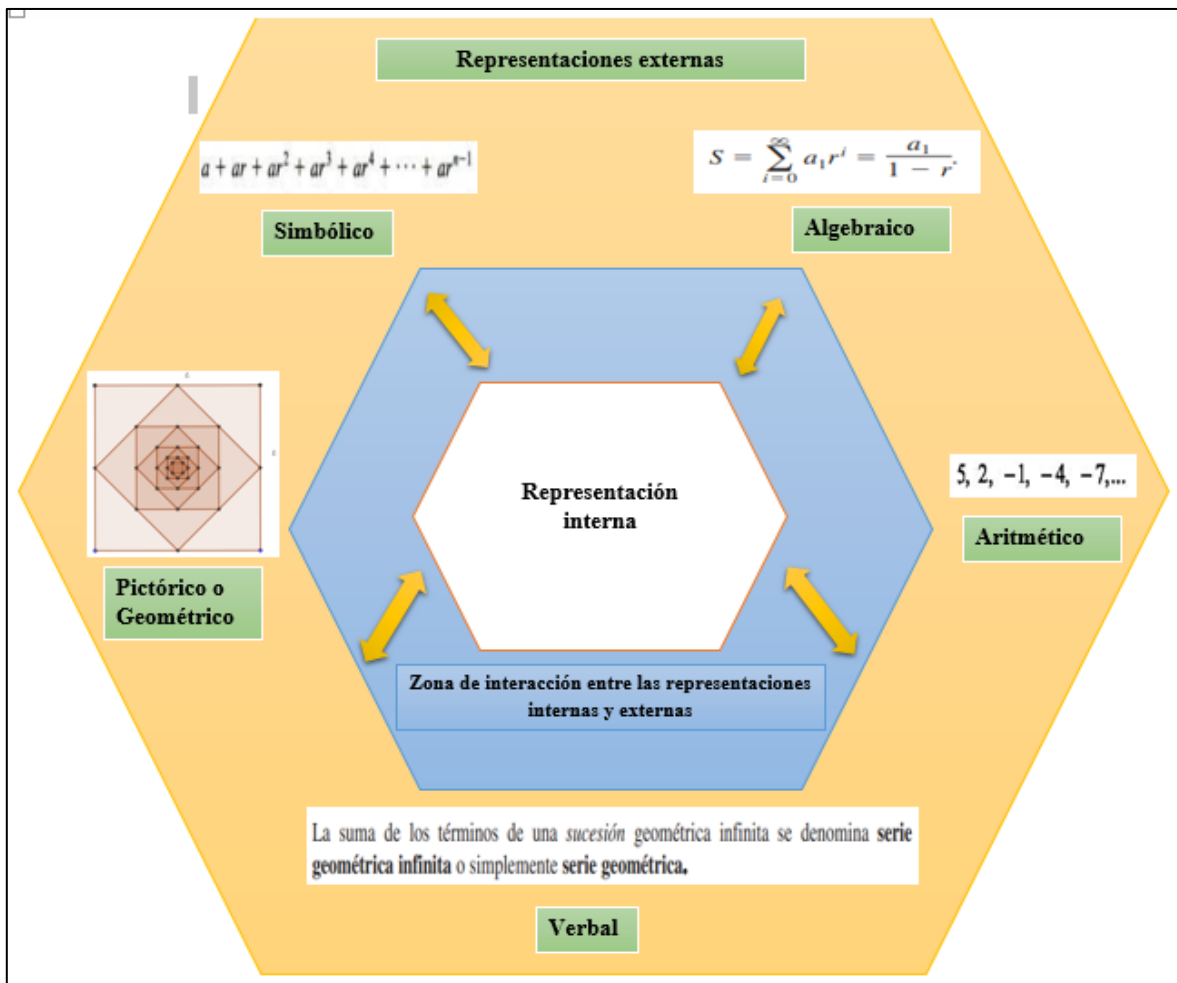


Figura 7 Ejemplo relación entre las representaciones internas, y representaciones semióticas en el concepto de serie geométrica

Fuente: Elaboración propia, adaptado de Duval (1999)

2.7 El uso de la tecnología en matemáticas

En los últimos años, el desarrollo que han alcanzado las Tecnologías de la Información Comunicación demanda al sistema educacional una actualización en las prácticas y contenidos de acorde a la nueva sociedad de la información (UNESCO, 2013). Desde hace varios años, con el incremento de uso de nuevas tecnologías aplicadas a la educación, la enseñanza está teniendo una transformación en la forma de abordar las metodologías de aprendizaje y la utilización de recursos gráficos e interactivos. No obstante, la tecnología está

dando grandes bondades y ha sido uno de los medios que ha ayudado mucho al desarrollo de las sociedades, una de ellas es que se puede trabajar con ella desde cualquier lugar del mundo.

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observaciones en otros ambientes, ya que el papel que las tecnologías puede tener en la educación matemática es el de ser un medio para que de estos surja conocimiento (Alemán, 2009). En este orden de ideas se puede citar a Rivera (2009:25), el cual afirma que:

Con el desarrollo evolutivo de la tecnología, se han desarrollado software de matemáticas con elementos didácticos significativos que promueven el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, los estudiantes a través de su interacción con un software matemático puede obtener un aprendizaje significativo de temas que han representado para ellos dificultades cognitivas con el uso únicamente de lápiz y papel.

Gamboa (2007) señala que la tecnología debe ser utilizada en la educación matemática, y que ésta debe ser usada para hacer hincapié al uso del conocimiento matemático. Se exige que sea el propio docente de matemáticas quien introduzca conceptos matemáticos apoyándose en el uso de la computadora, donde el reto está en diseñar actividades con el potencial necesario para trazar nuevos caminos de aprendizaje. El punto medular está en trabajar con los estudiantes los sucesos cotidianos y los problemas que se proponen en los libros de texto desde un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles en la actualidad.

La tecnología, según Alemán (2009) es crucial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; ya que influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de

aprendizaje de los estudiantes, la cual suministra información importante cuando se discuten planteamientos acerca de los objetos que se pueden mostrar en un computador y los efectos que tienen los diferentes trabajos dinámicos que estos permiten realizar. Es así que la tecnología avanza como en una herramienta de mucho provecho para el servicio de la educación matemática, en donde los estudiantes puedan darle sentido a la información y descubran todas las diferentes formas de resolución de un problema.

2.8 Software dinámico: Geogebra

Geogebra es un software de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo. Geogebra combina Computer Algebra Systems (CAS) y Dynamic Geometry System en un sistema fácil de usar. Es decir, combina las funciones de un software de geometría dinámica (DGS) con las características de un sistema de álgebra computacional (CAS). Por lo tanto, proporciona la vinculación de las matemáticas con el álgebra, la geometría y el cálculo al incluir tanto la geometría dinámica como las herramientas de álgebra computacional (Hohenwarter y Preiner, 2007).

El asistente matemático Geogebra integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y cálculo en un ambiente dinámico potenciando, entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional (Ruiz, Ávila y Villa, 2013). Actualmente algunos estudios de los autores antes citados evidencian que Geogebra puede asumirse como una herramienta dinámica - didáctica que proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos o procedimientos matemáticos dando aportes significativos al desarrollo del pensamiento variacional. Ruiz et al. (2013:447) afirman que:

El pensamiento variacional hace énfasis en la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más “variables” y relaciones entre ellas, patrones existentes en secuencias, así como el manejo y creación de funciones como representaciones de situaciones de variación. En este sentido Geogebra al recrear ambientes dinámicos, permite a los usuarios la visualización y representación de relaciones de covariación.

Por otro lado, existen varios programas de geometría dinámica, con diferencias sustanciales de funcionalidad, calidad gráfica y precisión matemática. Entre ellos, está Geogebra como medio geométrico dinámico, donde sus principales características son que a diferencia de un entorno de lápiz y papel este programa permite el dinamismo. De igual manera la práctica extensiva del lugar geométrico permite visualizar y descubrir hechos geométricos (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, 2004).

Como se mencionó anteriormente aunque existen varios programas de geometría dinámica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se decidió utilizar al Geogebra classic 5, por las bondades que brinda el mismo, ya que es un software de carácter abierto y gratuito el cual proporciona herramientas que propician el trabajo con una geometría dinámica, superando las limitaciones de utilizar tan solo lápiz y papel, donde los estudiantes pueden personalizar sus propias creaciones a través de la adaptación de la interfaz (por ejemplo, tamaño de la fuente, el idioma, la calidad de los gráficos, color, coordenadas, grosor de línea, estilo de línea y otras características).

Además brinda una versatilidad muy interesante en la accesibilidad, ya sea en lo que respecta a los dispositivos electrónicos como para el usuario, desde un nivel de principiante hasta avanzado. También alienta proyectos de estudiantes en matemáticas, múltiples

presentaciones y aprendizaje por descubrimiento experimental y guiados (Avecilla, Cárdenas, Barahona y Ponce, 2015).

En la web de GeoGebra <https://www.geogebra.org/> se pueden visualizar distintas opciones, como se muestra en la Figura 8.



Figura 8 Captura de pantalla del sitio Web Geogebra

Se puede entrar a la versión online (Geogebra Clásicc) o descargarlo tanto en su versión clásica, que incluye la posibilidad de graficar en 3D. Así mismo el software es compatible con variadas plataformas, por lo que puede utilizarse en diversos dispositivos.

Por otro lado, Geogebra en su interfaz muestra una vista gráfica, algebraica Cálculo simbólico, que están complementadas con varias herramientas, como se muestra en la figura 9.

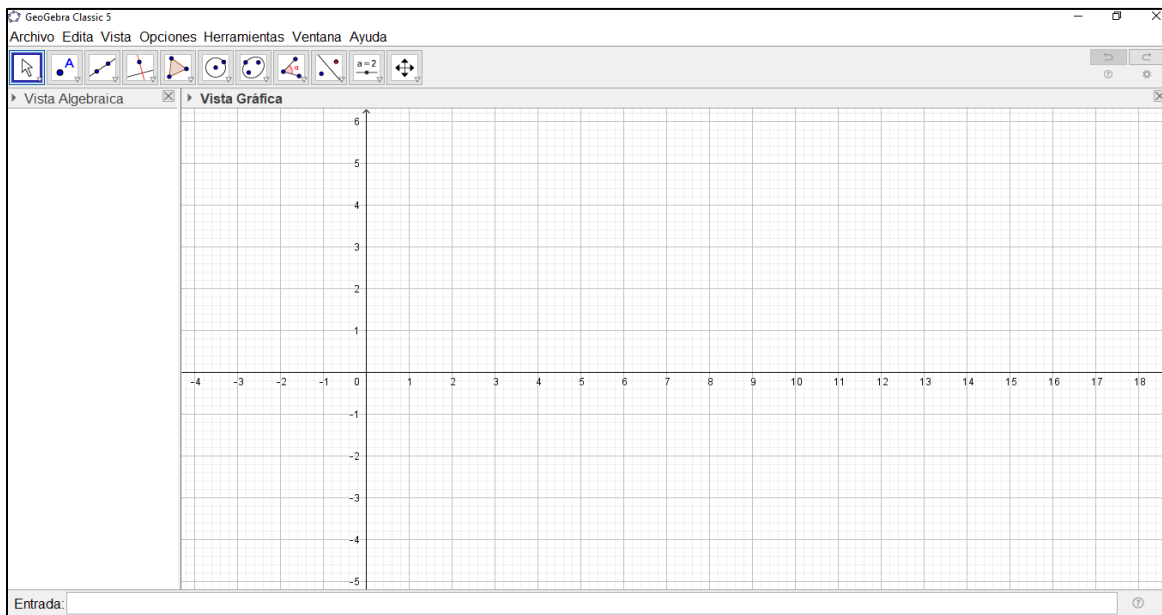


Figura 9 Interfaz gráfica de la herramienta Geogebra classic 5

No obstante al utilizar y combinar estas herramientas se puede construir el conocimiento a través de la elaboración de un algoritmo que se requiere que el estudiante comprenda, por ejemplo la construcción del trazo de la derivada con regla y compás, como se muestra en la figura 10.

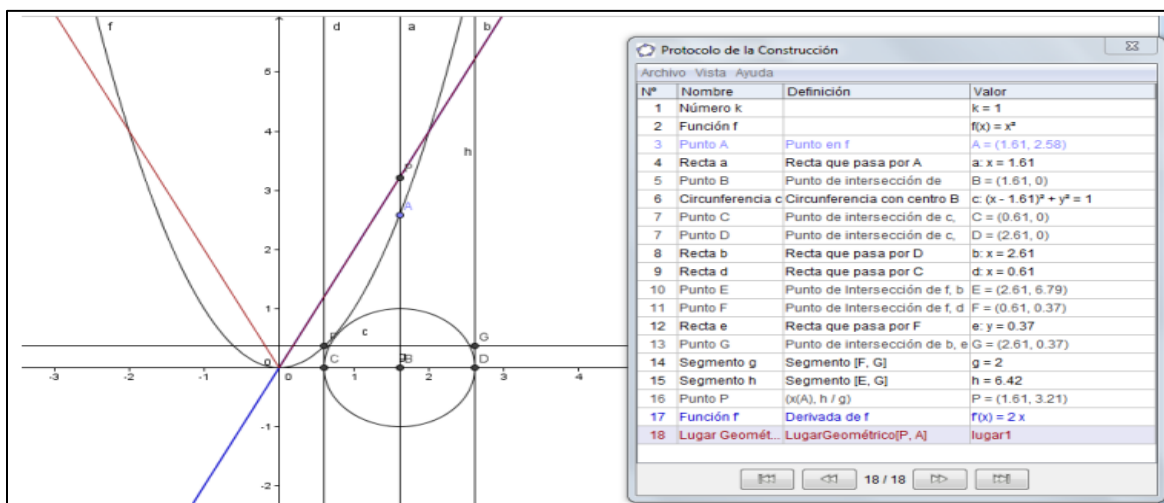


Figura 10 Ejemplo de construcción y protocolo de construcción de un posible trazo de la derivada con regla y compás

Fuente: Tomado de Villa y Ruiz (2010).

Observe que se ha implementado en la interfaz la traza construida (lugar geométrico) de la función tasa de variación, y la derivada coincidía en todos sus puntos sin importar el radio de la circunferencia construida. Este resultado sugería una construcción con regla y compás para la derivada de una función lineal y cuadrática.

Es así que Geogebra es un software que tiene una colección de objetos matemáticos básicos, y un lenguaje de programación con una interfaz accesible, que permite obtener resultados predecibles al relacionar y operar objetos, así como realizar construcciones de geometría, tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, etc., las cuáles pueden modificarse dinámicamente.

2.8.1 Geogebra como herramienta para desarrollar pensamiento matemático variacional

En el salón de clases se hace necesario propiciar espacios para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a lo dinámico entre los conceptos matemáticos haciendo uso de la tecnología.

Vasco (2006) es uno de los autores que ha trabajado en la articulación del pensamiento variacional y el uso de Geogebra para potenciar y desarrollar este pensamiento. En algunos de sus artículos sugiere elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones de éste con la tecnología. Vasco afirma que el estudio de fenómenos asociados a la comprensión, representación y caracterización de la variación produce una parte fundamental del “pensamiento dinámico”. Por tanto en el desarrollo del pensamiento variacional se debe implicar procesos de trabajos con tecnología, donde los estudiantes puedan, visualizar, generalizar y abstraer relaciones y propiedades de los objetos matemáticos que se aborden.

Para autores como Villa y Ruiz (2010), Geogebra ayuda al desarrollo del pensamiento variacional a través de la visualización, si se involucran procesos de experimentación a partir de los cuales, tanto estudiantes como investigadores, visualicen, generalicen y abstraigan relaciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados. Así mismo Vasco (2003) menciona que el pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras con ayuda de software dinámico ya que si se acentúan los movimientos, las transformaciones y los cambios, no las figuras estáticas y sus nombres y propiedades y se fija la atención en las variaciones implícitas, ese es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, por ejemplo, si se atiende a la variación del área de un triángulo en posición normal con el cambio del largo de la base, con el cambio de altura, con el cambio de la posición del vértice a lo largo de una paralela a la base mientras se mantiene el vértice fijo. Eso es muy distinto a decir que el área de un triángulo es la base por la altura sobre dos.

Igualmente se desarrolla con reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares, y es aquí donde es poderosa la pantalla del computador, así como con el estudio de las series, funciones exponenciales, logarítmicas y logísticas. Aquí también es clave el uso de la tecnología electrónica, para utilizar los potentes menús en las cuales se ve más claramente a dónde van los puntos o números del dominio en la representación cartesiana. Así mismo desarrolla diferenciando entre magnitudes, cantidades de las magnitudes, medición numérica de esas cantidades, ordenación de las mismas (Vasco, 2003).

2.9 Enfoque Ontosemiótico como una herramienta de análisis didáctico en matemática.

Para deliberar respecto de las producciones estudiantiles se presentan los elementos de un primer nivel de análisis que propone el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2000; Font, Godino y Gallardo, 2013), el cual fue iniciado por un grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada a principios de los años 90 siendo en la actualidad desarrollado y aplicado por otros grupos de investigación españoles y latinoamericanos (Sociedad Chilena de Educación Matemática, Sociedad Peruana de Educación matemática, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, entre otros). El EOS ha surgido dentro de la matemática educativa, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje (Gordillo, 2015).

Según Godino, Batanero y Font (2008) afirman que el EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Un primer nivel de análisis didáctico que es de interés en este trabajo atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas y objetos matemáticos previos o emergentes que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional, curricular, bibliográfica, u otra (Mendoza, 2016).

En consecuencia, se considera como práctica matemática “toda manifestación (lingüística o no) realizada por un individuo para resolver problemas y situaciones matemáticos, validar la

solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994:8). Como señalan Font, Godino y Gallardo (2013:104), “las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas”. Es así que en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, iconos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual (Gordillo, 2015).

No obstante, la configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas, y afirman que el reconocimiento de tales objetos y procesos permite, identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) relacionados tal como aparece en sus escritos (Godino et al., 2008). Además, en este primer nivel de análisis didáctico del EOS se proponen objetos y procedimientos primarios representados en la figura 11.

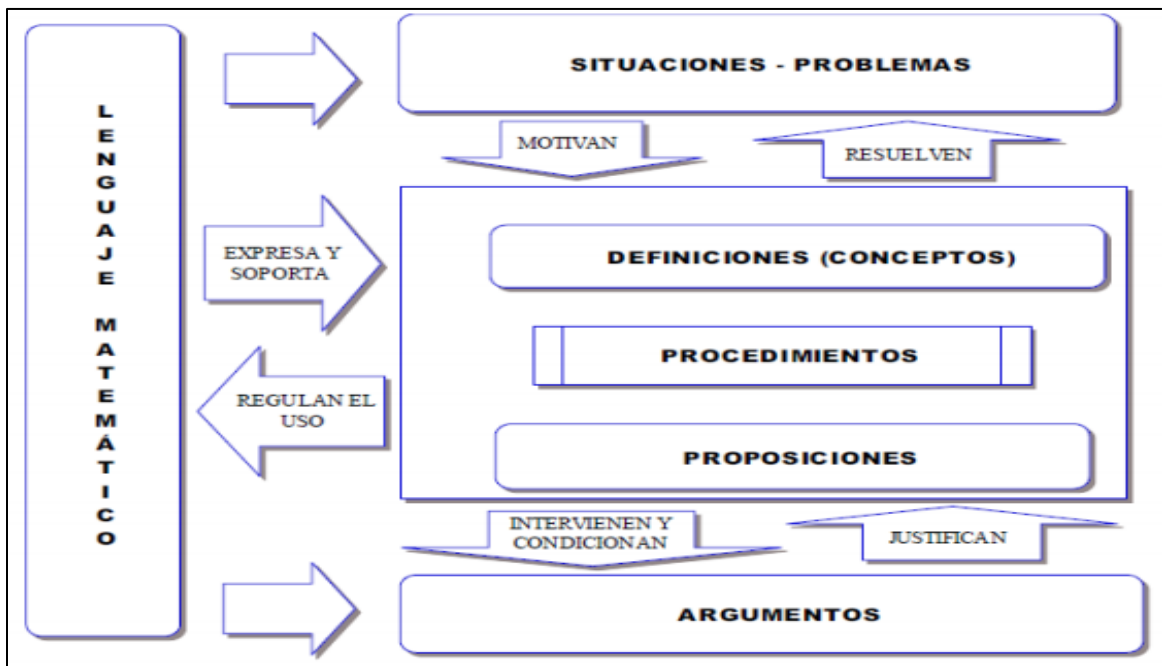


Figura 11 Configuración de objetos primarios

Tomado de: Godino et al., (2008)

Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios (Godino et al., 2008):

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
- Situaciones - problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...).
- Conceptos - definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos,...).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

Para Cabezas y Mendoza (2016) es relevante reflexionar respecto a cómo las prácticas matemáticas están influenciadas por la experiencia del individuo y como las comprende. Es así que estos autores proponen y definen los elementos del primer nivel de análisis didáctico del EOS.

Estos elementos están constituidos por el **Lenguaje**, que son términos utilizados, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros de representación; las **Situaciones/problemas** que son descripciones de la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y si la situación hace referencia a un problema (intra o extra) matemático; los **Conceptos/Definiciones** que son el empleo o acercamiento a una base de la teoría con el uso de axiomas, teoremas, propiedades, definiciones o descripciones: área, perímetro, patrón, Series, hexágonos); los **Procedimientos** que son el empleo de algoritmos, operaciones, técnicas; y los **Argumentos** que son el sustento teórico explicitado para validar o explicar sus proposiciones y procedimientos. A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales, teorías, etc.

Por tanto, es de interés en esta investigación desde, describir, caracterizar y categorizar situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, propiedades y argumentos que utilizan los estudiantes en producciones escritas, o en audio y videos tanto en una fase precedente como en una fase de proceso que puedan evidenciar elementos emergentes de los trabajos estudiantiles y manifestaciones de pensamiento variacional.

2.10 Articulación de los distintos elementos teóricos para la construcción de la serie geométrica.

Los distintos elementos del marco teórico se conjugan para la construcción del objeto matemático en estudio, es decir la construcción de la serie geométrica. Una serie geométrica es un objeto matemático que se puede visualizar desde una perspectiva variacional que el cambio y la variación está presente (Mendoza, 2013); por ejemplo se hace referencia a suma parcial $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n$, al agregar el termino o factor $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ a cada suma anterior. Este objeto matemático se visibiliza mediante palabras, signos o símbolos matemáticos y se podría asociar a una interpretación geométrica como por ejemplo fractales. Esas maneras de presentar ese objeto se les denomina registros de representación (Duval, 1999).

Un cuarto elemento importante para dar cuenta del desarrollo estudiantil y el diseño considerado en esta investigación es el enfoque ontosemiótico como una herramienta de análisis que va a visibilizar en alguna medida el lenguaje de los estudiantes con sus términos, expresiones, notaciones y gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual); también las situaciones problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios); los conceptos y definiciones, proposiciones, así como sus procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo), y sus argumentos.

Sobre el pensamiento variacional, Vasco (2006) alude que este pensamiento tiene una dinámica particular en su construcción el cual incluye: detección de lo constante, de lo que cambia y la cuantificación de cambio o la covariación. Para mostrar estos procesos se hace necesario procedimientos, símbolos, actividades cognitivas que visibilicen ese proceso, es decir que haya evidencia mediante registros y las operaciones a su interior (Duval, 2006). En

el pensamiento variacional existen diferentes medios que promueven su desarrollo. Uno de ellos es el tecnológico o asistido por computadoras. El software Geogebra por sus bondades, interfaces, presentación y dinamismo ofrece la posibilidad de potenciar el pensamiento variacional (Villa y Ruíz, 2010).

El proceso de construcción complejo que se alude en este trabajo de investigación, como lo es el objeto matemático de la serie geométrica debe analizarse desde diferentes aristas (lenguaje, situaciones/problemas, conceptos/definiciones, procedimientos, argumentos), y es aquí que el enfoque ontosemiótico adquiere en su primer nivel de análisis un valioso aporte. A continuación se presenta la figura 12 que describe los elementos antes mencionados.

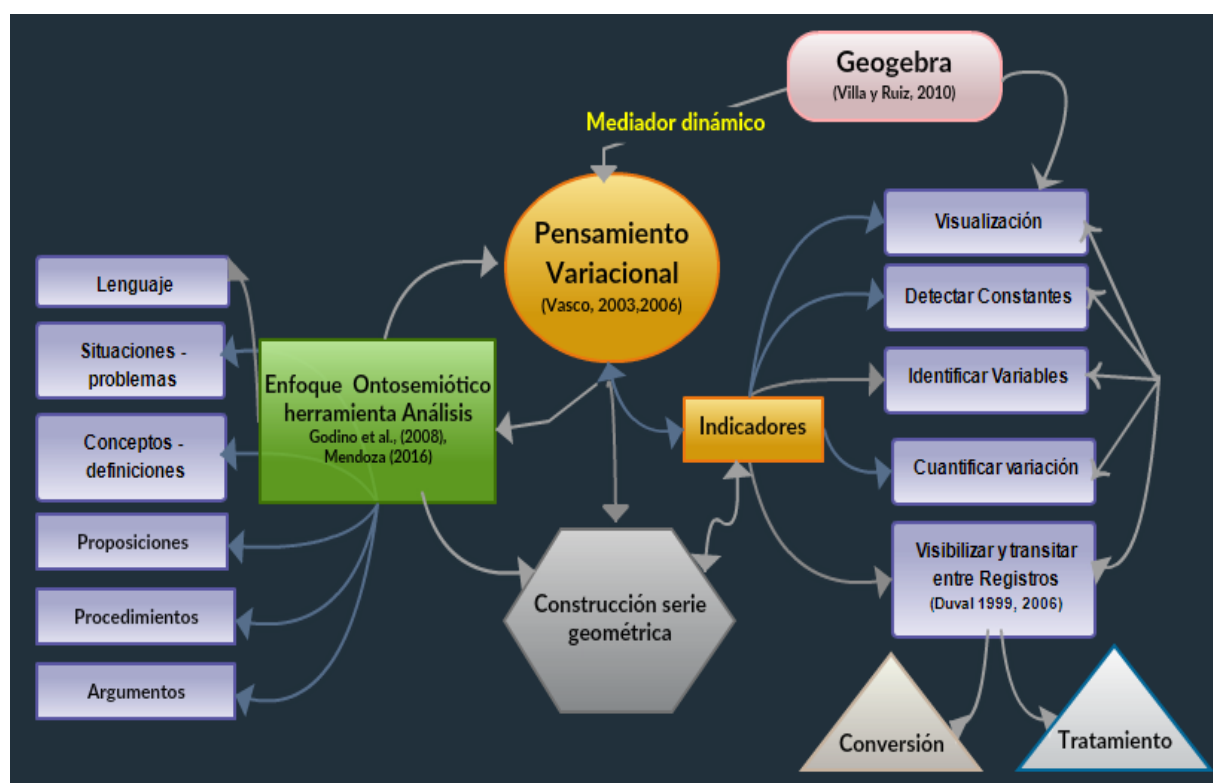


Figura 12 Articulación entre diferentes elementos teóricos que intervienen en la construcción de la serie geométrica

Fuente: Elaboración propia

3 Metodología de la investigación

En este capítulo se da a conocer el enfoque de investigación realizada, el diseño de la investigación, la población de estudio, la forma en que se establecieron los grupos de trabajo, los instrumentos aplicados para la recolección y análisis de los datos, así como la metodología utilizada en cada una de las etapas de la investigación.

3.1 Enfoque de la investigación

El enfoque de este estudio es cualitativo. El objetivo de este tipo de investigación es “describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2014:41). De igual manera, este enfoque se considera como un proceso activo y sistemático en el que se toman decisiones de acuerdo a la investigación y en el marco de educación a la comprensión de fenómenos educativos. En este sentido, el presente estudio está orientado a conocer, indagar y explorar en torno al rol de Geogebra classic 5 en la construcción de serie geométrica en un grupo de estudiantes de cálculo.

3.2 Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo descriptivo enmarcada en la Matemática Educativa. Hernández y Baptista (2010:364) definen que “la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto”. Por tanto, este enfoque se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar sus experiencias, perspectivas, opiniones,

significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad (Hernández y Baptista, 2010:364).

La investigación, en este tipo, permite observar qué características están presentes en el desarrollo del pensamiento variacional asociados al cambio y la variación. Se desarrolló durante el primer período comprendido entre los meses de enero a marzo del 2019. Para Gómez, el proceso investigativo proporcionará información en relación con las situaciones matemáticas (tareas direccionadas al desarrollo del pensamiento variacional en relación con el cambio y la variación), la selección de la población (Estudiantes), métodos de recolección de datos sistematización de la experiencia (análisis de datos), reflexiones de la práctica educativa (Gómez, 2015).

De igual manera, los objetivos de investigación enmarcan que el estudio debe tener un alcance descriptivo – interpretativo. Estos estudios buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Esto es recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos a las que se refieren (Hernández y Baptista, 2010).

3.3 Diseño de la investigación

El diseño de investigación es el “plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea” (Hernández y Baptista, 2010:120). El diseño de investigación fue fenomenológico ya que su propósito principal es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias. En este orden de ideas este estudio pretende analizar las producciones estudiantiles en las sesiones de trabajo desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva

construida colectivamente y así contextualizar dichas experiencias. Posteriormente se recolectaron los datos y se analizaron en un tiempo específico. En nuestro caso la investigación se desarrolló con estudiantes de un curso de Cálculo II de CEUTEC – UNITEC la Ceiba.

El plan de acción incluyó la prueba diagnóstica, sesiones de trabajo y evaluación final. Con respecto a las seis sesiones de trabajo, las actividades se fundamentaron y guiaron de acuerdo a las construcciones y producciones de la serie geométrica por parte de los estudiantes mediante el pensamiento variacional con apoyo del software Geogebra classic 5. Así mismo este se fundamentó en las discusiones internas de los equipos de trabajo, las plenarias a nivel del grupo y las mediaciones entre el profesor y los estudiantes. A continuación se presenta la figura 13, la cual describe el diseño fenomenológico desde una perspectiva operativa.

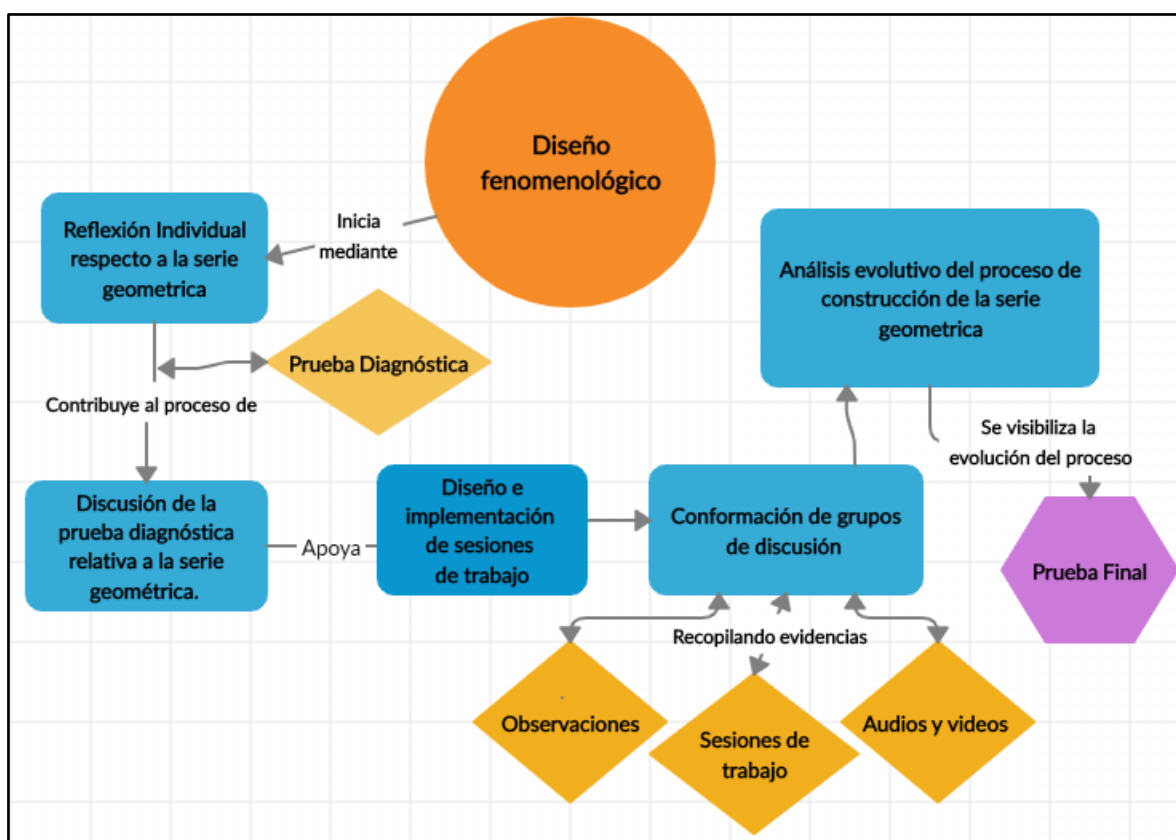
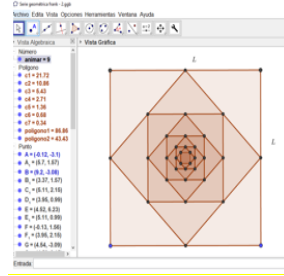


Figura 13:Diseño Fenomenológico desde una perspectiva operativa
Fuente: Elaboración propia, adaptado de Hernández y Baptista (2010)

3.4 Categoría de análisis

La matriz de categoría de análisis describe “el propósito de la investigación, los factores a tomar en cuenta, y las respuestas de investigación a responder” (Hernández y Baptista, 2010:120). A continuación se ha considerado categorías cualitativas las cuales son propias para las investigaciones de corte cualitativas. Es así que de acuerdo a la formulación del problema de investigación, formulación de preguntas y objetivos y en congruencia con el marco teórico y con el enfoque metodológico se consideraron las siguientes categorías de análisis que se presentan en la tabla 3.4.1.

Tabla 3.4. 1 Categoría de análisis

Categoría de análisis	Definición conceptual	Definición operacional	Indicadores	Ítems para evaluar indicadores
Pensamiento variacional	El pensamiento variacional es una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal	Capacidad para detectar constantes y variables, identificando cómo y cuánto cambian dichas variables.	Los estudiantes son capaces de identificar de manera adecuada el concepto de serie geométrica. Los estudiantes identifican variables, constantes. Los estudiantes identifican cuánto	 Con base a las construcciones preliminares realizadas se solicita: 1) Inicialmente ¿qué figura observas?, 2) ¿qué características

manera que Capacidad para varía, cuanto podrías señalar de esta covarién en transitar simplifica y hace figura?, 3) haga todos forma diferentes uso adecuado de los comentarios que semejante a los registros de distintos registros considere pertinentes patrones de representación, de representación, si la construcción de n covariación de en particular el de conversiones y figuras inscritas cantidades, de geométrico, el de tratamiento. podría realizarse de la misma o algebraico- manera indefinida. distintas analítico y el magnitudes, en verbal.

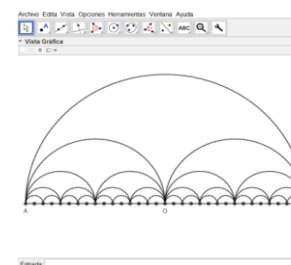
los

subprocesos

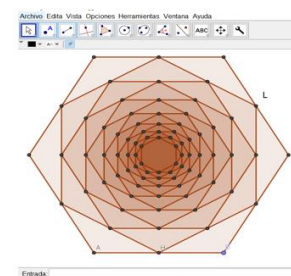
recortados de

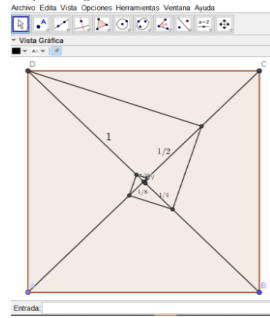
la realidad

(Vasco, 2006).



1) si la construcción es posible, ¿cómo es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita?. 2) comente de sus perímetros y sus posibles cambios y afirme respecto a sus áreas.



				1) haga un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas, 2) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las figuras construidas.
Construcción de series geométricas.	En la Capacidad de construcción identificar los patrones en la construcción de diferentes tipos de figuras tales como (cuadrados, circunferencias, semicircunferencias, triángulos, hexágonos, espirales).	Los estudiantes son capaces de identificar adecuadamente el patrón en que el área, perímetro, longitud cambia en cada figura.		Con base a las construcciones preliminares realizadas se solicita:
	descubra los conceptos, interprete y los resuelva tomando en cuenta la Capacidad de perspectiva utilizar las diferentes estrategias de resolución (Pérez, 2012).	Los estudiantes son capaces de sumar las áreas, perímetros y longitudes de las infinitas figuras construidas.	1) si la construcción es posible, cómo es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima segmento de la espiral, 2) se podrá continuar con la construcción de cada una de las espirales de	

sumar series estrategias de manera indefinida, 3) geométricas. resolución para muestre las relaciones lograr sumar series encontradas entre las geométricas. longitudes y elementos antes mencionados de las figuras construidas.



PROYECTO DE INVESTIGACION
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE HONDURAS - (UNITEC)



V periodo Académico 2018

Prueba Final

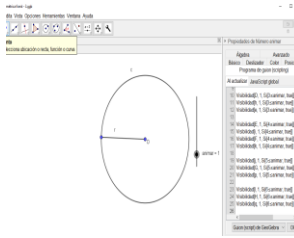
Nombre: _____ Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el profesor investigador, Hugo Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Hernández Valencia.

Indicaciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal, considerando que los errores son parte importante en este proceso. Por favor no borrar nada y entregue su trabajo al final de la clase.

1. Recuerde el instrumento #1 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los cuadrados construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos de los cuadrados construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

Con base a las construcciones preliminares realizadas se solicita: Recuerda el instrumento #1,#2,#3 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de las figuras construidos?, ¿Puedes sumar las áreas de todos de los

				cuadrados, círculos y semicírculos, construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?
Uso de Geogebra en la construcción de series geométricas	Recurso y herramienta manipulativa digital que permite ayuda al diseño de tareas matemáticas que desafían las capacidades de los estudiantes los cuales serían difíciles de lograr sin dicho recurso (Lupiañez, 2009).	Capacidad para recurrir a la visualización en el sentido de descomposición de figuras geométricas en otras menores en el proceso de solución de la propuesta planteada haciendo uso de Geogebra. Capacidad de manipular de manera adecuada el software Geogebra para la construcción de diferentes tipos de figuras geométricas.	Los estudiantes son capaces de visualizar de manera adecuada la descomposición de figuras geométricas en otras menores en el proceso de solución de la propuesta planteada haciendo uso de Geogebra. Los estudiantes son capaces de hacer uso de manera adecuada el software Geogebra para la construcción de diferentes tipos de figuras geométricas.	 Construya, visualice y analice las circunferencias concéntricas de radio r estableciendo relaciones entre sus elementos y magnitudes.

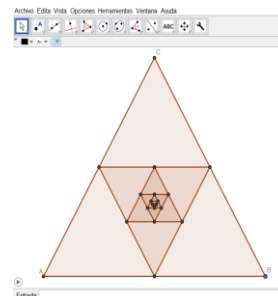
**Enfoque
Ontosemiótico
o como
herramienta
de análisis.**

EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática (Godino et al., 2008).

Capacidad para utilizar, expresiones, notaciones y gráficos en sus diversos registros de representación. Capacidad para describir la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y situaciones que hacen referencia a un problema (intra o extra) matemático. Capacidad para emplear bases de la teoría con el uso de axiomas, teoremas, propiedades, definiciones o descripciones: área, perímetro, patrón, Series.

Los estudiantes son capaces de hacer uso del lenguaje, para utilizar, expresiones, notaciones y gráficos en sus diversos registros de representación. Los estudiantes son capaces de hacer uso de situaciones/problemas que son descripciones de la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y si la situación hace referencia a un problema (intra o extra) matemático. Los estudiantes son capaces de hacer uso de conceptos/Definiciones que son el empleo o acercamiento a una base de la teoría con el uso de axiomas,

Sesiones de trabajo 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Prueba Final.

PROYECTO DE INVESTIGACION
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZAN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE HONDURAS - (UNITEC)

V periodo Académico 2008

Prueba Final

Nombre _____ Fecha _____

Estimado estudiante, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyo resultado será parte del contenido de la tesis de maestría en Educación Matemática, que está realizando el profesor Manuel A. Amigó Olvera, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marcos A. Hernández Valencia.

Indicaciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sabe o le interesa investigar y plantee, considerando que los errores son parte importante en este proceso. Por favor no tome nada y entregue su trabajo al final de la clase.

1. Recorte el instrumento A1, donde calcula y contesta que efectivamente la construcción se puede hacer de manera infinita. ¿Puede ser de color? ¿Puede ser de color uno de los cuadrados construidos? ¿Puede ser de color los áreas de todos de los cuadrados construidos? ¿A cuánto equivale y es igual este valor?

Capacidad de emplear algoritmos, operaciones, técnicas.	de teoremas, propiedades, definiciones o descripciones: área, perímetro, patrón, Series).
Capacidad para sustentar teóricamente y validar o explicar las proposiciones y procedimientos	Los estudiantes son capaces de utilizar procedimientos que son el empleo de algoritmos, operaciones, técnicas. Los estudiantes son capaces de hacer uso de argumentos que son el sustento teórico explicitado para validar o explicar sus proposiciones y procedimientos.

Fuente: Elaboración propia

3.5 Fuentes de información

3.5.1 Población

Hernández y Baptista (2010:174) afirman que “la población o universo es el conjunto de todos los casos que concurren con determinadas características”. Para el presente estudio la población está conformada por los estudiantes del curso de Cálculo II de “CEUTEC” de la

ciudad de La Ceiba de los cuales 4 son mujeres y 13 varones, todos matriculados en la modalidad presencial.

3.5.2 Muestra

De igual manera Hernández y Baptista (2010:174) definen “la muestra como un subgrupo de la población”. Y en el proceso cualitativo, es el grupo de personas, eventos, sucesos, comunidades, etc., sobre el cual se habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea estadísticamente representativo del universo o población que se estudia. Se recolectó información cualitativa por medio del muestreo no probabilístico bajo el método de muestreo intencional. Para Hernández, et al (2008) el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad.

El tipo de muestreo que se utilizó fue el no probabilístico por conveniencia, donde la muestra estaba conformada por 17 estudiantes, los cuales se constituyeron en grupos de estudio aleatorio lo que significó que todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, entre 4 y 5 integrantes. Los grupos se formaron para la realización de trabajos en las sesiones de estudio y hojas de trabajo los que eran evaluados con nota, de acuerdo a la participación activa de los alumnos.

3.6 Estrategia de recolección de datos

En cuanto a los datos de investigación cualitativos, Hernández y Baptista (2010:409), plantean que “la recolección de datos ocurre en ambientes naturales y cotidianos de los participantes o unidades de análisis. Es así que los instrumentos no son estandarizados, ya que se trabaja con múltiples fuentes de datos, que pueden ser entrevistas, observaciones

directas, documentos, material audiovisual, hojas de trabajo, etc. Para la recolección de la información se consideraron los trabajos escritos de los estudiantes producto de sesiones de trabajo y de la prueba evaluativa.

Este capítulo se ha dividido en tres apartados: el primero hace referencia a los aspectos relativos a la prueba de diagnóstico; el segundo apartado hace hincapié a las sesiones de trabajo que se diseñaron; y, finalmente en el tercer apartado se presenta una prueba final que tuvo un propósito, mostrar cualitativamente la evolución o no que presentaron los estudiantes en elementos de pensamiento variacional.

La recolección de datos en esta investigación se llevó a cabo como se detalla a continuación.

- Observación de campo: Esta técnica se utilizó para indagar y detallar el ambiente donde se desarrolló las sesiones de trabajo y así responder las preguntas de estudio. Se realizaron dos observaciones que tuvieron una duración de 30 minutos aproximadamente, los estudiantes participantes en el estudio percibieron que estaban siendo observados.
- Prueba diagnóstica: Esta prueba fue diseñada con el objetivo de conocer los conocimientos previos de los estudiantes, fue aplicada a un total de 17 estudiantes. Consistió en 4 ítems donde los dos primeros tenían subíndices correspondientemente, cada uno con su propio objetivo definido: en el ítems uno solicita a los estudiantes calcular en sus dos incisos las sumas finitas presentada; en el ítem dos demandan que los estudiantes sean capaces de calcular en sus tres incisos las sumas infinitas correspondientes; en los ítems tres y cuatro se persigue que los estudiantes calculen

las sumas infinitas considerando las fracciones representadas en las figuras. Todos los ítems se describen más adelante con mayor precisión.

- Sesiones de trabajo: Uno de los asuntos medulares de la investigación lo constituyó el diseño, implementación y análisis de las sesiones de trabajo. En este sentido, se elaboraron seis sesiones de trabajo atendiendo a la temática que aborda el problema, los objetivos y las preguntas de investigación, además de la naturaleza del problema y la perspectiva teórica de su abordaje. Todas las sesiones de trabajo se describen posteriormente.

Cabe señalar que los estudiantes de ingeniería de este estudio, tienen algún conocimiento de algunos softwares matemáticos, pero en general desconocían el software de Geogebra Classic 5. Para la utilización durante las sesiones de trabajo fue necesaria hacer una pequeña inducción, de modo que esta sirviera al momento de utilizar Geogebra Classic 5 en la resolución de cada una las sesiones de trabajo y sus niveles.

Para la aplicación de las sesiones de trabajo se formaron tres equipos de cuatro y un equipo de cinco estudiantes cada uno, estos equipos fueron formados de forma aleatoria. De igual manera es de gran importancia mencionar que el tipo de muestreo que se utilizó fue el no probabilístico por conveniencia, dado que los estudiantes participantes asistieron al proceso total de la investigación cuatro días por semana y cumplir con 30 horas de la investigación 17 estudiantes del curso de Cálculo II (MAT-210), participaron durante aproximadamente cuatro semanas en las instalaciones de CEUTEC-UNITEC (véase tabla 3.6.1).

Tabla 3.6.1. Descripción de las etapas en su tiempo de ejecución

Etapas de Ejecución	Desarrollo Tiempo	Discusión Tiempo
Prueba Diagnóstica	2 horas	---
Sesión de Trabajo #1 – (4 niveles)	4 horas	1/2 hora
Sesión de Trabajo #2 – (4 niveles)	4 horas	1/2 hora
Sesión de Trabajo #3 – (4 niveles)	4 horas	1/2 hora
Sesión de Trabajo #4 – (4 niveles)	4 horas	1/2 hora
Sesión de Trabajo #5 – (4 niveles)	4 horas	1/2 hora
Sesión de Trabajo #6 – (3 niveles)	4 horas	1/2 hora
Evaluación final	4 horas	---
Total	30 horas	3 horas

Fuente: Elaboración propia

Validación de instrumentos

Es relevante recalcar que la validación del contenido no se evalúa cuantitativamente, para ello, se estima de manera subjetiva empleando el denominado Juicio de Expertos (Corral, 2009). De igual forma Hernandez y Baptista (2010:204) definen que “La validez de expertos se denomina al grado en que un instrumento de medición mide la variable en cuestión, de acuerdo con personas expertas en el tema”.

En el mismo orden de ideas, la prueba diagnóstica como las sesiones de trabajo fueron validadas en base a este criterio por un conjunto de expertos conformados por los Ph.D. Carlos Cabezas Manríquez (Universidad Católica del Maule y Universidad de Los Lagos, Chile), Wilson Gordillo Thiriat (Universidad distrital, Colombia) y Marvin Roberto Mendoza (Universidad Autónoma Nacional y Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán,

Honduras). A los cuales se les mostró los instrumentos para que juzgaran de manera independiente la congruencia y relevancia de cada ítem, la claridad de redacción y el objetivo que se persigue con cada uno. Posteriormente se recogieron y analizaron las validaciones de los expertos, haciendo las readecuaciones pertinentes según las recomendaciones de cada uno de ellos.

A continuación se presenta los distintos momentos y el aporte de cada uno de los expertos en el proceso de validación. Primero el Ph.D. Marvin Mendoza comentó e instruyó sobre las fases de la investigación así como los distintos momentos de la investigación. Luego se hizo un diseño preliminar de objetivos tentativos, rúbricas de evaluación, descripciones de cada uno de los instrumentos a desarrollar. Segundo, se consolidó un banco de problemas procurando que tuviese distinta variabilidad y que todos convergieran al asunto de la serie geométrica intentando que se visibilizara niveles de dificultad, variabilidad, riqueza en torno a las sesiones de trabajo, de manera que se pudiese involucrar el aspecto de visualización.

Tercero, los Ph.D Carlos Cabezas y Wilson Gordillo hicieron una revisión preliminar de los objetivos de investigación, las preguntas de investigación, las categorías de análisis y los instrumentos que se elaboraron previamente con el visto bueno del asesor Marvin Mendoza. Ellos retroalimentaron haciendo correcciones en algunas sesiones de forma y de fondo, sugiriendo otro tipo de lenguaje o de la forma de presentar las preguntas. En el cuarto y último proceso se incorporó la retroalimentación, luego se le comentó al asesor Marvin Mendoza las observaciones pertinentes dadas por los otros expertos para posteriormente hacer las adecuaciones y correcciones de los instrumentos, para realizar su posterior aplicación.

3.7 Diagnóstico y sesiones de trabajo

A continuación se presentan los instrumentos que se utilizaron para el desarrollo de esta investigación, se enuncia el objetivo que se persigue con cada uno de ellos, además de la descripción y las rúbricas que demarcarán la ruta de tipo cuantitativa de los instrumentos diseñados y aplicados.

En los siguientes apartados se presenta los instrumentos diseñados e implementados a lo largo de la investigación. En particular, la prueba diagnóstica, las sesiones de trabajo los objetivos y la descripción de cada una de estas.

3.7.1 Prueba diagnóstica

Objetivo general

Identificar en los estudiantes conocimientos preliminares de manera que les permitan reconocer patrones de series geométricas en el cálculo sumas finitas e infinitas.

Descripción General

La prueba diseñada fue construida sobre la temática previa que los estudiantes han desarrollado antes de abordar las series. Se pretende que los estudiantes develen habilidades cognitivas que les permiten enfrentar diferentes situaciones matemáticas. En esta idea, se elaboró un instrumento para conocer las producciones en cuanto a elementos de pensamiento variacional que los estudiantes interpreten y a la vez que describan o expresarlos mediante diversos tipos de representación.

La prueba diagnóstica (Ver anexo 2) se conformó de cuatro ítems, todos ellos orientados a la resolución y construcción de series geométricas. Todo ello, desde lo curricular propio para

estudiantes del curso de cálculo de universidad. En este sentido, se han construido los ítems de la prueba. La primera de ellas incluye al ítem uno, que solicita a los estudiantes calcular en sus dos incisos la suma finita atendiendo a ciertas características particulares. Por su parte, el ítem dos está expresado en un registro aritmético. La consigna está orientado a que los estudiantes calculen la suma infinita, y los ítems tres y cuatro están expresados en un registro de tipo figural con base en figuras que representan ciertas fracciones. En ambos casos los estudiantes deberían calcular la suma considerando las fracciones representadas en las figuras.

Es importante señalar que en esta prueba diagnóstica no se intentó indagar a los participantes sobre conocimientos geométricos previos para hacer sus producciones en el Software Geogebra, debido a que es un conocimiento básico.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.1 Objetivo y descripción de los ítems de la prueba diagnóstica

Prueba Diagnóstica	Objetivo	Descripción
Ítem # 1	Calcular la suma de las series finitas de cuadrados y cubos de números enteros.	El problema presenta sumas de series finitas de números enteros. La consigna consiste en que los estudiantes sumen series finita de cuadrados perfectos hasta el 400, y suma de series finitas de cubos perfectos hasta el 729.
Ítem # 2	Calcular la suma de las series infinitas.	El problema presenta sumas de series infinitas. La consigna consiste en que los estudiantes sumen series geométricas infinitas.

Ítem # 3	Calcular la suma de series infinitas considerando las fracciones representadas en la figura del pastel.	Se proporciona la figura de un pastel y se quiere comer primero la mitad del pastel, luego comer la mitad de lo que reste, luego comer otra vez la mitad de lo que reste. Este proceso se repite de manera indefinida. La consigna consiste en que los estudiantes sumen series infinitas considerando las fracciones representadas en las figura del pastel.
Ítem # 4	Calcular la suma de series infinitas considerando las área de las regiones sombreadas representadas en las figura de los cuadrados inscritos.	Se proporciona la figura de un cuadrado de 16 pulgadas de longitud. Luego un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original, y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados. Este proceso se repite de manera indefinida. La consigna consiste en que los estudiantes determinen el área de las regiones sombreadas considerando las fracciones representadas en la figura de los cuadrados inscritos.

Fuente: Elaboración propia

3.7.2 Sesión de trabajo # 1

Objetivos

- Calcular áreas de polígonos que se construyen específicamente mediante una sucesión de cuadrados, cada uno en el interior del precedente tomando como vértices los puntos

medios de sus lados y sus diferentes elementos tales como longitudes y perímetros con apoyo del software Geogebra.

- Analizar los procesos que continúan sin culminar y cómo estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

Descripción general

Cada una de las actividades diseñadas se construyeron atendiendo a niveles de dificultad que van del primer nivel al cuarto. A continuación se presenta la primera actividad que consta de cuatro niveles. En el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco ítem, en el nivel tres hay cinco ítems y en el nivel cuatro hay seis ítems, los cuales, en general, están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de cuadrados. Está formada por una sucesión de cuadrados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural, la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen longitudes, perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos del cuadrado.

Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.7.2 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 1

Sesión de trabajo # 1	Objetivo	Descripción
NIVEL 1		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que la identifique.
Ítem # 2	Determinar elementos de pensamiento variacional en la figura que se le presenta.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale y describa todas las características que estime pertinentes.
Ítem # 3	Describir todos los comentarios respecto a las magnitudes que el estudiante observe y que involucren propuestas de pensamiento variacional en la situación problema.	Se le muestra al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale las magnitudes que observa y estime convenientes.
Nivel 2		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra, que muestra dos cuadrados, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem pide que haga todos los comentarios que el

		estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo de magnitudes de la situación problema en relación a la primera figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra, que muestra dos cuadrados, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera.
Ítem # 3	Determinar elementos de pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado en la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le muestra al estudiante una figura en Geogebra, que muestra dos cuadrados, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule el valor de la longitud del lado de la figura inscrita.
Ítem # 4	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la figura inscrita con el apoyo de Geogebra.	Se proporciona en Geogebra dos cuadrados, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor del perímetro de la figura inscrita.
Ítem # 5	Encontrar elementos que involucran pensamiento	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra, que muestra dos

variacional en el cálculo y cuadrados, uno de ellos en el comparación de áreas de la situación problema en relación a la primera figura con el apoyo de Geogebra.	interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem propuesto requiere que calcule y compare las áreas que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera.
--	--

Nivel 3

Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra, que muestra contruidos tres cuadrados, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem pide que realice todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
-----------------	--	--

Ítem # 2	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante en Geogebra tres cuadrados, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Se le solicita que calcule y compare las magnitudes que observa de la situación problema en relación a la segunda figura y que anote todos
-----------------	--	---

		los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
Ítem # 3	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado de la segunda figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le muestra al estudiante en Geogebra tres cuadrados contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor de la longitud del lado de la segunda figura inscrita.
Ítem # 4	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del valor del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona al estudiante en Geogebra tres cuadrados contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem requiere que calcule el valor del perímetro de la segunda figura inscrita, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 5	Descubrir elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas en la situación problema en relación a la segunda figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra, que muestra tres cuadrados contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule y compare las áreas que observa, dando todos

los comentarios que el estudiante estime pertinentes.

NIVEL 4

Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que establezca con propiedad si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 2	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de las figuras inscritas en relación a las anteriores si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante en Geogebra una sucesión de cuadrados construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Se le solicita que calcule y compare las magnitudes que observa de la situación problema en relación a las figuras anteriores y que anote todos los comentarios pertinentes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la sucesión de figuras inscritas, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Se le muestra al estudiante en Geogebra una sucesión de cuadrados construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem solicita que el estudiante calcule el valor de los perímetros de las

		figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la sucesión de figuras inscritas si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Se proporciona al estudiante en Geogebra una sucesión de cuadrados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La tarea requiere que calcule y compare las áreas de las figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime conveniente.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en la elaboración del listado de longitudes, perímetros y áreas de las figuras inscritas contruidas con apoyo de Geogebra.	El problema presenta una sucesión de cuadrados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que los estudiantes realicen un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras contruidas.
Ítem # 6	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional al hacer relaciones entre las figuras contruidas sus perímetros y áreas con apoyo de Geogebra.	Se presenta una sucesión de cuadrados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna pide que el estudiante muestre todas las relaciones entre las figuras

construidas, y haga las anotaciones que el estime pertinentes.

Fuente: Elaboración propia

3.7.3 Sesión de trabajo # 2

Objetivos

- Calcular áreas que se construyen específicamente mediante una sucesión de círculos concéntricos (cada uno, en el interior del precedente tomando siempre la mitad del radio anterior) y sus elementos tales como perímetros.
- Analizar los procesos que continúan sin culminar y como estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

Descripción general

Esta sesión dos consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cuatro ítem, en el nivel tres hay cuatro ítems y en el nivel cuatro hay seis ítems, en general están focalizados en el tema de círculos. Está formada por una sucesión de círculos concéntricos, cada uno, en el interior del precedente tomando la mitad del radio anterior. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural, la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos del círculo.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.3 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 2

Sesión de trabajo # 2	Objetivo	Descripción
NIVEL 1		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que la identifique.
Ítem # 2	Especificar las características que el estudiante estime pertinente en la figura que se le presenta.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale, describa todas las características que estime pertinentes.
Ítem # 3	Describir todos los comentarios respecto a las magnitudes que el estudiante observe y que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra y este ítem pide que señale las magnitudes que observa y estime convenientes.
Nivel 2		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos círculos, el círculo de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Este ítem pide que haga todos los comentarios que el

		estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de magnitudes de la situación problema en relación a la primera figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos círculos, el círculo de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera.
Ítem # 3	Determinar elementos de pensamiento variacional en el cálculo del perímetro del círculo concéntrico con apoyo de Geogebra.	Se proporciona en Geogebra dos círculos, el círculo de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Este ítem demanda que calcule el valor del perímetro del primer círculo concéntrico
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación del área del círculo concéntrico en relación a la primera figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos círculos, el círculo de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Este ítem requiere que calcule y compare las áreas de la situación problema en relación a la primera.

Nivel 3

Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente de la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres círculos, el de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo. Este ítem pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que observa.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante en Geogebra tres círculos, el de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes en relación a la segunda figura y que anote todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del valor del perímetro del círculo	Se proporciona en Geogebra tres círculos, el círculo de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior, e igual el tercer

	concéntrico con apoyo de Geogebra.	círculo tiene la mitad de radio que el círculo antes mencionado. Este ítem demanda que calcule el valor del perímetro del segundo círculo concéntrico
--	------------------------------------	---

Ítem # 4	Descubrir elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas en la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres círculos, el de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo. La consigna consiste en que calcule y compare las áreas que observa, dando todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
-----------------	---	---

NIVEL 4

Ítem # 1	Determinar si la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse proporcionando todos los comentarios pertinentes de la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que establezca con propiedad si la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 2	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la	Se le asigna al estudiante en Geogebra tres círculos, el de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de

	situación problema si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	radio que el círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes de las circunferencias concéntricas y que anote todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo de los perímetros de la sucesión de circunferencias concéntricas, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Se le facilita en Geogebra una sucesión de circunferencias concéntricas donde el círculo de mayor tamaño tiene radio “r”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida. Seguidamente se pide al estudiante que calcule el valor de los perímetros de las circunferencias concéntricas, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la sucesión de circunferencias concéntricas si el proceso de	Se proporciona al estudiante en Geogebra, sucesión de circunferencias concéntricas donde el círculo de mayor tamaño tiene radio “r”. A su vez el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el

	construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida. Este ítem requiere que calcule y compare las áreas de las circunferencias concéntricas, dando todos los comentarios que el estudiante estime conveniente.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en la elaboración del listado de longitudes, perímetros y áreas de las circunferencias concéntricas construidas con apoyo de Geogebra.	El problema presenta una sucesión de circunferencias concéntricas donde el círculo de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida. La consigna consiste en que el estudiante haga un listado de los radios, perímetros y áreas de las figuras construidas.
Ítem # 6	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional al hacer relaciones entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas con apoyo de Geogebra.	Se presenta una sucesión de circunferencias concéntricas donde el círculo de mayor tamaño tiene radio “ r ”, a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior. Se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el

proceso de manera indefinida. La consigna pide que el estudiante muestre todas las relaciones entre las circunferencias concéntricas y haga las anotaciones que el estime pertinentes.

Fuente: Elaboración propia

3.7.4 Sesión de trabajo # 3

Objetivos

- Calcular áreas que se construyen específicamente mediante una sucesión de semicircunferencias (que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes cada una en el interior del precedente y esto se repite de manera indefinida) y sus elementos tales como sus perímetros con apoyo del software Geogebra.
- Analizar los procesos que continúan sin culminar y como estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

3.7.4.1 Descripción general

La actividad tres consta de tres niveles: en el nivel uno hay cuatro ítem, en el nivel dos hay cuatro ítems y en el nivel tres hay seis ítems, en general, están focalizados en el tema de semicircunferencias. Está formada por una sucesión de semicircunferencias, donde se les

proporciona a los estudiantes una semicircunferencia inicial que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, y que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural, la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos de las semicircunferencias.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.4 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 3

Sesión de trabajo # 3	Objetivo	Descripción
Nivel 1		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra, que muestra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias. Se le pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de magnitudes de la situación	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y

	problema en relación a la primera figura con apoyo de Geogebra.	se construyen dos semicircunferencias. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera semicircunferencia.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de perímetros de las semicircunferencias con apoyo de Geogebra.	Se proporciona en Geogebra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias. Este ítem solicita al estudiante que calcule el valor de los perímetros de las semicircunferencias.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de áreas de los semicírculos en relación a la primera figura proporcionada con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias. Este ítem requiere que el alumno calcule y compare las áreas de los semicírculos en relación al primer semicírculo.
Nivel 2		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra una

	elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en cuatro semicircunferencias congruentes. Se le pide que haga todos los comentarios que el alumno estime pertinente sobre lo que percibe.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante en Geogebra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en cuatro semicircunferencias congruentes. Se le solicita que compare las magnitudes en relación a la segunda figura y que anote todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 3	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del valor del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona al estudiante en Geogebra una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan

		subdividiendo en cuatro semicircunferencias congruente. Este ítem requiere que calcule el valor del perímetro de las semicircunferencias, dando todos los comentarios convenientes.
--	--	---

Ítem # 4	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra, una semicircunferencia con el segmento AB como diámetro. Luego se divide AB en dos partes iguales AO y OB, y se construyen dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en cuatro semicircunferencias congruente. La consigna consiste en que calcule y compare las áreas que observa, dando todos los comentarios que se estimen pertinentes.
-----------------	--	--

NIVEL 3

Ítem # 1	Determinar si la construcción de n semicircunferencias podría realizarse proporcionando todos los comentarios pertinentes de la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que establezca con propiedad si la construcción de n semicircunferencias podría realizarse dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucran pensamiento	Se le asigna al estudiante en Geogebra una semicircunferencia inicial MN

	variacional en el cálculo de longitudes de las semicircunferencias en relación a las anteriores, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. Se le solicita que calcule las longitudes de las semicircunferencias en relación a las anteriores y que anote todos los comentarios pertinentes.
Ítem # 3	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de los perímetros de la sucesión de semicircunferencias, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Se le facilita al estudiante en Geogebra, una semicircunferencia inicial MN que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. Seguidamente se pide al estudiante que calcule el valor de los perímetros de las semicircunferencias, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas en la sucesión de semicircunferencias, si el proceso de construcción	Se proporciona al estudiante en Geogebra una semicircunferencia inicial MN que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. Este ítem requiere

	continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	que calcule y compare las áreas de las semicircunferencias concéntricas, dando todos los comentarios que el alumno estime convenientes.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en la elaboración del listado de perímetros y áreas de las semicircunferencias construidas con apoyo de Geogebra.	El problema presenta una semicircunferencia inicial MN que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. La consigna consiste en que el estudiante haga un listado de los diámetros, perímetros y áreas de las figuras construidas.
Ítem # 6	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional al hacer relaciones entre las semicircunferencias construidas, sus perímetros y áreas con apoyo de Geogebra.	Se presenta una semicircunferencia inicial MN que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, MO Y NO, que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida. La consigna pide que el estudiante muestre todas las relaciones entre las semicircunferencias y haga las anotaciones que el estime pertinentes.

Fuente: Elaboración propia

3.7.5 Sesión de trabajo # 4

Objetivos

- Calcular áreas de polígonos, específicamente de triángulos equiláteros y sus diferentes elementos como longitudes y perímetros con apoyo del software Geogebra.
- Analizar los procesos que continúan sin culminar y como estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

Descripción general

La actividad cuatro consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco ítem, en el nivel tres hay cinco ítems y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de triángulos equiláteros. Está formada por una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural, la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen longitudes, perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos de los triángulos equiláteros.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.5 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 4

Sesión de trabajo # 4	Objetivo	Descripción
-----------------------	----------	-------------

NIVEL 1

Ítem # 1	Describir todos los comentarios que el estudiante estime pertinente en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que la identifique.
Ítem # 2	Describir las características que involucren elementos de pensamiento variacional en la figura que se le presenta.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale y describa todas las características que estime pertinentes.
Ítem # 3	Describir todos los comentarios respecto a las magnitudes que el estudiante observe y que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale las magnitudes que observa y estime pertinentes.

Nivel 2

Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos triángulos equiláteros contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos triángulos

	variacional en el cálculo de magnitudes de la situación problema en relación a la primera figura con apoyo de Geogebra.	equiláteros contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera.
Ítem # 3	Determinar elementos de pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado en la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra que muestra triángulos equiláteros contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule el valor de la longitud del lado de la figura inscrita.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona en Geogebra dos triángulos equiláteros contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor del perímetro de la figura inscrita.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la situación problema en relación a la primera figura con el apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos triángulos equiláteros contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem requiere que calcule y compare las áreas que observa y estime

pertinentes de la situación problema en relación a la primera.

Nivel 3

Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres triángulos equiláteros contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que percibe.
-----------------	--	--

Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante en Geogebra tres triángulos equiláteros contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa en relación a la segunda figura y que anote todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
-----------------	---	---

Ítem # 3	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado de la situación problema en relación a la segunda figura	Se le facilita al estudiante en Geogebra tres triángulos equiláteros contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor de la
-----------------	---	--

	inscrita con apoyo de Geogebra.	longitud del lado de la segunda figura inscrita.
Ítem # 4	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del valor del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona al estudiante en Geogebra tres triángulos equiláteros contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem requiere que calcule el valor del perímetro de la segunda figura inscrita, dando todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
Ítem # 5	Descubrir elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas en la situación problema en relación a la segunda figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres triángulos equiláteros contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule y compare las áreas que observa, dando todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
NIVEL 4		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que establezca con propiedad si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.

Ítem # 2	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de las figuras inscritas en relación a las anteriores, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra	Se le asigna al estudiante en Geogebra una sucesión de triángulos equiláteros contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa en relación a las figuras anteriores y que anote todos los comentarios pertinentes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la sucesión de figuras inscritas, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra	Se le facilita al estudiante en Geogebra una sucesión de una sucesión de triángulos equiláteros contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor de los perímetros de las figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la sucesión de figuras inscritas si el proceso de construcción	Se proporciona al estudiante en Geogebra una sucesión de una sucesión de triángulos equiláteros contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos

	continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	medios de sus lados. Este ítem requiere que calcule y compare las áreas de las figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime conveniente.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en la elaboración del listado de longitudes, perímetros y áreas de las figuras inscritas construidas con apoyo de Geogebra.	El problema presenta una sucesión de una sucesión de triángulos equiláteros construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que el estudiante haga un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.
Ítem # 6	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional al hacer relaciones entre las figuras construidas sus perímetros y áreas con apoyo de Geogebra.	Se presenta una sucesión de una sucesión de triángulos equiláteros construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna pide que el estudiante muestre todas las relaciones entre las figuras construidas y haga las anotaciones que el estime pertinentes.

Fuente: Elaboración propia

3.7.6 Sesión de trabajo # 5

Objetivos

- Calcular áreas de polígonos, específicamente de hexágonos y sus diferentes elementos como longitudes y perímetros con apoyo del software Geogebra.

- Analizar los procesos que continúan sin culminar y cómo estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

Descripción general

La actividad cinco consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco, en el nivel tres hay cinco y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de hexágonos. Está formada por una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen longitudes, perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de diferentes elementos del hexágono con apoyo del software Geogebra.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.6 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 5

Sesión de trabajo # 5	Objetivo	Descripción
NIVEL 1		
Ítem # 1	Describir todos los	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que la identifique.

	estime pertinente en la situación problema.	
Ítem # 2	Describir las características que involucren elementos de pensamiento variacional en la figura que se le presenta.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale y describa todas las características que estime pertinentes.
Ítem # 3	Describir todos los comentarios respecto a las magnitudes que el estudiante observe y que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que señale las magnitudes que observa y estime pertinentes.

Nivel 2

Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos hexágonos regulares contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de magnitudes de la situación problema en relación a la	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos hexágonos regulares contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

	primera figura con apoyo de Geogebra.	El ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa y estime pertinentes de la situación problema en relación a la primera.
Ítem # 3	Determinar elementos de pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado en la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra que muestra dos hexágonos regulares contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule el valor de la longitud del lado de la figura inscrita.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona en Geogebra dos hexágonos regulares contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. Este ítem demanda que calcule el valor del perímetro de la figura inscrita.
Ítem # 5	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la situación problema en relación a la primera figura con el apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra, que muestra dos hexágonos regulares contruidos, uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem requiere que calcule y compare las áreas que observa y estime

pertinentes de la situación problema en relación a la primera.

Nivel 3

Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres hexágonos regulares contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.
Ítem # 2	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de la situación problema en relación a la segunda figura con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres hexágonos regulares contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa de la situación problema en relación a la segunda figura y que anote todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
Ítem # 3	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud del lado de la situación problema en	Se le facilita al estudiante en Geogebra tres hexágonos regulares contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem pide

	relación a la segunda figura inscrita con apoyo de Geogebra.	calcular el valor de la longitud del lado de la segunda figura inscrita.
Ítem # 4	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del valor del perímetro de la figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se proporciona al estudiante en Geogebra tres hexágonos regulares contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem requiere que calcule el valor del perímetro de la segunda figura inscrita, dando todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
Ítem # 5	Descubrir elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas en la situación problema en relación a la segunda figura inscrita con apoyo de Geogebra.	Se le asigna al estudiante una figura en Geogebra que muestra tres hexágonos regulares contruidos, cada uno de ellos en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que calcule y compare las áreas que observa, dando todos los comentarios que el estudiante estime pertinentes.
NIVEL 4		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra y se le pide que establezca con propiedad si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.

Ítem # 2	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de magnitudes de las figuras inscritas en relación a las anteriores si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Al estudiante se le asigna en Geogebra una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem solicita que calcule y compare las magnitudes que observa de la situación problema en relación a las figuras anteriores y que anote todos los comentarios pertinentes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del perímetro de la sucesión de figuras inscritas, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Al estudiante se le facilita en Geogebra una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem requiere que calcule el valor de los perímetros de las figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo y comparación de áreas de la sucesión de figuras inscritas si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Al estudiante se le proporciona en Geogebra una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. El ítem requiere que calcule y compare las áreas de las figuras inscritas, dando todos los comentarios que el estudiante estime conveniente.

Ítem # 5	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en la elaboración del listado de longitudes, perímetros y áreas de las figuras inscritas construidas con apoyo de Geogebra.	El problema presenta una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna consiste en que el estudiante haga un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.
Ítem # 6	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional al hacer relaciones entre las figuras construidas sus perímetros y áreas con apoyo de Geogebra.	Se presenta una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La consigna pide que el estudiante muestre todas las relaciones entre las figuras construidas y haga las anotaciones que el estime pertinentes.

Fuente: Elaboración propia

3.7.7 Sesión de trabajo # 6

Objetivos

- Calcular la longitud de una espiral infinita que se va construyendo bajo ciertas condiciones particulares con apoyo del software Geogebra.
- Analizar los procesos que continúan sin culminar y como estos ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos

desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas y analizadas en este trabajo con apoyo del software Geogebra.

Descripción general

La actividad seis consta de dos niveles: en el nivel uno hay dos ítems y en el nivel dos hay cuatro ítems; en general están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de hexágonos. Está formada por una espiral infinita que se va construyendo bajo ciertas condiciones particulares. La sesión de trabajo está desplegada en el registro figural, la cual consiste en que los estudiantes respondan a cada interrogante que se les solicita y que al final calculen longitudes, perímetros y áreas, donde es necesario que obtengan el valor de la longitud de la espiral con apoyo del software Geogebra.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.7 Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 6

Sesión de trabajo # 6	Objetivo	Descripción
Nivel 1		
Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Y se le pide que haga todos los comentarios que el estudiante estime pertinente sobre lo que aprecia.

Ítem # 2	Determinar elementos de pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud de los segmentos que componen la espiral con apoyo de Geogebra.	Se le facilita al estudiante una figura en Geogebra que muestra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. La consigna consiste en que calcule el valor de la longitud de la espiral.
-----------------	--	---

Nivel 2

Ítem # 1	Describir todos los comentarios del estudiante que involucren elementos de pensamiento variacional en la situación problema.	Se proporciona al estudiante una figura en Geogebra que muestra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$..., donde continúa de manera indefinida. A continuación se le pide que haga todos los comentarios que el alumno estime pertinente sobre lo que aprecia.
-----------------	--	---

Ítem # 2	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de la longitud de los segmentos que componen la espiral en relación a las longitudes anteriores si el proceso de construcción continúa de	Al estudiante se le asigna en Geogebra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$..., que continúa de manera indefinida. El ítem solicita que calcule y compare las
-----------------	--	--

	manera indefinida con apoyo de Geogebra.	magnitudes que observa de la situación problema en relación a las figuras anteriores y que anote todos los comentarios pertinentes.
Ítem # 3	Establecer elementos que involucran pensamiento variacional, si se puede continuar con la construcción de cada una los segmentos que componen la espiral, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Al estudiante se le proporciona en Geogebra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, que continúa de manera indefinida. El ítem solicita que anote todos los comentarios pertinentes, si se puede continuar con la construcción de las espirales de manera indefinida.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo del valor de la longitud de cada uno de los segmentos que componen la espiral de esta figura en relación a la figura 1, si el proceso de construcción continúa de manera indefinida con apoyo de Geogebra.	Al estudiante se le facilita en Geogebra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades donde se dibuja una espiral. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, que continúa de manera indefinida. El ítem demanda que calcule el valor de la longitud de la espiral, si el proceso de construcción continúa indefinidamente.

Fuente: Elaboración propia

3.7.8 Prueba Final

Objetivo general

- Identificar en los estudiantes los conocimientos y concepciones que reflejan las producciones estudiantiles al dar respuesta a las situaciones problema enfocadas en el pensamiento variacional donde principalmente utilizaron la herramienta de la serie geométrica para calcular diferentes valores con apoyo del software Geogebra.
- Analizar los procesos que ayudan al acercamiento de conocimientos y concepciones previas de pensamiento variacional con el primer nivel de análisis con que aporta el EOS, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas con apoyo del software Geogebra.

Descripción General

La prueba diseñada fue construida sobre la temática de las sesiones de trabajo que los estudiantes desarrollaron desde la sesión uno hasta la seis. El objetivo de la prueba se orientó a que los estudiantes develen habilidades cognitivas que les permiten resolver las diferentes situaciones referentes a la serie geométrica. Con esta idea, se elaboró un instrumento para conocer las producciones en cuanto a elementos de pensamiento variacional que los estudiantes interpreten y, a la vez, que describan o expresen mediante diversos tipos de representación.

La prueba final se conformó de doce ítems, todos ellos orientados al análisis, resolución y construcción de series geométricas. En este sentido se han construido los ítems de la prueba. La primera de ellas incluye al ítem uno, que solicita a los estudiantes recordar la sesión de

trabajo número uno, donde calcularon y contestaron las diferentes interrogantes de la sesión, y que a continuación respondan si serían capaces de sumar las áreas de cada uno de los cuadrados contruidos, y si pueden sumar las áreas de todos de los cuadrados contruidos atendiendo a ciertas características particulares.

Por otra parte, el ítem dos solicita a los estudiantes recapitular la sesión de trabajo número dos, y se les pide que respondan si serían capaces de sumar las áreas de cada uno de los círculos concéntricos contruidos, y si pueden sumar las áreas de todos los círculos concéntricos contruidos atendiendo a ciertas propiedades particulares.

Dentro de este marco, el ítem tres solicita a los estudiantes evocar la sesión de trabajo número tres, donde contestaron las diferentes interrogantes. Se les solicita que respondan si serían capaces de sumar las áreas de cada uno de los semicírculos contruidos y si pueden sumar las áreas de todos los semicírculos contruidos. Asimismo, el ítem cuatro demanda a los estudiantes si sería posible sumar todos los perímetros de las figuras contruidas en los instrumentos número uno, número dos y número tres, así como a cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados atendiendo a ciertas características particulares.

De igual manera, el ítem cinco pide que los estudiantes observen algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos número uno, dos y tres. No obstante, el ítem seis pretende que el estudiante argumente sobre qué diferencias se pueden encontrar entre el instrumento uno y en el instrumento dos, o en el instrumento dos y en el instrumento 3, o si hay algún patrón parecido y cuáles son sus similitudes.

Por otro lado, los ítems siete y ocho solicitan a los estudiantes recapitular las sesiones de trabajo número cuatro y cinco respectivamente, y se les pide que respondan si serían capaces

de sumar las áreas de cada uno de los triángulos equiláteros, así como las de los hexágonos inscritos y que determinen a cuánto equivalen esos valores atendiendo a ciertas propiedades particulares.

En cuanto al ítem nueve, se solicita a los estudiantes recordar la sesión de trabajo número seis, donde calcularon y contestaron las diferentes interrogantes de la sesión. Se les pide que contesten si serían capaces de sumar las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado que construyeron, así como sumar las distancias de los extremos de los segmentos de la espiral atendiendo a ciertas características particulares.

No obstante, el ítem diez le solicita a los estudiantes si es posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número cuatro, número cinco y número seis; así como a cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos antes mencionados. Por último los ítems once y doce pretenden que el estudiante responda si observa algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos número cuatro, cinco y seis, y que argumenten qué diferencias se pueden encontrar entre los instrumentos antes mencionados, si hay algún patrón parecido y cuáles son sus similitudes.

Objetivo y descripción por ítem

Tabla 3.7.8 Objetivo y descripción de los ítems de la prueba final

Prueba Final	Objetivo	Descripción
Ítem # 1	Determinar elementos que involucran pensamiento variacional en el cálculo de sumas de series infinitas en	Se le pregunta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo uno donde calculó y contestó que, efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. La consigna

	la sesión de trabajo uno y dar todos los comentarios pertinentes con apoyo de Geogebra.	consiste en que el alumno sea capaz de sumar las áreas de todos los cuadrados construidos en la sesión de trabajo antes mencionado y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 2	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de las sumas de series infinitas en la sesión de trabajo dos y dar todos los comentarios convenientes con apoyo de Geogebra.	Se le pregunta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo dos donde calculó y respondió que, efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. La consigna consiste en que el alumno sea capaz de sumar las áreas de todos los círculos concéntricos construidos en la sesión de trabajo antes descrito y dar todos los comentarios que estime pertinentes.
Ítem # 3	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de las sumas de series infinitas en la sesión de trabajo tres y dar todos los comentarios pertinentes con apoyo de Geogebra.	Se le consulta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo tres donde calculó y respondió que, efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. El ítem consiste en que el alumno sea capaz de sumar las áreas de todos los semicírculos construidos en la sesión de trabajo antes mencionado y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 4	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de la suma de todos los perímetros de las figuras construidas en las sesiones	El ítem consiste en que el estudiante sea capaz de sumar las series infinitas formadas por los perímetros de las figuras en las sesiones de trabajo antes mencionado y dar todos los comentarios que estime pertinentes.

	de trabajo uno, dos y tres con apoyo de Geogebra.	
Ítem # 5	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional al determinar algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras dadas en las sesiones de trabajo uno, dos y tres.	El ítem consiste en que el estudiante sea capaz de identificar algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras dadas en las sesiones de trabajo antes mencionadas y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 6	Analizar elementos que involucren pensamiento variacional o algunas similitudes y diferencias encontradas en las sesiones de trabajo uno, dos y tres.	El ítem radica en que el estudiante sea capaz de analizar algunas similitudes y deferencias encontradas en las sesiones de trabajo antes mencionadas y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 7	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de sumas de series infinitas en la sesión de trabajo cuatro y dar todos los comentarios pertinentes con apoyo de Geogebra.	Se le pregunta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo cuatro donde calculó y contestó que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. La consigna consiste en que el alumno sea capaz de sumar las áreas de todos los triángulos equiláteros contruidos en la sesión de trabajo antes mencionado y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 8	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de sumas de series infinitas en la sesión de cinco y dar todos	Se le pregunta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo cinco donde calculó y respondió que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. La consigna consiste en que el alumno sea capaz

	los comentarios pertinentes con apoyo de Geogebra.	de sumar las áreas todos los hexágonos inscritos construidos en la sesión de trabajo antes descrita y dar todos los comentarios que estime pertinentes.
Ítem # 9	Determinar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de sumas de series infinitas en la sesión de trabajo seis y dar todos los comentarios pertinentes con apoyo de Geogebra.	Se le consulta al estudiante si recuerda la sesión de trabajo seis donde calculo y respondió que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. El ítem consiste en que el alumno sea capaz de sumar las distancias de los extremos de los segmentos de la espiral que construida en la sesión de trabajo antes mencionado y dar todos los comentarios que estime convenientes.
Ítem # 10	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional en el cálculo de la suma todos los perímetros de las figuras construidas en las sesiones de trabajo cuatro, cinco y seis.	El ítem consiste en que el estudiante sea capaz de sumar las series infinitas formadas por los perímetros de las figuras en las sesiones de trabajo antes mencionado, y dar todos los comentarios que estime pertinentes.
Ítem # 11	Encontrar elementos que involucren pensamiento variacional al determinar algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras dadas en las sesiones de trabajo cuatro, cinco y seis.	El ítem consiste en que el estudiante sea capaz de observar algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras dadas en las sesiones de trabajo antes mencionadas y dar todos los comentarios que estime convenientes.

Ítem # 12	Analizar elementos que involucran pensamiento variacional o algunas similitudes y diferencias encontradas en las sesiones de trabajo cuatro, cinco y seis.	El ítem radica en que el estudiante sea capaz de analizar algunas similitudes y deferencias encontradas en las sesiones de trabajo antes mencionadas y dar todos los comentarios que estime convenientes.
------------------	--	---

Fuente: Elaboración propia

4 Análisis de Resultados

4.1 Prueba diagnóstica

La prueba diseñada (Ver anexo 2) fue construida sobre los argumentos que los estudiantes que ingresan a Cálculo II en la universidad después que han conocido ciertos temas en matemáticas específicas y han desarrollado habilidades cognitivas que les permiten enfrentar diferentes situaciones, ya sean de carácter matemático o extra matemático. La prueba diagnóstica se conformó de cuatro ítems, en la cual se consideraron diferentes tipos de sumas de series finitas e infinitas, niveles de dificultad y exigencias cognitivas, todo ello desde lo curricular propio para estudiantes universitarios.

En cuanto a la construcción de ítems, el ítem uno tiene tres incisos y demanda que los estudiantes sean capaces de sumar series finitas de números enteros. La consigna consiste en que los estudiantes sumen series finita de cuadrados, cubos perfectos y suma numérica de pares hasta un número finito, con la particularidad de que los dos ítems mencionados están construido en registro aritmético (Duval, 2004a). El ítem dos tiene tres incisos, los que

persiguen que los estudiantes puedan sumar series infinitas y están contruidos también en registro aritmético (Duval, 2004a). Los ítems tres y cuatro solicitan que los estudiantes determinen el área de las regiones sombreadas considerando las fracciones representadas en la figuras del pastel y de los cuadrados inscritos, con la salvedad que los dos ítems mencionados están contruidos en registro figural (Duval, 2004a).

Para valorar las producciones estudiantiles se elaboraron los indicadores o criterios de Correcto (C) para los ítems que se resolvieron cumpliendo los objetivos antes señalados en la rúbrica 3.8.1; Parcialmente correcto (PC) para los ítems que no se resolvieron completamente de acuerdo a esos objetivos; Indicios a conceptos e ideas Matemáticas (ICM) para los ítems en los que los estudiantes presentan ideas vagas, o indicios a conceptos relacionados con los ítems y cumpliendo con los objetivos de la rúbrica antes señalada; Incorrecto (IC) para los ítems que no cumplieron ninguno de los objetivos mencionados, y No Contesto (NC) para los ítems dejados en blanco.

4.1.1 Ítem # 1

Se proporcionan sumas de series finitas de cuadrados perfectos hasta el 400, y suma de series finitas de cubos perfectos hasta el 729. El objetivo del ítem es que los estudiantes calculen la suma de las series finitas de cuadrados y cubos de números enteros. Para ello, es necesario que reconozcan patrones aritméticos (Vasco, 2006), siendo esta una estrategia que permite desarrollar pensamiento variacional en regularidades aritméticas.

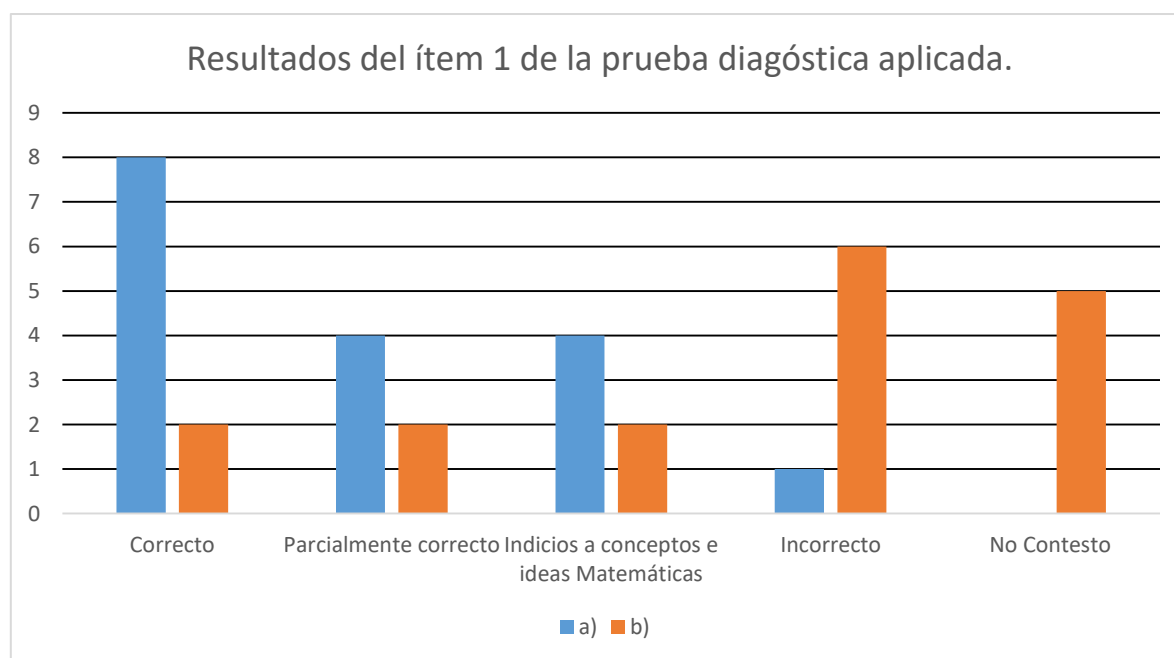
A continuación se presenta la tabla 4.0.1 para evidenciar los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a los indicadores que se mencionaron anteriormente para el ítem 1, de la prueba diagnóstica.

Tabla 4.0. 1 Resultados del ítem 1 de la prueba diagnóstica aplicada

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Ítem # 1					
a)	8	4	4	1	0
Porcentaje (%)	47	24	24	5	0
b)	2	2	2	6	5
Porcentaje (%)	12	12	12	35	29

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 1 Resultados del ítem 1 de la prueba diagnóstica aplicada



Fuente: Elaboración propia

Los resultados del gráfico anterior reflejan que para el inciso a) ocho estudiantes de los diecisiete desarrollaron el problema de manera correcta, es decir, que cumplieron los

objetivos planteados en las rúbricas de evaluación para este ítem. No obstante, cuatro estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completo. Cuatro estudiantes presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a la suma de series finitas cuadrados de números enteros y un estudiante no desarrolló el ejercicio correctamente.

Para el inciso b) solamente dos estudiantes de los diecisiete desarrollaron el problema de manera correcta ya que cumplieron los objetivos planteados en las rúbricas de evaluación para este ítems, igualmente dos estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completo. Dos estudiantes presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a la suma de series finitas cuadrados de números enteros; no obstante, seis estudiantes no desarrollaron el ejercicio correctamente y cinco dejaron las respuestas no contestó.

Por tanto, se detectó en las pruebas que la mayoría de estudiantes lograron calcular correctamente las sumas finitas de cuadrados. Asimismo en las dificultades encontradas se detectó que no logran calcular correctamente series de sumas finitas sobre todo de cubos. Esto implica deficiencias en el reconocimiento de patrones (Vasco, 2006), lo que hace referencia a que no alcanzaron los objetivos completamente según lo establecido en las rúbricas, aunque dejaron evidencias de algunos cálculos de las sumas finitas de cuadrados. Las respuestas permiten conjeturar que los estudiantes no han desarrollado habilidades en relación a argumentar sus procedimientos, tal como lo señalan (Báez, Martínez y Pérez, 2017) en relación a obtener cálculos numéricos, sin dar una explicación de los mismos.

4.1.2 Ítem #2

Se proporcionan sumas de series infinitas y la consigna consiste en que los estudiantes sumen series geométricas infinitas. El objetivo del ítem es que los estudiantes calculen la suma de series infinitas de números racionales.

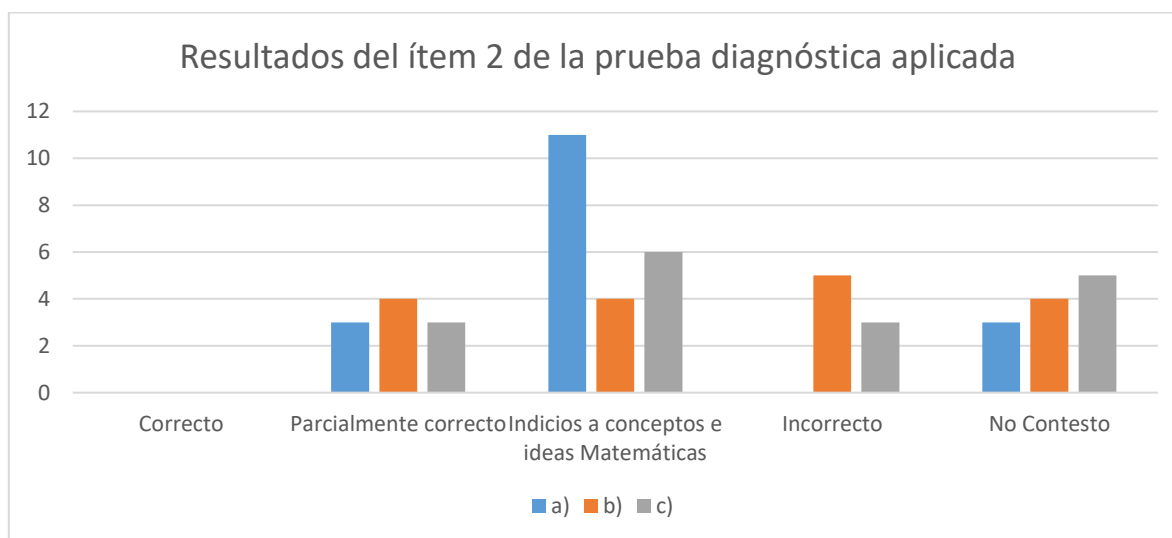
A continuación se presenta la tabla 4.0.2 para evidenciar los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a los indicadores que se mencionaron anteriormente para el ítem 2, de la prueba diagnóstica.

Tabla 4.0. 2 Resultados del ítem 2 de la prueba diagnóstica aplicada

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Ítem # 2					
a)	0	3	11	0	3
Porcentaje (%)	0	18	65	0	17
b)	0	4	4	5	4
Porcentaje (%)	0	24	24	28	24
c)	0	3	6	3	5
Porcentaje (%)	0	18	35	18	29

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 2 Resultados del ítem 2 de la prueba diagnóstica aplicada



Fuente: Elaboración propia

Los resultados del gráfico anterior evidencian que para el inciso a), ningún estudiante de los diecisiete desarrollaron el problema de manera correcta, es decir, ninguno de ellos cumplió con los objetivos planteados en las rúbricas de evaluación para este ítem; sin embargo tres estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completo y dar la respuesta; asimismo once estudiantes, que son mayoría, presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a la suma de series infinitas de números racionales y tres estudiantes dejaron las respuestas sin contestar.

Dentro de este marco, para el inciso b) ningún estudiante de los diecisiete desarrolló el problema de manera correcta, ya que nadie cumplió con los objetivos para este ítem; no obstante, cuatro estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta, pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completo. Cuatro estudiantes presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a la suma de series infinitas de números racionales; por otra parte, cinco estudiantes no desarrollaron el ejercicio correctamente y cuatro dejaron las respuestas sin contestar.

En el inciso c) al igual que en los otros incisos, ningún estudiante de los diecisiete hicieron el problema de manera correcta, ya que nadie cumplió con los objetivos para este ítem planteados en las rúbricas de evaluación; no obstante, tres estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta, pero no llegaron a terminar todo lo que se les solicitó en el problema. Seis estudiantes que son mayoría, presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a la suma de series infinitas; no así, tres estudiantes no desarrollaron el ejercicio correctamente y cinco dejaron las respuestas sin contestar.

Los resultados de estos ítems reflejan que los estudiantes en su mayoría respondieron de manera incorrecta, no contestaron o respondieron parcialmente sin llegar a las respuestas correctas de los problemas planteados. Estos tres indicadores señalados denotan que los estudiantes mostraron dificultades para responder las consignas respecto a calcular sumas infinitas de números racionales. Ello implica la dificultad de reconocimiento de patrones, una actividad necesaria para el desarrollo del pensamiento variacional (Vasco, 2006).

Se evidencia que ningún estudiante de los diecisiete pudo resolver los tres incisos correctamente. Al respecto, los estudiantes en su mayoría, tienen concepciones confusas asociadas a las estrategias para poder calcular sumas infinitas a pesar de realizar algunos cálculos aritméticos coherentes. Esto contempla que los estudiantes se ubican en el nivel uno de desarrollo de pensamiento variacional mostrado en la figura 5.

4.1.3 Ítem # 3

Se proporciona una figura de un pastel, lo que se quiere es comer primero la mitad del pastel, luego comer la mitad de lo que reste, luego comer otra vez la mitad de lo que reste, y este proceso se repetirá de manera indefinida. La consigna consiste en que los estudiantes sumen

series infinitas considerando las fracciones representadas en la figura del pastel. El objetivo del ítem es que los estudiantes calculen la suma de series infinitas considerando las fracciones representadas en la figura del pastel.

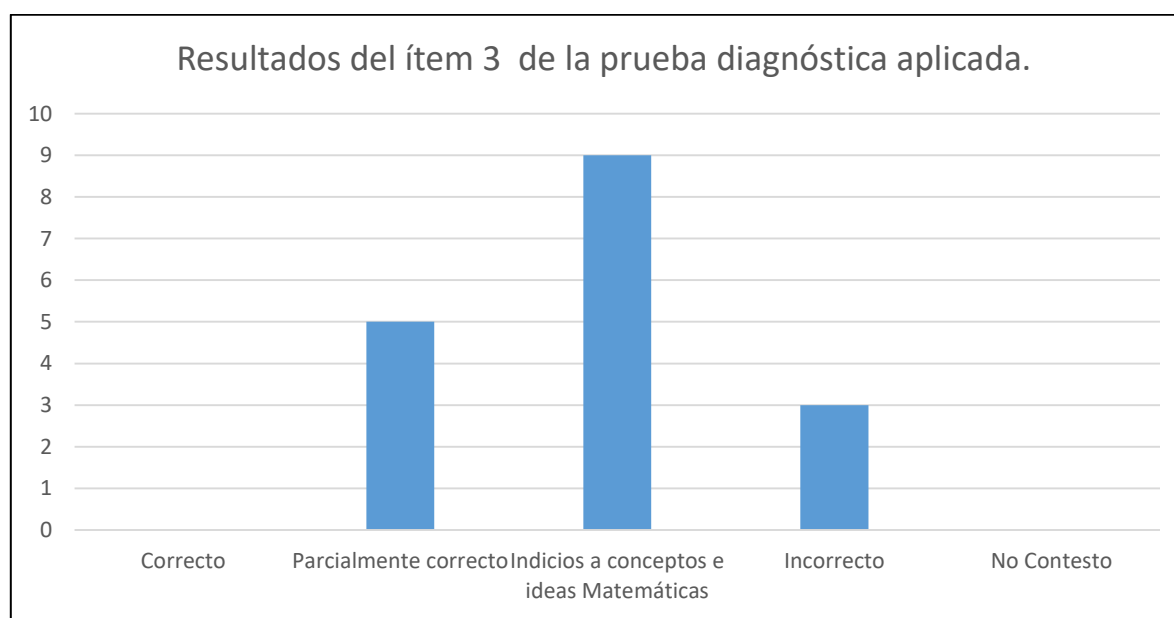
A continuación se presenta la tabla 4.0.3, para evidenciar los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a los indicadores que se mencionaron anteriormente, para el ítem (3), de la prueba diagnóstica.

Tabla 4.0. 3 Resultados del ítem 3 de la prueba diagnóstica aplicada

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Ítem # 3					
a)	0	5	9	3	0
Porcentaje (%)	0	29	53	18	0

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 3 Resultados del ítem 3 de la prueba diagnóstica aplicada



Fuente: Elaboración propia

Los resultados del gráfico anterior reflejan que ningún estudiante de los diecisiete desarrolló el problema de manera correcta, ya que nadie cumplió con los objetivos previstos para este ítem; no obstante, cinco estudiantes desarrollaron el ejercicio de manera parcialmente correcta, pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completo. Nueve estudiantes que son mayoría, presentaron ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes al cálculo de suma infinita considerando las fracciones representadas en la figura del pastel; por último, tres estudiantes no desarrollaron el ejercicio correctamente.

Los resultados anteriores revelan que gran parte de los estudiantes presentan dificultades y cometen errores al plantear sus cálculos y tratar de encontrar la suma correcta en la suma de la serie infinita presentada en el problema, esto se evidenció en la mayoría de las respuestas de los estudiantes, lo que conlleva al desconocimiento de patrones en sumas infinitas que Sierpinski (1985) le denominó “Horror Infiniti”. Los resultados mostrados en la tabla reflejan que solo un pequeño porcentaje de los estudiantes que se les aplicó la prueba diagnóstica pudieron resolver de manera parcialmente correcta los elementos solicitados en la consigna planteada.

4.1.4 Ítem # 4

Se proporciona una figura de un cuadrado de 16 pulgadas de longitud. Luego un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados. Este proceso se repite de manera indefinida. La consigna consiste en que los estudiantes determinen el área de las regiones sombreadas considerando las fracciones representadas en la figura de los cuadrados inscritos.

El objetivo del ítem es que los estudiantes calculen la suma de series infinitas considerando las área de las regiones sombreadas representadas en las figura de los cuadrados inscritos.

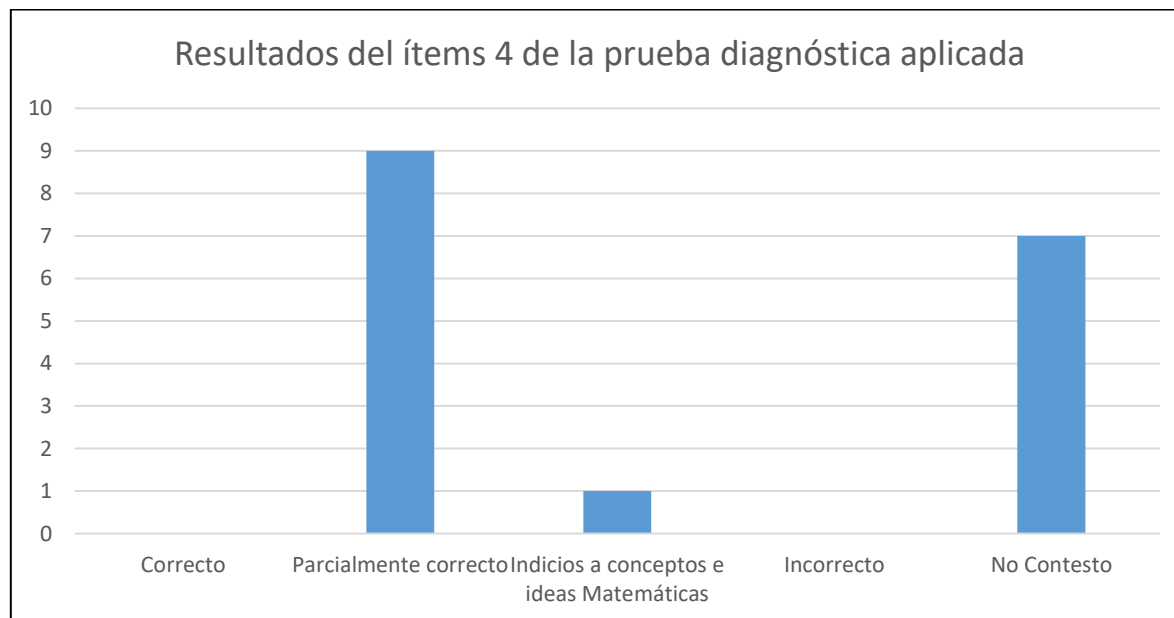
A continuación se presenta la tabla 4.0.4 para evidenciar los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a los indicadores que se mencionaron anteriormente para el ítem 4 de la prueba diagnóstica.

Tabla 4.0. 4 Resultados del ítem 4 de la prueba diagnóstica aplicada

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Ítem # 4					
a)	0	9	1	0	7
Porcentaje (%)	0	53	6	0	41

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 4 Resultados del ítem 4 de la prueba diagnóstica aplicada



Fuente: Elaboración propia

Los resultados del gráfico anterior evidencian que ningún estudiante de los diecisiete desarrolló el problema de manera correcta, ya que nadie cumplió con los objetivos previstos para este ítem; no obstante, nueve estudiantes, que son mayoría, desarrollaron este problema de manera parcialmente correcta, pero no llegaron a terminar todo el ejercicio completamente. Un estudiante presentó ideas vagas o indicios a conceptos correspondientes a determinar el área de las regiones sombreadas considerando las fracciones representadas en la consigna. Siete estudiantes no desarrollaron o no contestaron el problema planteado.

Por tanto, los resultados presentados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de Ingeniería de CEUTEC-UNITEC La Ceiba evidencian las posibles dificultades en la resolución de cada una de las tareas propuestas, que involucren sumas infinitas Sierpinski (1985) de series geométricas y se puede observar en el desarrollo de las consignas por parte de los estudiantes donde se perciben errores de tipo aritmético y de comprensión al resolver problemas (Vrancken, Engler, Gregorini, Müller, Hecklein, y Henzenn 2008). Estos pertenecen a estándares de aprendizaje que deberían ser desarrollados en años de la escolaridad. Por tanto, esto evidencia una debilidad en los conocimientos previos que los estudiantes deberían poseer. Al no contar con los conocimientos adecuados esta falencia tiene repercusión en los años posteriores.

Es así que se corroboran las dificultades que reporta investigaciones como la de Barrera (2006) donde conjetura que hay evidencias que existen dificultades en el aprendizaje y resolución de las matemáticas cuando se les presenta una situación problemática al estudiante, ya que señala que en su mayoría los estudiantes no disponen de los niveles de razonamientos necesarios y suficientes para entender dichos contenidos. Por esta razón,

como afirma Villa (2010), las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de la matemáticas y en situaciones del mundo real, con las cuales se deben implementar nuevas metodologías en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de la tecnología.

Por tanto se puede ubicar globalmente a los estudiantes en un nivel uno como lo muestra la figura 5, ya que no han desarrollado habilidades (Báez, Martínez y Pérez, 2017) en relación a obtener cálculos numéricos correctos, y según los resultados en general, los estudiantes en un 8.42% contestaron las respuestas correctas, un 25.42% contestaron las respuestas parcialmente correctas, un 31.28 con ciertos indicios, un 14.85% incorrecto.

4.2 Sesiones de Trabajo

Este apartado compila y condensa los resultados de la información obtenida durante la investigación utilizando diferentes técnicas para el análisis e interpretación de la información obtenida de los datos tomados a lo largo del proceso de esta investigación. Es así que el siguiente apartado alude al análisis de actividades implementadas durante la investigación (sesiones de trabajo, prueba final) mediante el análisis sistémico desde un primer nivel de análisis que nos proporciona el EOS. Para conocer un poco sobre este enfoque, se señalan los siguientes aspectos principales.

Este primer nivel, sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes)

- Se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso.

- Permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal. (Godino, Font y Wilhelm, 2008:29).

Cada objeto matemático primario que interviene en las prácticas, se describe como:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones: recta, punto, número, media, función).
- Propositiones (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo) (Godino, Batanero y Font, 2012).

En el trabajo de tesis doctoral de Mendoza (2016) y en el artículo de pensamiento variacional emergente realizado por Cabezas y Mendoza (2016), hacen uso de un primer nivel de análisis que propuso Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, J. D. 2000; Godino, J. D. 2002; Font, Godino y Gallardo, 2013) en el enfoque ontosemiótico, pero añaden un nuevo elemento para profundizar en ese análisis. Cabezas y Mendoza (2016) presentan estos objetos y procesos primarios como fases y las describen como se muestra a continuación.

Etapas de análisis didáctico del EOS:

- **Etapas 1** - Se responde a las preguntas básicas.

- **Etapa 2** - Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo.
- **Etapa 3** - Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Esto es una manera de visibilizar lo expresado por los estudiantes a través de representaciones (Duval, 2004a). Además a través de esta fase el lenguaje o código variacional (Caballero y Cantoral, 2013) se muestran.
- **Etapa 4** - Situaciones problema emergentes. Esta etapa se ubica en los procesos generales involucrados en el pensamiento matemático que alude el currículo colombiano el cual reposa en 5 pensamientos (numérico, métrico, espacial, aleatorio, variacional), en 4 procesos generales (Formular, plantear, transformar y resolver problemas; utilizar diferentes registros de representación; utilizar la argumentación; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos) (MEN, 2006). También las situaciones variacionales que proponen Caballero y Cantoral (2013) se ubican en esta etapa.
- **Etapa 5** - Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Esta etapa está vinculada a los registros de representación propuesta por Duval (1999) y a los códigos variacionales que alude Caballero y Cantoral (2013) como uno de los elementos del pensamiento variacional.
- **Etapa 5b** - Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Esta fase está construida y fundamentada en los momentos o indicadores de pensamiento variacional que expone Vasco (2003,2006) cuando hace referencia a lo que permanece fijo, a lo que varía, y a la cuantificación de como varia. De igual

manera los argumentos variacionales propuestos en la corriente socioepistemológica.

También la mirada de los registros de representación se vincula a esta fase.

- **Etapas 6 - Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.**

Al interior de esta última etapa se encuentran ubicadas las diferentes estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) que constituye un elemento de pensamiento variacional. De igual manera se visibilizan las acciones de visualización que realizan los estudiantes al utilizar el software Geogebra como una herramienta de visualización (Villa y Ruiz, 2010). En esta etapa 6 las acciones al interior de un mismo registro o de un registro sobre otro, se ponen en escena tal como lo manifestó Duval (2004a).

En este trabajo de investigación se siguió el orden de los objetos primarios presentados y se hace uso del aporte que Cabezas y Mendoza (2016) han realizado porque se considera que es de gran importancia dada la naturaleza de nuestro estudio.

4.2.1 Sesión de trabajo # 1

La presente sesión de trabajo (Ver anexo 3) muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. Está formada por una sucesión de cuadrados contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 14- 1. La Sesión uno consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco, en el nivel tres hay cinco y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de cuadrados, y se supone que el lado del primer cuadrado mide L de lado.

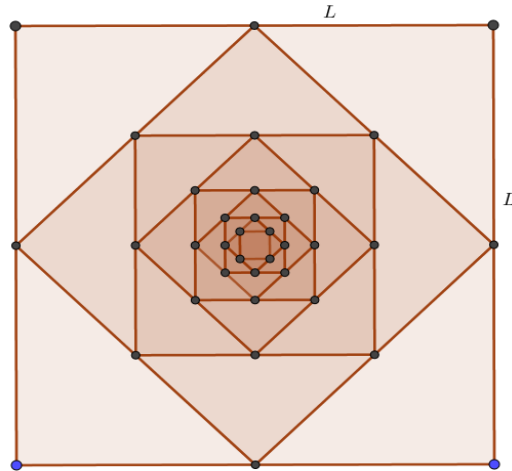


Figura 14- 1 Cuadrados inscritos

Fuente: Elaboración propia

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?

¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figural que muestra sucesión de cuadrados construidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los cuadrados se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de ocho partes: 1) Inicialmente qué figura observas, 2) qué características podrías señalar de esta figura, 3) haga todos los comentarios que considere

pertinentes si la construcción de n figuras inscritas podría realizarse de manera indefinida, 4) si la construcción es posible, cómo es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita, 5) comente de sus perímetros y sus posibles cambios, 6) afirme respecto a sus áreas, 7) haga un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas, 8) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las figuras construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar, entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son características y representativos

G3N1: Observamos que es un cuadrado.

G3N1: Cada uno de sus lados tiene la misma magnitud, y es una figura geométrica.

G3N1: Pensamos que podríamos sacar magnitudes con el teorema de Pitágoras pero no tenemos una diagonal.

G1N1: Toda la figura mide lo mismo, es un cuadrado.

G4N2: El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente.

G1N2:

Figura 14- 2 Afirmaciones mediante registro de lenguaje natural de grupo uno en el nivel dos

cambiado estas?

R= El cuadrado Original es mas grande que el cuadrado inscrito.
La medida del lado del cuadrado Original es mas grande que la medida del lado del cuadrado inscrito en el, al igual que sus areas.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

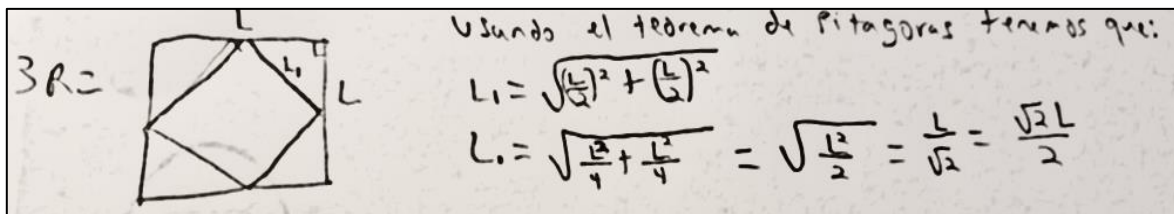
G1N2: Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado.

G1N2: Las medidas de la figura inscrita son la mitad de la primera figura.

G3N2: Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de L^2 .

G1N2: "Su lado es menor que la primera figura.

Figura 14- 3 Cálculo del valor de la hipotenusa obtenida por grupo uno en el nivel dos



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N2: $A = \text{área de la primer figura}$, $A_1 = \text{área de la segunda figura}$.

$A = L^2$, $A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 = \frac{L^2}{2}$, su área es más pequeña que la primera figura.

G4N3: Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

G4N3: El valor de la longitud del lado de la tercera figura es de $1/2L$ el cual se obtuvo usando la fórmula de Pitágoras.

G4N3: Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L$, $P_2 = 2\sqrt{2}L$, $P_3 = 2L$.

G2N3: Si, por que se va reduciendo la medida de las figuras mediante se agrega una figura dentro de otra.

GIN3: El tercer cuadrado inscrito es más pequeño que el segundo cuadrado inscrito, y el segundo es más pequeño que el primer cuadrado.

GIN3: Se aprecian tres cuadrados uno dentro de otro.

GIN3: El cuadrado original es más grande en su área y perímetro respecto a los cuadrados inscritos.

G3N3: Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos.

G3N3: Si, podemos precisar las magnitudes del 3 cuadrado conociendo las magnitudes del 2do, sabiendo que estas magnitudes se reducirán.

GIN3: Sea $P_2 =$ *perímetro* de la tercer figura entonces $P_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = 2L$, el

perímetro si se ha modificado respecto a la segunda figura ya que es menor.

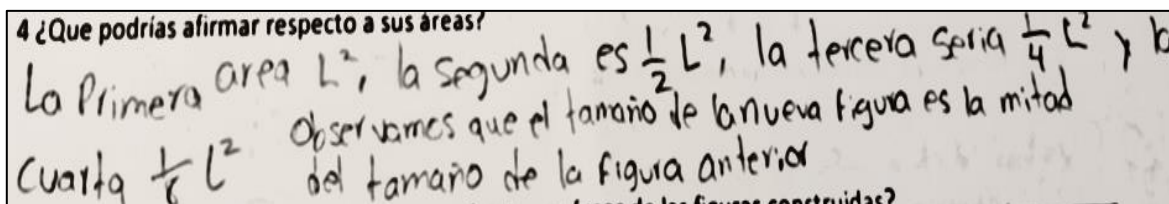
G4N4: Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área.

G4N4: La longitud del lado de la primera seria L , la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2} L$, la tercera es $\frac{1}{2} L$ y la

cuarta es $\frac{\sqrt{2}}{4} L$,... obtenemos un patrón $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.

G4N4:

Figura 14- 4 Afirmaciones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo cuatro en el nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N4: La primera área L^2 , la segunda es $\frac{1}{2} L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4} L^2$, y la cuarta. Observamos

que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior.

G4N4: Entre más figuras aparecen más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo.

G1N4: Si por que el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados

interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas.

G2N4: Si se puede realizar por que existe una secuencia de patrones mediante una fórmula.

G2N4: Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura.

G4N4:

Figura 14- 5 Magnitudes de cuadrados obtenidos por grupo cuatro en el nivel cuatro

5 ¿Elabora un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas?

Nº Figura	Longitud	Perímetro	Áreas
1era	L	$4L$	L^2
2da	$\frac{\sqrt{2}}{2}L$	$2\sqrt{2}L$	$\frac{1}{2}L^2$
3era	$\frac{1}{2}L$	$2L$	$\frac{1}{4}L^2$
4ta	$\frac{\sqrt{2}}{4}L$	$\sqrt{2}L$	$\frac{1}{8}L^2$

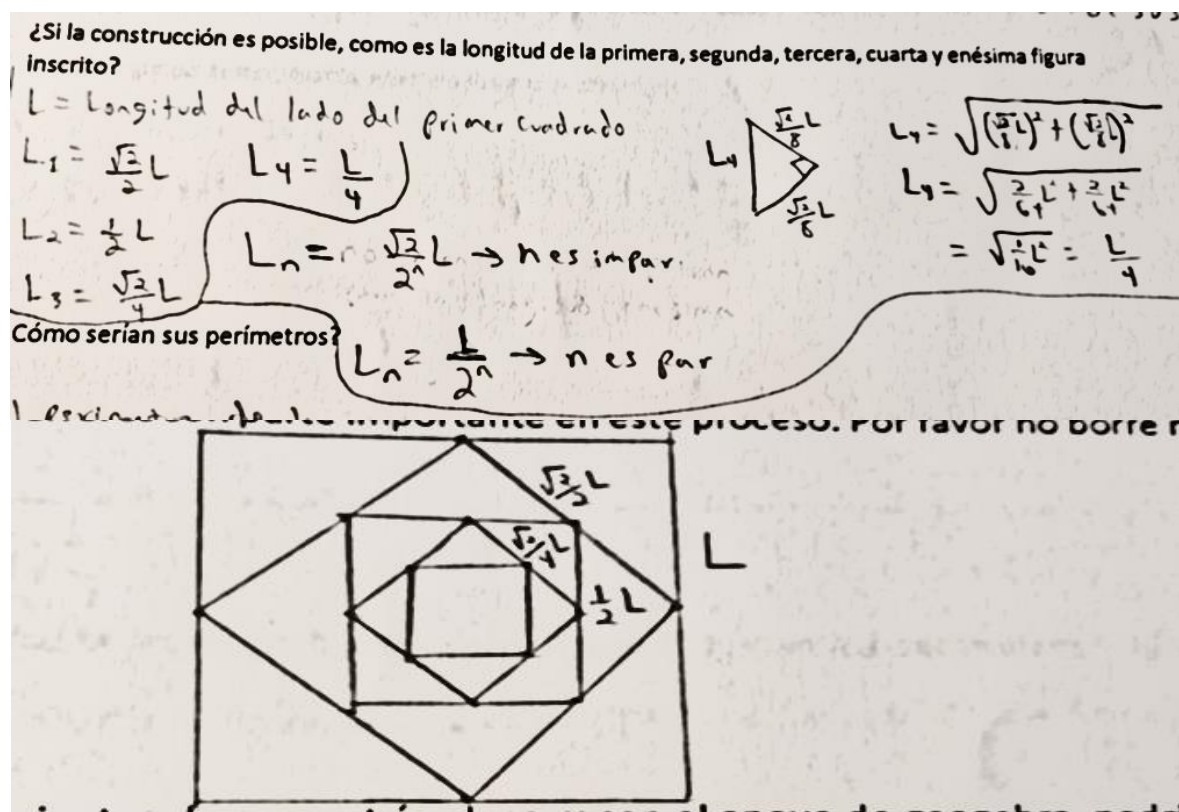
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G3N4: Si podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito.

G3N4: Sus áreas se van reduciendo a medida se van agregando más figuras.

G1N4: El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior.

Figura 14- 6 Descomposición del cuadrado en triángulos y articulación entre registros geométrico y aritmético presentada por grupo uno en el nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: Por tanto sus áreas van decreciendo a medida de van inscribiendo más cuadrados.

Etap 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

▪ Lenguaje previo:

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, cuadrados, polígono regular, longitud, medida, construcción, lado, series, puntos medios, áreas, figura inscrita, perímetro.

▪ Lenguaje emergente:

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica: cuadrado interno, fractal, pequeño, reduciendo, patrón, infinito, triángulos reducidos, teorema, insertando (dentro de otra figura), diagonal, figura geométrica, patrones, construcción (de n figuras inscritas), mitad, secuencia (de patrones mediante una fórmula), medida, datos, fórmula, profundidad, externo, decreciendo, indefinidamente. Se observa en algunas de las palabras expresadas por los estudiantes una vinculación con el lenguaje variacional. De igual forma esta manera de expresar que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales que se ha mencionado.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

Los estudiantes se circunscribieron a realizar lo solicitado en la consigna. En sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado. Podría considerarse que un proceso general al pensamiento matemático como lo es el proceso (formular, plantear, transformar y resolver problemas) no se evidencia ni se propone una nueva situación variacional.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente.

Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L$, $P_2 = 2\sqrt{2}L$, $P_3 = 2L$.

Sí se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área.

Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado.

Su lado es menor que la primera figura.

La longitud del lado de la primera sería L , la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2}L$, la tercera es $\frac{1}{2}L$ y la cuarta

es $\frac{\sqrt{2}}{4}L$,... obtenemos un patrón $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.

La primera área L^2 , la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera sería $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior.

Entre más figuras aparecen, más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo.

El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior.

Sí se puede realizar por que existe una secuencia de patrones mediante una fórmula.

Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura.

Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de L^2 .

Sí porque el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas.

Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos.

Sí podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito.

Por tanto de las afirmaciones anteriores que develan ciertos elementos vinculados al pensamiento variacional: reconocimiento de patrones, momentos de pensamiento, variaciones, utilización de registros, actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales, estrategias variacionales, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, noción del infinito, identificación de objetos matemáticos (polígonos, cuadrados, sucesiones, dimensiones) empleo de algoritmos.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Visual-deductivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales:

Sí se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área. La primera área L^2 , la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera sería $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del

tamaño de la figura anterior. Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura (...), también se va formando más triángulos reducidos.

Los estudiantes utilizan argumentos geométricos: El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente. Entre más figuras aparecen más se reduce. (...) y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

Los estudiantes argumentan que la figura es un fractal por que el proceso de construcción de cuadrados inscritos es indefinidamente.'

Algunos estudiantes hacen relación del registro algebraico con la representación geométrica cuando utilizan el cálculo de lados y áreas y al hacer cálculos vía Teorema de Pitágoras:

Argumentan que mediante el Teorema de Pitágoras van obtenido la magnitud del lado de cada cuadrado que se va inscribiendo, y así calcular el área de cada cuadrado que se va formando en la construcción.

Por tanto de los argumentos anteriores se visibilizan las estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) específicamente el de comparación, por ejemplo cuando hacen referencia al comportamiento del área en su disminución respecto al área del cuadrado anterior. Por otro lado, los códigos variacionales en esta situación se expresan de manera verbal o lenguaje natural, y en algunos casos mediante un registro algebraico.

Etapas 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

En relación a los objetos matemáticos involucrados en el planteamiento de las sesiones de trabajo, tales como cuadrado, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro,

medida, longitud, áreas, figura inscrita, los estudiantes tienen una buena comprensión de ellos; y les permite abordar la sesión sin dificultades.

Emergentes

Fractal:

Los estudiantes tienen concepciones vagas sobre este objeto. No obstante, la aprehensión viene de lo que explicitan como construcción indefinida (de las figuras presentadas en la sesión de trabajo y que tiene vínculo con la noción de construcción infinita), la cual proviene de objetos matemáticos producto de procesos infinitos, que son producidos por construcciones formadas por sucesiones infinitas sin que quede clara la concepción que tienen del mismo.

La mayoría de estudiantes muestran que comprendieron los procedimientos de construcción MEN (2006), ya que explicitaron que siempre existe un patrón de construcción de una nueva figura que indica que su magnitud (área) se reduce a la mitad con cada construcción. En el mismo orden de ideas los estudiantes atestiguan que la construcción de cuadrados es infinito.

Algunos grupos de estudiantes hicieron cálculos y encontraron patrones en las longitudes de los cuadrados inscritos. El grupo G4N4 se percataron de la existencia de los primeros cuatro términos de un patrón aritmético y logrando establecer una fórmula algebraica general acercándose a una relación funcional del lado, para cualquier cuadrado inscrito en términos

$$\text{de lado } n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n L .$$

Los estudiantes utilizaron con cierta propiedad el empleo de geometría plana que involucra las propiedades de paralelogramos, haciendo uso de articulaciones entre el registro algebraico y el referente geométrico.

Los estudiantes usan como medio el software Geogebra para realizar procesos de visualización (Villa y Ruiz (2010), donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a una construcción geométrica.

Con base al análisis de cada una de las etapas del EOS con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen pensamiento variacional (definición operacional, desarrollo de pensamiento variacional, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, entre otros). Todos ellos relacionados con los registros de representación como una manera de visibilizar el accionar de los estudiantes mediante representaciones o códigos variacionales ligados a procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra permite desarrollar. La visualización fue vital durante toda la sesión, puesto que al construir de manera gráfica varias veces esto les permitió observar con mayor detalle el tamaño, las características de cada cuadrado construido y de este modo deducir y comparar las áreas de los mismos.

De lo anterior, se afirma que los estudiantes se ubican en el nivel dos de los niveles del desempeño de los estudiantes en relación al desarrollo del pensamiento variacional de (Báez et al., 2017) ya que los estudiantes establecen relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación, relacionan propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos

informales, reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático para argumentar la solución de problemas sin llegar a formalizar la definición de serie geométrica.

4.2.3 Sesión de trabajo # 2

La presente sesión de trabajo (Ver anexo 3) muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. La actividad está formada por una sucesión de círculos concéntricos en registro geométrico. El círculo de mayor tamaño tiene radio " r ", a su vez, el siguiente círculo tiene la mitad de radio que el círculo anterior, se continúa con un tercer círculo con la mitad del radio del segundo círculo y se continúa el proceso de manera indefinida, tal como se ilustra en la fig. 14- 7. La sesión dos consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco, en el nivel tres hay cinco y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígono, específicamente en la de círculo y se supone que el radio del primer círculo mide r de lado.

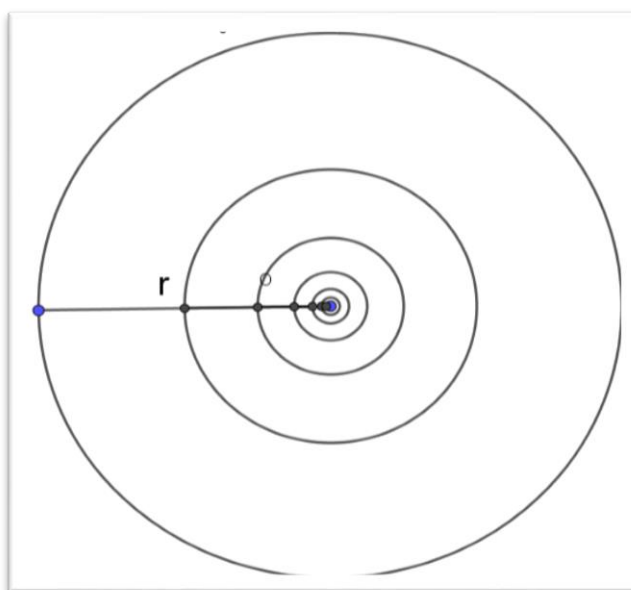


Figura 14- 7 Círculos concéntricos

Fuente: Elaboración propia

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?
¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figura que muestra sucesión de círculos concéntricos construidos, donde sobre un círculo de radio r , se dibuja otro círculo concéntrico de radio $\frac{r}{2}$, y después otro círculo concéntrico a los anteriores de radio $r/4$ y así sucesivamente. La actividad plantea que los círculos concéntricos se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de ocho partes: 1) Inicialmente que figura observas, 2) que características podrías señalar de esta figura, 3) haga todos los comentarios que considere pertinentes, si la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse de manera indefinida, 4) si la construcción es posible, como es la longitud del radio de la primera, segunda, tercera, cuarta y n ésima circunferencia concéntrica 5) comente de sus perímetros, y sus posibles cambios, 6) argumente respecto a sus áreas, 7) haga un listado de los radios, perímetros y áreas de las circunferencias construidas, 8) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las circunferencias concéntricas construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra, y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son característicos y representativos

G2N1: Una figura Geométrica.

G1N1: Una figura geométrica, que está compuesta por una curva, que está a la misma distancia de un punto que se llama centro.

G1N2: El círculo mayor tiene radio r ; el círculo interno tiene la mitad de radio que el círculo anterior.

G1N2:

Figura 14- 8 Magnitudes obtenidas de las circunferencias y afirmaciones mediante registro verbal presentada por grupo uno en el nivel dos

Handwritten mathematical formulas and a verbal statement on a piece of paper:

$$A_1 = \pi r^2$$

$$A_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$C_1 = 2\pi r$$

$$C_2 = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right) = \pi r$$

→ El círculo interior es más pequeño que el exterior y su área es la cuarta parte del círculo grande.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N2: Podemos apreciar círculos dentro de otros círculos lo cual provoca un ciclo infinito de círculos y que se van reduciendo, dándole una especie de profundidad a la figura.

Figura 14- 9 Afirmaciones mediante registro de lenguaje natural de grupo cuatro en el nivel dos

Handwritten verbal statement on a piece of paper:

Podemos apreciar círculos dentro de otros círculos lo cual provoca un ciclo infinito de círculos y que se van reduciendo, dándole una especie de profundidad a la figura.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G3N2: Apreciamos una figura geométrica plana. Que se muestra un radio valorado en r .

Sucesivamente el radio se va formando en figuras con circunferencias de menor tamaño llegando al infinito.

G1N3: Se observan 3 circunferencias concéntricas, una dentro de la otra. La tercera circunferencia concéntrica es más pequeña que la segunda circunferencia, y la segunda circunferencia es más pequeña que la primera circunferencia concéntrica.

G1N3: La tercera circunferencia concéntrica es más pequeña en su área y longitud respecto a las circunferencias anteriores.

G2N3: Se observa que la figura ha cambiado, se ha reducido su área, tomando la mitad del radio de la segunda figura.

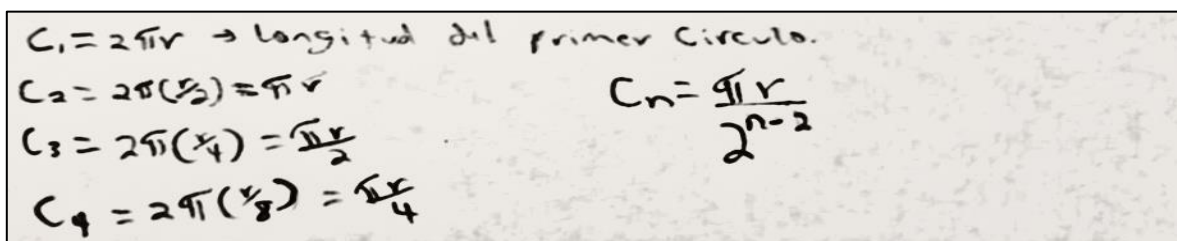
G2N3: La figura ha cambiado con relación a la segunda figura porque su área y perímetro se han reducido.

G3N3: El área de la segunda figura es de $\frac{\pi r^2}{4}$ y el perímetro es de $\pi \cdot r$. La tercera figura, el área es de $\frac{\pi r^2}{16}$ y el perímetro es de $\frac{\pi r}{2}$. Según los hallazgos si se modificaron, las magnitudes.

G1N4: Sus áreas se van reduciendo, a medida se van añadiendo círculos concéntricos.

G1N4: “Sí, ya que el proceso de ir construyendo circunferencias va a seguir indefinidamente; siempre el círculo de adentro va a ser de menor área que el círculo de afuera, y los círculos interiores se van construyendo concéntricamente de acuerdo a los círculos exteriores y sus áreas serán la mitad del anterior.

Figura 14- 10 Secuencia de las longitudes de las circunferencias presentadas por el grupo uno en el nivel cuatro



Handwritten mathematical formulas showing the sequence of circumferences:

$$C_1 = 2\pi r \rightarrow \text{longitud del primer círculo.}$$

$$C_2 = 2\pi\left(\frac{r}{2}\right) = \pi r$$

$$C_3 = 2\pi\left(\frac{r}{4}\right) = \frac{\pi r}{2}$$

$$C_4 = 2\pi\left(\frac{r}{8}\right) = \frac{\pi r}{4}$$

$$C_n = \frac{\pi r}{2^{n-2}}$$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: Las áreas y perímetros van disminuyendo de valor.

G1N4: El área va decreciendo la cuarta parte comparándola a la figura concéntrica anterior.

G1N4: Se pueden construir infinitos círculos dentro de la figura original, ya que la medida de sus áreas y longitudes siempre puede dividirse.

G1N4: Cada vez que se agregan más círculos concéntricos, cada círculo va disminuyendo en sus medidas; el radio de las circunferencias es cada vez más pequeño.

G1N4:

Figura 14- 11 Secuencia, patrón y conclusiones de las áreas de las circunferencias calculadas por el grupo uno en el nivel cuatro

Handwritten student work showing the calculation of areas for concentric circles and their conclusions. The work is written on a grid background.

$R = A_1 = \text{area de el círculo número uno.}$

$A_1 = \pi r^2$
 $A_2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{4}$
 $A_3 = \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{16}$
 $A_4 = \pi \left(\frac{r}{8}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{64}$
 $A_5 = \pi \left(\frac{r}{16}\right)^2 = \pi \frac{r^2}{256}$
 $\vdots$
 $A_n = \pi \frac{r^2}{4^{n-1}}$

por tanto sus áreas van disminuyendo a medida se van construyendo círculos concéntricos.
 El área de cada círculo es un cuarto del área del círculo anterior.
 entre más se construyen más círculos concéntricos sus áreas se hacen más pequeñas hasta ser un número bien pequeño.

...las circunferencias concéntricas construidas.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: Entre más se construyen más círculos concéntricos sus áreas se hacen más pequeñas hasta ser un número bien pequeño.

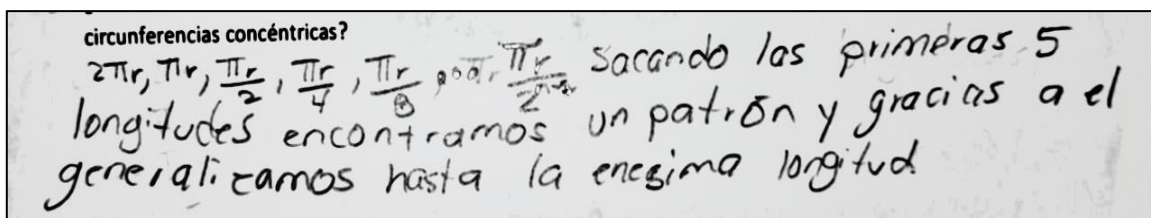
G1N4: Puede haber infinitos círculos dentro de la primera figura.

G1N4: “El área de cada círculo es un cuarto del área del círculo del anterior.

G2N4: $2\pi r, \pi r, \frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{4}, \frac{\pi r}{8}, \dots, \frac{\pi r}{2^{n-1}}$ sacando las primeras 5 longitudes encontramos un

patrón y lo generalizamos hasta la enésima longitud.

Figura 14- 12 Patrones y conclusiones de las longitudes de las circunferencias observadas por el grupo dos en el nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G2N4: Sus perímetros y áreas van disminuyendo a medida que se va creando circunferencias dentro de otra.

G2N4: Sus áreas y perímetros tienen un patrón que va disminuyendo hasta el infinito.

G3N4: Sí, porque existe una fórmula para encontrar el patrón mediante límites cuando tienden a infinito.

G3N4: Observamos una relación entre las circunferencias de las figuras (...). Solo que las circunferencias disminuyen a la mitad de la figura anterior, conforme al patrón.

G4N4: Hemos observado que estas van decreciendo en tamaño (...).

G4N4: “Sí se puede porque cada círculo tiene un radio que se va reduciendo a la mitad y eso sigue hasta un círculo infinito; cada círculo se va a reducir, pero nunca se van a tocar”.

G4N4: Hemos observado que en 3 magnitudes existe un patrón de reducción a la mitad, lo cual se ha comprobado obteniendo el área y perímetro de una cuarta figura.

Figura 4- 13 Secuencia de las áreas y perímetros de las circunferencias calculadas por el grupo cuatro en el nivel cuatro

Handwritten mathematical formulas and text:

Area formulas:

$$A_1 = \pi r^2$$

$$A_2 = \frac{1^2}{4} \pi$$

$$A_3 = \frac{r^2}{16} \pi$$

$$A_4 = \frac{r^2}{64} \pi$$

Text: El área de una nueva figura será la mitad del área de la figura anterior.

Perimeter formulas:

$$P_1 = 2\pi r$$

$$P_2 = r\pi$$

$$P_3 = \frac{r}{2}\pi$$

$$P_4 = \frac{r}{4}\pi$$

Text: El Perímetro de una nueva figura será la mitad del Perímetro de la figura anterior.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

▪ Lenguaje previo:

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, círculos, circunferencias, longitud, medida, radio, construcción, series, áreas, figura concéntrica, circunscrita.

▪ Lenguaje emergente:

Términos y expresiones usadas para referir conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de las sesiones de trabajo: pequeño, reduciendo, patrón, infinito, figura geométrica, patrones, magnitudes, construir n circunferencias, infinito, profundidad, decreciendo, infinitamente hacia dentro, modifican, cambiando, disminuyendo, menor tamaño, límites, tienden a infinito, profundidad, reduciendo, mayor, interno, añadiendo, indefinidamente, adentro, menor, círculos interiores, círculos exteriores, decreciendo, infinitos círculos, patrón. Se observa en algunas de las palabras expresadas por los estudiantes formas de manifestar el cambio y la variación, que a su vez contribuyen en la generación de argumentos variacionales (Caballero y Cantoral, 2013). En lenguaje fue notable el uso de recursos lingüísticos donde

utilizaron términos, expresiones, notaciones, entre otros. De igual forma esta manera de expresarse que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales que se ha mencionado anteriormente.

Fase 4: Situaciones de problema emergentes

En cuanto a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las consignas planteadas en la situación y presentaron respuestas acordes a lo solicitado. En sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado producto de la situación propuesta. Podría considerarse que un proceso general al pensamiento matemático como lo es el proceso (formular, plantear, transformar y resolver problemas) se considera que no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que responda sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Por tanto no se evidencia ni se propone una nueva situación variacional.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Sí se puede construir n circunferencias, porque se va introduciendo una figura a la mitad de cada radio.

Sus áreas se van reduciendo, a medida se van añadiendo círculos concéntricos.

La figura ha cambiado con relación a la segunda figura porque su área y perímetro se han reducido.

Sus perímetros y áreas van disminuyendo a medida que se va creando circunferencias dentro de otra.

El área de la segunda figura es de $\frac{\pi r^2}{4}$ y el perímetro es de πr . La tercera figura, el área es de $\frac{\pi r^2}{16}$ y el perímetro es de $\frac{\pi r}{2}$. Según los hallazgos, sí se modificaron las magnitudes.

Hay un patrón numérico en la construcción de cada circunferencia construida la cual será más pequeña y, por lo tanto, su área será menor.

Existe una fórmula para encontrar el patrón mediante límites cuando tienden a infinito

Se puede porque cada círculo tiene un radio que se va reduciendo a la mitad y eso sigue hasta un círculo infinito.

El área de cada círculo es un cuarto del área del anterior.

El círculo mayor tiene radio r ; el círculo interno tiene la mitad de radio que el círculo anterior.

La circunferencia concéntrica es más pequeña que la segunda circunferencia, y la segunda circunferencia es más pequeña que la primera circunferencia concéntrica.

La tercera circunferencia concéntrica es más pequeña en su área y longitud respecto a las circunferencias anteriores.

Sus áreas se van reduciendo, a medida se van añadiendo círculos concéntricos.

El área va decreciendo la cuarta parte comparándola a la figura concéntrica anterior.

Cada vez que se agregan más círculos concéntricos, cada círculo va disminuyendo en sus medidas; el radio de las circunferencias es cada vez más pequeño.

El área de cada círculo es un cuarto del área del círculo del anterior.

Por tanto de las afirmaciones anteriores develan ciertos elementos vinculados al pensamiento variacional como ser: identificación de patrones numéricos, actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, cierta aproximación (implícita) a la idea de infinito (Mendoza, 2013), empleo de algoritmos, así como relación numérica existente entre el área de cada círculo con respecto al área del círculo anterior.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Deductivo - intuitivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales.

Visual, recurrieron a la visualización Hitt (1998b) cuando construyeron más circunferencias y dedujeron patrones de la construcción.

Algunos estudiantes argumentan variacionalmente (Caballero y Cantoral, 2013) y hacen conclusiones mediante registro en lenguaje natural (Duval, 2006) en relación con aspectos variacionales relacionados a la situación problema.

Varios estudiantes reconocen patrones numéricos (Vasco, 2006) de la serie geométrica. El reconocimiento del patrón numérico $(1/4)$ lo expresan mediante el registro de lenguaje natural, y que se pueden construir infinitos círculos dentro de la figura original, ya que la medida de sus áreas y longitudes siempre puede dividirse.

Argumentan que el proceso de ir construyendo circunferencias va a seguir indefinidamente; siempre el círculo de adentro va a ser de menor área que el círculo de afuera y los círculos interiores se van construyendo concéntricamente de acuerdo a los círculos exteriores y sus áreas serán la mitad de la figura anterior.

Por tanto de los argumentos anteriores se visibilizan los procesos generales (MEN, 2006), las estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) específicamente estimación, por ejemplo cuando hacen referencia que se pueden construir infinitos círculos dentro de la figura original, ya que la medida de sus áreas y longitudes siempre puede dividirse, esto implica que hay una forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional. Por otro lado los códigos variacionales en esta situación se plantean de manera verbal o lenguaje natural y en algunos casos mediante un registro algebraico.

Etapas 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad, tales como sucesión, círculos, circunferencias, longitud, radio, construcción, series, áreas, figura concéntrica, circunscrita, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos; de hecho, esto les permite abordar la sesión de trabajo, lo cual hace que los estudiantes en su mayoría enfrenten la situación problema sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes:

Los estudiantes reflejan aproximaciones a pensamiento de tipo variacional en sus respuestas ya que presentan evidencias de desarrollo de pensamiento variacional (MEN, 2006) al analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye los valores en las secuencias o series de figuras, e intentan formular procedimientos, algoritmos o fórmulas que permitan reproducir el mismo patrón.

Los estudiantes reflejan habilidades de argumentación de tipo variacional, ya que dan explicaciones que muestran y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio y variación al calcular magnitudes de círculos y generar patrones. De igual manera los estudiantes revelan un manejo de los registros algebraico y numérico (Duval, 2006) puesto que, por un lado, están calculando áreas de circunferencias y calculando razones dando cuenta del registro numérico. Por otro lado recurren al registro algebraico sin problemas para obtener las áreas solicitadas, considerando las condiciones iniciales de los problemas.

Los estudiantes hacen uso de registros de lenguaje natural para expresar la relación numérica existente entre el área de cada círculo con respecto al anterior, y algebraico (Duval, 2006) apelando a este último para efectuar los cálculos de las áreas y perímetros de las circunferencias.

Asimismo reconocen el patrón vinculado que en los círculos sus áreas van disminuyendo un cuarto respecto a la figura concéntrica anterior y lo manifiestan mediante el registro de lenguaje natural.

Los estudiantes entienden el proceso de construcción mediante el empleo del infinito en variados registros, los cuales afirman que se puede construir una y otra y otra circunferencia concéntrica a la primera y siempre se puede seguir haciendo este proceso.

Los estudiantes recurrieron a la visualización (Hitt, 1998b) cuando construyeron circunferencias concéntricas y dedujeron patrones de la construcción. De igual manera usan como medio el software Geogebra para realizar dichos procesos de visualización (Villa y

Ruiz, 2010), donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a las construcciones geométricas.

Con base al análisis de cada una de las etapas del EOS con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen pensamiento variacional (definición operacional, elementos del pensamiento variacional, desarrollo de pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, procesos vinculados al pensamiento matemático, entre otros). Todos articulados con los registros de representación como una manera de visibilizar los procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra permite desarrollar. La visualización fue importante durante toda la sesión a momento de construir circunferencias y deducir patrones (Vasco, 2006) en los problemas de la sesión de trabajo antes mencionada.

Se puede afirmar que los estudiantes en esta sesión de trabajo se ubican en el nivel dos de los niveles del desempeño de los estudiantes en relación al desarrollo del pensamiento variacional de (Báez et al., 2017), ya que los estudiantes establecen relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación, y comunican, reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático para argumentar la solución de problemas.

4.2.4 Sesión de trabajo # 3

La presente sesión de trabajo (Ver anexo 3) muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. La actividad está formada por una sucesión de semicircunferencias presentadas en el registro geométrico. Se proporciona una semicircunferencia inicial AB, que a su vez se subdivide en dos semicircunferencias congruentes más, AO Y BO, las que continúan subdividiendo en semicircunferencias congruentes de manera indefinida, tal como se ilustra en la fig. 4- 14. La sesión tres consta de tres niveles: en el nivel uno hay cinco ítem,

en el nivel dos hay cinco y en el nivel tres hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígono, específicamente en la de círculo y se supone que el diámetro de la semicircunferencia inicial mide D .

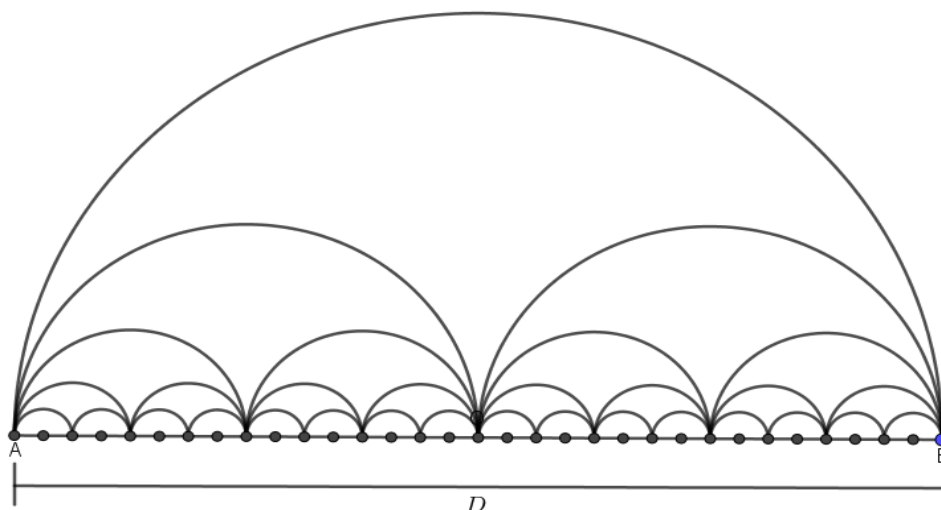


Figura 14- 14 Semicírculos
Fuente: Elaboración Propia

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?
¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro geométrico que muestra sucesión de semicírculos construidos, donde se construye un semicírculo con el

segmento AB como diámetro. Luego, se divide AB en dos partes iguales AO y BO, y se construyen dos semicírculos como lo indica la figura. Se continúa dividiendo y construyendo semicírculos de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de ocho partes: 1) Inicialmente que figura observas, 2) que características podrías señalar de esta figura, 3) haga todos los comentarios que considere pertinentes si la construcción de n semicircunferencias podría realizarse de manera indefinida, 4) si la construcción es posible, cómo es la longitud del diámetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima semicircunferencia 5) comente de sus perímetros y sus posibles cambios, 6) argumente respecto a sus áreas, 7) haga un listado de los diámetros, perímetros y áreas de las semicircunferencias construidas, 8) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las semicircunferencias construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea. Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar, entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones.

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son características y representativos

G1N1: Se observa una semicircunferencia compuesta por dos semicircunferencias.

G1N1: Se precia una figura geométrica, con un semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ e

internamente dos semicircunferencias; cada una con diámetro $\frac{AB}{2}$.

G1N1:

Figura 14- 15 Conclusiones sobre áreas de semicircunferencias en diferentes registros del grupo uno referentes al nivel uno

El area de la figura inicial con $r_1 = \frac{D}{2}$ es $A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{\pi (\frac{D}{2})^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8}$

El area de los semicirculos con $r_2 = \frac{D}{4}$ es

$$A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi (\frac{D}{4})^2}{2} = \frac{\pi D^2}{32}$$

→ El Area total es

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi D^2}{8} + \frac{\pi D^2}{32} = \frac{\pi D^2}{16}$$

* Las semicircunferencias interiores son más pequeñas que la semicircunferencia del exterior, y la suma de sus áreas es la mitad de la semicircunferencia grande, mientras que la suma de sus perímetros es igual al perímetro de la semicircunferencia original.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N1: Las semicircunferencias interiores son más pequeñas que la semicircunferencia del exterior y la suma de sus áreas es la mitad de la semicircunferencia grande, mientras que la suma de sus perímetros es igual al perímetro de la semicircunferencia original.

G2N1: Sus áreas disminuyen a medida que las semicircunferencias se hacen más pequeñas.

G1N1: Sí, se han modificado reduciendo su valor cada vez que se inscribe una nueva figura.

G3N1: Las áreas van disminuyendo conforme agreguemos más figuras.

G4N1: Se observa que se divide a la mitad de un círculo, lo cual lo convierte en semicircunferencia.

G4N1: Las diferentes magnitudes, áreas, diámetros y perímetros, se han reducido la mitad respecto a la figura anterior.

G1N2: Podemos percibir a medida se construyen semicírculos más pequeños un efecto de profundidad.

G1N2: Se percibe 1 semicircunferencia y dentro de ella dos semicircunferencias en sus dos radios, luego dentro de las 2 semicircunferencias hay construidas 4 semicircunferencias más en sus radios respectivamente.

G1N2:

Figura 14- 16 Articulaciones y conclusiones entre registros verbal y aritmético presentada por grupo uno referentes al nivel dos

Sea A_3 el área de cada semicircunferencia pequeña de la figura y S_3 la longitud.

con $D = 8r \rightarrow R = r$

$$S_3 = 4(\pi r)$$

$$= 4\left(\pi \frac{D}{8}\right) = \frac{\pi D}{2}$$

$$A_3 = 4\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{R}{8}\right)^2$$

$$= 2\pi \frac{D^2}{64} = \frac{\pi D^2}{32}$$

* La suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es la cuarta parte de la semicircunferencia grande.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N2: La suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es la cuarta parte de la semicircunferencia grande.

G1N2: La suma de las áreas de los cuatro semicírculos resulta igual que el área de uno de los dos semicírculos anteriores que están en el interior del primer semicírculo.

G1N2:

Figura 14- 17 Conclusiones mediante registro verbal y aritmético de la suma de las áreas de las cuatro semicircunferencias obtenidas por el grupo uno referente al nivel dos.

El área de los semicírculos más pequeños de la figura, con $r_2 = \frac{D}{8}$

$$A_3 = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi (\frac{D}{8})^2}{2} = \frac{\pi D^2}{128}$$

El área total de los cuatro semicírculos es:

$$4A_3 = \frac{4\pi D^2}{128} = \frac{\pi D^2}{32}$$

* La suma de las áreas de los cuatro semicírculos, resulta igual que el área de uno de los dos semicírculos anteriores que están en el interior del primer semicírculo.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N2: Podemos percibir que cada vez que se van agregando semicírculos dentro de los demás semicírculos, pero a menor tamaño, sus radios se van reduciendo.

G4N2: Se percibe que para cada semicírculo dentro de ellos siempre habrá dos semicírculos más.

G4N2: Si se han modificado por que cada vez se reduce más y más cada magnitud, mientras más semicírculos se agreguen más se hacen pequeños.

G3N2: $A_1 = \frac{\pi}{8}d^2, A_2 = \frac{\pi}{32}d^2, A_3 = \frac{\pi}{128}d^2, \dots$ podemos determinar que las áreas irán disminuyendo conforme agreguemos más figuras.

G2N2: Se percibe que la figura ha cambiado por que dentro de la semicircunferencia ella misma se divide en dos a partir de la mitad del diámetro y luego dentro de esta nueva figura creada se divide en dos semicírculos con un tamaño más reducido partiendo desde la mitad del diámetro de la figura anterior.

G1N3: La construcción de n semicircunferencias se puede realizar haciendo el proceso de subdividir las semicircunferencias una vez, y otra vez sin detenerse. A medida haya más semicircunferencias dentro de la primera, el área de esta ira disminuyendo a medida que se van construyendo más, y lo mismo sucederá con sus perímetros y diámetros.

G1N3:

Figura 14- 18 Secuencia de las longitudes de las semicircunferencias calculadas por el grupo uno referentes al nivel tres

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \pi\left(\frac{D}{2}\right) \rightarrow \text{es la longitud de la primer semicircunferencia} \\
 S_2 &= \pi\left(\frac{D}{4}\right) \rightarrow \text{La suma de las 2 semicircunferencias es } 2S_2 = 2\pi\frac{D}{4} = \frac{\pi D}{2} \\
 S_3 &= \pi\left(\frac{D}{8}\right) \rightarrow \text{La suma de las 4 semicircunferencias es } 4S_3 = 4\pi\frac{D}{8} = \frac{\pi D}{2} \\
 S_4 &= \pi\left(\frac{D}{16}\right) \rightarrow \text{La suma de las 8 semicircunferencias } 8S_4 = 8\pi\left(\frac{D}{16}\right) = \frac{\pi D}{2} \\
 &\vdots \\
 S_n &= \pi\left(\frac{D}{2^n}\right) \rightarrow \text{La suma de las } 2^{n-1} \text{ semicircunferencias } 2^{n-1}S_n = 2^{n-1}\pi\left(\frac{D}{2^n}\right) = \frac{\pi D}{2}
 \end{aligned}$$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G2N3: Si se puede realizar la construcción de n semicircunferencias mediante la operación de un patrón establecido.

G2N3: $\frac{\pi}{2}d, \frac{\pi}{4}d, \frac{\pi}{8}d, \frac{\pi}{16}d, \dots$ sus perímetros son infinitos, pero llevan una secuencia.

G4N3:

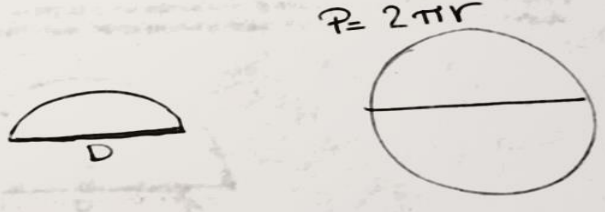
Figura 14- 19 Conclusiones de áreas y perímetros de las semicircunferencias en el cálculo de áreas y perímetros por el grupo cuatro referentes al nivel tres

2. Para $F = D$ ($r = \frac{d}{2}$)
 2^{nd} $F = \frac{d}{2}$ ($r = \frac{d}{4}$)

$P = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$
 $P_1 = \pi \left(\frac{d}{2}\right) = \pi \frac{d}{2}$
 $P_2 = \pi \left(\frac{d}{4}\right) = \pi \frac{d}{4}$

$A = \pi r^2$
 $A_1 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$
 $A_2 = \pi \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{16}$

Si se ha modificado
 Hemos notado que tanto
 en el área como en el
 perímetro se reduce por la
 mitad.



$P = 2\pi r$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G2N3: Sus áreas van disminuyendo conforme se van insertando figuras dentro de otra.

G1N3: El perímetro de cada semicircunferencia va disminuyendo a la mitad, y este perímetro disminuye proporcionalmente con el diámetro de cada semicircunferencia ya que esta también disminuye.

G1N3: En general, cada vez que se divide un semicírculo se obtienen dos, y estos al sumarlos tanto su perímetro o su área, son iguales al semicírculo anterior.

G1N3:

Figura 14- 20 Secuencias de las áreas de las semicircunferencias calculadas por el grupo uno referentes al nivel tres

A_1 = Área del semicírculo mayor

$r_1 = \frac{D}{2} \rightarrow A_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8} \rightarrow$ es el área del primer semicírculo

$r_2 = \frac{D}{4} \rightarrow A_2 = \frac{\pi \left(\frac{D}{4}\right)^2}{2} = \frac{\pi D^2}{32} \rightarrow$ La suma de los 2 semicírculos es $2A_2 = \frac{2\pi D^2}{32} = \frac{\pi D^2}{16}$

$r_3 = \frac{D}{8} \rightarrow A_3 = \frac{\pi \left(\frac{D}{8}\right)^2}{2} = \frac{\pi D^2}{128} \rightarrow$ La suma de los 4 semicírculos es $4A_3 = \frac{\pi D^2}{32}$

$\vdots$
 $r_n = \frac{D}{2^n} \rightarrow A_n = \frac{\pi \left(\frac{D}{2^n}\right)^2}{2} = \frac{\pi D^2}{2^{2n+1}} \rightarrow$ La suma de las 2^{n+1} semicírculos $A_n = \frac{2^{n+1} \pi D^2}{2^{2n+1}} = \frac{\pi D^2}{2^{n+2}}$

¿cómo disminuyen los perímetros y áreas de las semicircunferencias construidas?

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N3: Las áreas y perímetros se van reduciendo de valor.

G3N3: Si podría establecerse la construcción de n semicircunferencias porque existe una fórmula para encontrar esas sumas infinitas.

$$D_1 = d \quad P_1 = \pi \frac{d}{2} \quad A_1 = \pi \frac{d^2}{8}$$

G3N3: $D_2 = \frac{d}{2} \quad P_2 = \pi \frac{d}{4} \quad A_2 = \pi \frac{d^2}{32}$, la relación en las circunferencias es que se divide en dos

$$D_3 = \frac{d}{4} \quad P_3 = \pi \frac{d}{8} \quad A_3 = \pi \frac{d^2}{128}$$

$$\vdots$$

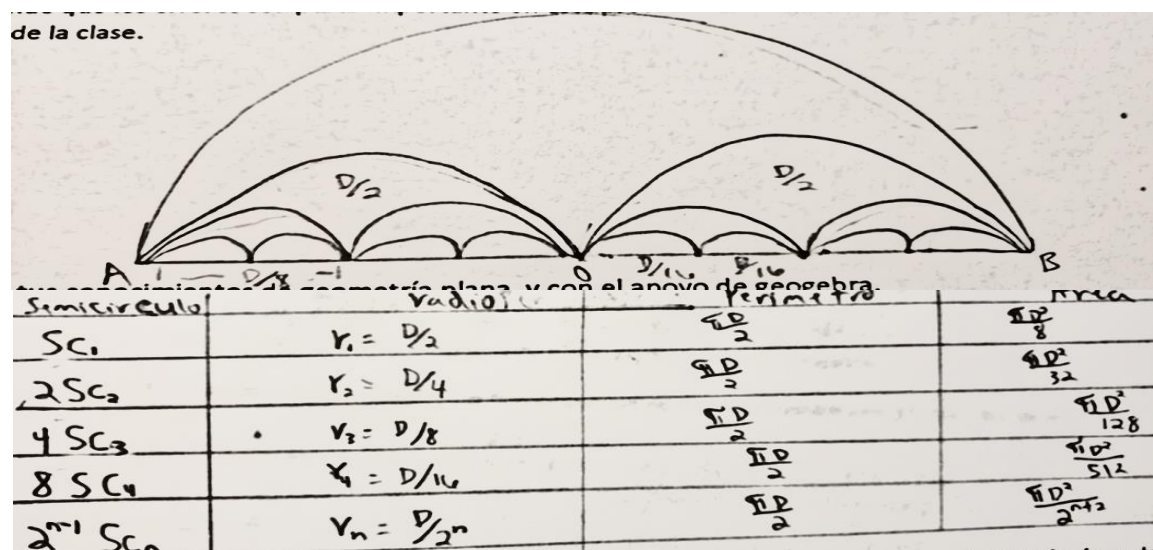
sus perímetros y dividen en cuatro sus áreas.

G4N3: Sí se podría realizar dado que el área y el perímetro tienen un patrón, en el perímetro el denominador cambia por el doble del mismo $P = \pi \left(\frac{d}{2^n} \right)$.

G1N3: Al sumar los perímetros de las semicircunferencias que surgen de cada subdivisión se obtiene una longitud del perímetro igual a la semicircunferencia anterior, o sea la semicircunferencia subdividida.

G1N3:

Figura 14- 21 Resumen de magnitudes, semicircunferencias y sus diámetros presentados por el grupo uno referentes al nivel tres



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N3: La relación observada en los perímetros y áreas de las semicircunferencias es un patrón de reducción a la mitad de las nuevas figuras respecto a la figura anterior.

G1N3: La longitud del perímetro va reduciéndose a la mitad al dividir las semicircunferencias.

G1N3: Se van haciendo infinitos semicírculos.

G1N3: En conclusión, se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, si sumamos las áreas de los 2 semicírculos contruidos en la segunda figura, nos dará el área de la primera y así sucesivamente.

Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

- **Lenguaje previo:**

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, semicírculos, semicircunferencias, longitud, medida, diámetro, construcción, series, áreas, figura concéntrica, radio, punto.

- **Lenguaje emergente:**

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de las sesiones de trabajo: disminuyen, pequeñas, cambiado, tamaño, reducido, patrón, infinitos, secuencia, disminuyendo, reducción, insertando, modificado, reduciendo, añaden, fórmula, infinitas, agregando, dentro, efecto de profundidad, modificado, reduce, proporcionalmente, sucesivamente, internamente, interiores, exterior, grande, cuarta parte,

subdividir, construyendo, divide, subdivisión, infinitos semicírculos. Se evidencia en lo expresado por los estudiantes, modos de manifestar el cambio y la variación que a su vez contribuyen en la generación de argumentos variacionales (Caballero y Cantoral, 2013). De igual forma esta manera de hacer referencia a situaciones de cambio que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales que se ha mencionado anteriormente.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, se circunscribieron a realizar lo solicitado en la consigna. En sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado. Podría considerarse que un proceso general al pensamiento matemático como lo es el proceso de formular, plantear, transformar y resolver problemas no se evidencia, ni se propone una nueva situación variacional.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Algunos estudiantes afirman que las semicircunferencias interiores son más pequeñas que la semicircunferencia del exterior, y la suma de sus áreas es la mitad de la semicircunferencia grande, mientras que la suma de sus perímetros es igual al perímetro de la semicircunferencia original.

De igual manera mencionan que la suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es la cuarta parte de la semicircunferencia grande y que la suma de las áreas de los cuatro semicírculos, resulta igual que el área de uno de los dos semicírculos anteriores que están en el interior del primer semicírculo.

Aluden que el perímetro de cada semicircunferencia va disminuyendo a la mitad, y este perímetro disminuye proporcionalmente con el diámetro de cada semicircunferencia, ya que esta también disminuye. De igual manera la longitud del perímetro va reduciéndose a la mitad al dividir las semicircunferencias. Sus áreas disminuyen a medida que las semicircunferencias se hacen más pequeñas.

(...) la figura ha cambiado por que dentro de la semicircunferencia ella misma se divide en dos a partir de la mitad del diámetro y luego dentro de esta nueva figura creada se divide en dos semicírculos con un tamaño más reducido partiendo desde la mitad del diámetro de la figura anterior.

Si se puede realizar la construcción de n semicircunferencias mediante la operación de un patrón establecido. Sus áreas van disminuyendo conforme se van insertando figuras dentro de otra.

Sí, se han modificado reduciendo su valor cada vez que se inscribe una nueva figura.

Sí hay relación, encontramos que tanto en los perímetros y áreas hay patrones, cada figura depende de la mitad de otra figura.

Las diferentes magnitudes, áreas, diámetros y perímetros, se han reducido la mitad respecto a la figura anterior.

(...) a medida se construyen semicírculos más pequeños un efecto de profundidad.

Si se han modificado por que cada vez se reduce más y más cada magnitud, mientras más semicírculos se agreguen, más se hacen pequeños.

Por tanto de las afirmaciones anteriores se reflejan ciertos elementos vinculados al pensamiento varicional entre los cuales están: reconocimiento de patrones que se constituye en una herramienta necesaria para el estudio de la variación (Vasco, 2006), momentos de pensamiento, utilización de registros, actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales, estrategias variacionales, procesos generales (MEN, 1998) vinculados al pensamiento matemático como ser formular, plantear, resolver problemas, todos ellos vinculados al pensamiento matemático.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Los estudiantes argumentan que han comprobado que las áreas se van reduciendo cada vez que se añaden más semicircunferencias. De igual manera argumentan la relación existente entre las semicircunferencias y el proceso de subdivisión de estas.

Algunos argumentan que se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, si suman las áreas de los 2 semicírculos contruidos en la segunda figura, eso les dará el área de la primera figura y así sucesivamente.

Se podría realizar dado que el área y el perímetro tienen un patrón, en el perímetro ya que el denominador cambia por el doble del mismo $P = \pi \left(\frac{d}{2n} \right)$.

La suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es la cuarta parte de la semicircunferencia grande.

Pocos estudiantes discrepan que el perímetro de cada semicircunferencia va disminuyendo a la mitad, y este perímetro disminuye proporcionalmente con el diámetro de cada semicircunferencia.

Ellos argumentan que, en efecto, al sumar los perímetros de las semicircunferencias que surgen de cada subdivisión se obtiene una longitud del perímetro igual a la semicircunferencia anterior, o sea, la semicircunferencia subdividida.

En conclusión, deducen que se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, que si se suma las áreas de los 2 semicírculos construidos en la segunda figura, dará el área de la primera y así sucesivamente.

Por consiguiente de los argumentos anteriores, se evidencian los códigos variacionales que se plantean de manera verbal o lenguaje natural y mediante registro algebraico (Duval, 2006) para justificar la construcción de una secuencia de medidas relacionadas a los elementos de las semicircunferencias. Así mismo se visibilizan las estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) específicamente la seriación, por ejemplo cuando hacen referencia a que se podría encontrar la fórmula dado que el área y el perímetro tienen un patrón, ya que el denominador cambia por el doble del mismo $P = \pi \left(\frac{d}{2n} \right)$, esto implica que hay reconocimiento de patrones.

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de las sesiones de trabajo, tales como, identificación de variables, semicírculos, semicircunferencias, longitud, medida, diámetro, construcción, series, áreas, punto, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos; de hecho, esto les permite abordar las sesiones de trabajo, lo cual hace que la mayoría de los estudiantes enfrenten la situación problema sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes:

Algunos estudiantes realizan procesos de visualización (Crisólogo y Martínez, 2015) pues asocian propiedades de la situación problema propuesta a cada una de las semicircunferencias construidas asociadas. Los procedimientos utilizados se evidenciaron mediante argumentos escritos que reflejan un nivel adecuado de conocimientos previos y de ciertos procesos de modelamiento.

Los estudiantes realizaron acciones dentro del registro algebraico y en sus tratamientos se incluyen operaciones hechas para poder calcular perímetro y área en las semicircunferencias construidas.

Sí se han modificado por que cada vez se reduce más y más cada magnitud, mientras más semicírculos se agreguen más se hacen pequeños. En esta afirmación se reflejan elementos variacionales; por ejemplo, al equiparar las longitudes y magnitudes de las semicircunferencias y la aproximación a la noción del concepto de infinito.

“Se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, si suman las áreas de los 2 semicírculos construidos en la segunda figura, eso les dará el área de la primera figura y así sucesivamente”. Atendiendo a estas consideraciones, se ve evidenciado la variación ya que los estudiantes alcanzan establecer relaciones de congruencia entre el semicírculo original y los dos semicírculos que resultan al subdividirse, es así que dedujeron un patrón (Vasco, 2006) particular de las semicircunferencias; cada vez que dividían un semicírculo obtenían dos semicírculos, estos sumaban la longitud (perímetro y áreas) igual al semicírculo anterior.

De igual forma, algunos estudiantes consiguen referir que cada semicircunferencia construida produce a su vez a dos semicircunferencias congruentes en un proceso de división que se hace de manera indefinida.

Utilizaron visualización (Hitt, 1998b) en el tránsito de diferentes registros de representación, particularmente del geométrico al algebraico y numérico. Así como usan como medio el software Geogebra para realizar dichos procesos de visualización (Villa y Ruiz, 2010), donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a las construcciones geométricas.

No obstante, los estudiantes no lograron concluir la suma total correcta de todas las semicircunferencias.

En consecuencia al análisis de cada una de las fases del EOS con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen pensamiento variacional (definición operacional, desarrollo de pensamiento variacional, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, entre otros). Todos ellos relacionados con los registros de representación (Duval, 2006) como una manera de visibilizar el accionar de los estudiantes mediante códigos variacionales ligados a procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra (Villa y Ruiz, 2010) permite desarrollar.

La visualización fue de gran importancia, puesto que los estudiantes atribuyen propiedades a los objetos geométricos en sus representaciones gráficas (Mendoza, 2016), ya que varias veces les permitió observar con mayor detalle el tamaño (por ejemplo cuando expresan que “sus áreas van disminuyendo conforme se van insertando semicircunferencias dentro de otra”), las características de cada semicircunferencia construida y de este modo formular,

plantear y comparar (MEN, 2006) las áreas de los mismos. Por tanto de acuerdo a lo antes mencionado, los estudiantes se ubican en el nivel dos que es Relación según los niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional (Báez et al., 2017:97) que es la expresión del nivel intermedio en el desarrollo del pensamiento variacional, ya que los estudiantes relacionan propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos informales, establecen relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación, reflexionan matemáticamente y usan códigos variacionales para argumentar la solución de problemas.

4.2.5 Sesión de trabajo # 4

La presente sesión de trabajo (Ver anexo 3) muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. Está formada por una sucesión de triángulos equiláteros contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 14- 22. La Sesión cuatro consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco, en el nivel tres hay cinco y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos, específicamente en la de triángulos, y se supone que el lado del primer triángulo equilátero mide L de lado.

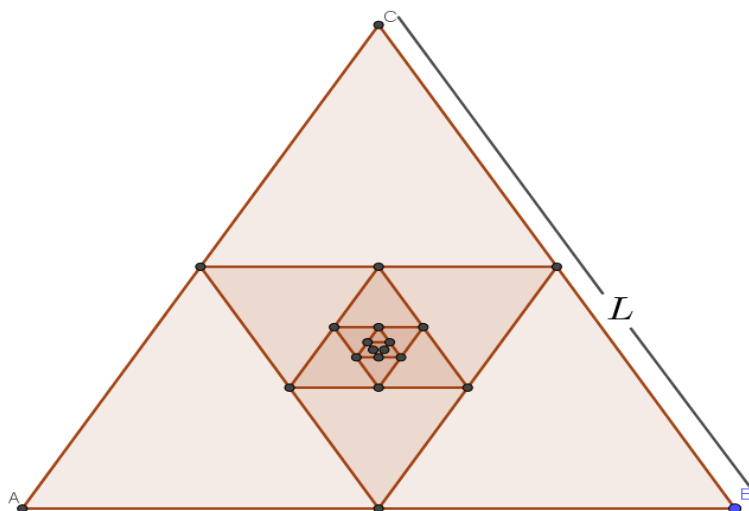


Figura 14- 22 Triángulos equiláteros inscritos

Fuente: Elaboración Propia

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?
 ¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figura que muestra sucesiones de triángulos equiláteros contruidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los triángulos equiláteros se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de ocho partes: 1) Inicialmente qué figura observas, 2) qué características podrías señalar de esta figura, 3) haga todos los comentarios que considere

pertinentes si la construcción de n figuras inscritas podría realizarse de manera indefinida , 4) si la construcción es posible, cómo es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita, 5) comente de sus perímetros, y sus posibles cambios, 6) afirme respecto a sus áreas, 7) haga un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas, 8) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las figuras construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar, entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son característicos y representativos

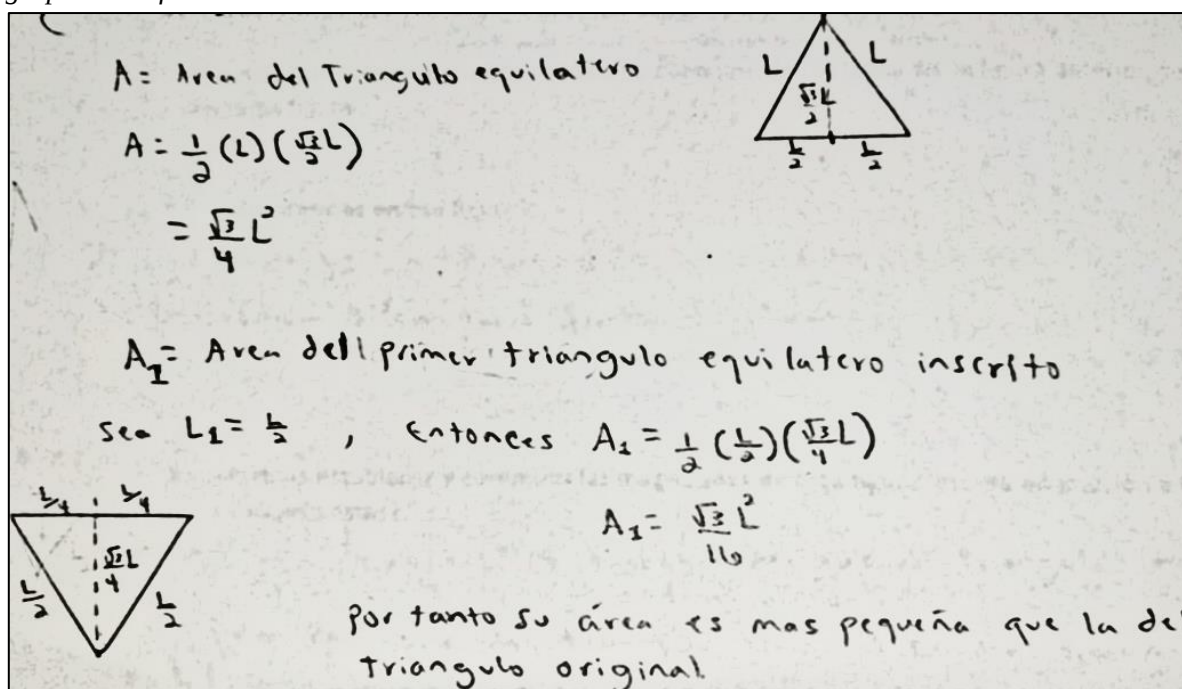
G1N1: Todos sus lados tienen la misma medida, es un triángulo equilátero.

G1N2: Se construye un triángulo dentro de otro triángulo, se forman 4 triángulos dentro del triángulo original.

G1N2: El triángulo original es más grande que el triángulo inscrito, el valor del lado del triángulo original es más grande que la medida del lado del triángulo inscrito en él; al igual que sus áreas.

G1N2:

Figura 14- 23 Conclusiones en diferentes registros con respecto a las áreas de los triángulos por el grupo uno referente al nivel dos



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N2: Su lado es menor que la primera figura.

G1N2: Su perímetro es menor que la primera figura.

G2N2: Si han cambiado porque su altura y área ha disminuido. Uno de sus lados fue comprobado y su variable es L .

G2N2: $A_1 = \frac{L^2}{2}\sqrt{3}$, $A_2 = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$, su área cambia (disminuye) respecto a la primer figura.

G3N2: Un triángulo equilátero con otro triángulo dentro de menor magnitud, formando cuatro triángulos rectángulos.

G3N2: Sí, porque en el primer triángulo todos los lados son L, y el triángulo de en medio tiene lados L/2. Este último se verifica con Pitágoras.

G4N2: Se puede apreciar que al primer triángulo lo dividen 4 triángulos que a la vista son iguales.

G1N3: Se aprecian 3 triángulos inscritos uno dentro de otro. El tercer triángulo inscrito es más pequeño que el segundo triángulo inscrito, y el segundo es más pequeño que el primer triángulo.

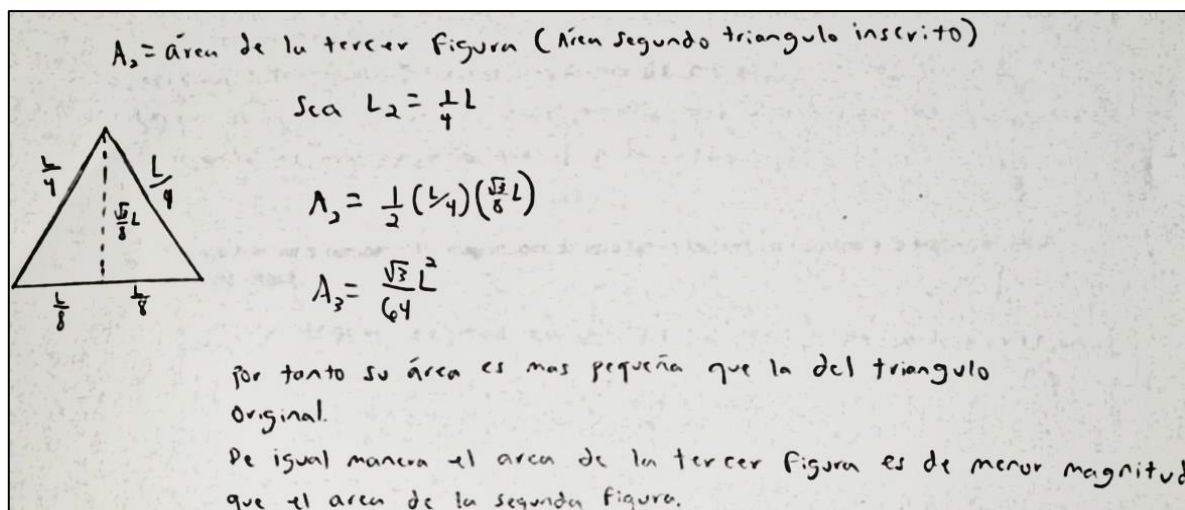
G1N3: El triángulo original es más grande en su área y perímetro respecto a los triángulos inscritos.

G1N3: Sí se ha modificado respecto al primer triángulo inscrito ya que es menor su medida.

G1N3: Por tanto su área es más pequeña que la del triángulo original; de igual manera el área de la tercera figura es de menor magnitud que el área de la segunda figura.

G1N3:

Figura 14- 24 Conclusiones en registro figural y verbal con respecto al área del tercer triángulo por el grupo uno referente al nivel tres



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G2N3: Comparándola con la siguiente figura (2), que es $A_2 = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$ con la figura (3) que es

$A_2 = \frac{L^2}{16}\sqrt{3}$ se puede ver que cambia el valor del denominador.

G3N3: Podemos percibir que se agregan más triángulos, además cada vez que se agregan triángulos el tamaño disminuye.

G3N3: Percibimos que se pueden agregar más triángulos, los triángulo que se agregaron disminuyeron de tamaño.

G4N3: Se aprecia que se agregan más triángulos y que a medida se agregan triángulos sus tamaños se reducen.

G4N3:

Figura 14- 25 Magnitudes y cálculos aritméticos de las áreas de los triángulos inscritos realizados por grupo cuatro referentes al nivel tres

4. sus áreas van decreciendo. Este sería el patrón del área $L^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4^n} \right)$

$$\text{Area}_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

$$\text{Area}_2 = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2$$

$$\text{Area}_3 = \frac{\sqrt{3}}{64} L^2$$

$$\text{Area}_4 = \frac{\sqrt{3}}{256} L^2$$

$$A_4 = \frac{bh}{2}$$

$$A_4 = \frac{\left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{16} \right)}{2}$$

$$A_4 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{128}}{2}$$

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{256} L^2$$

$$c^2 = \frac{3}{256} + \frac{1}{256}$$

$$c = \sqrt{\frac{4}{256}}$$

$$c = \frac{1}{8}L$$

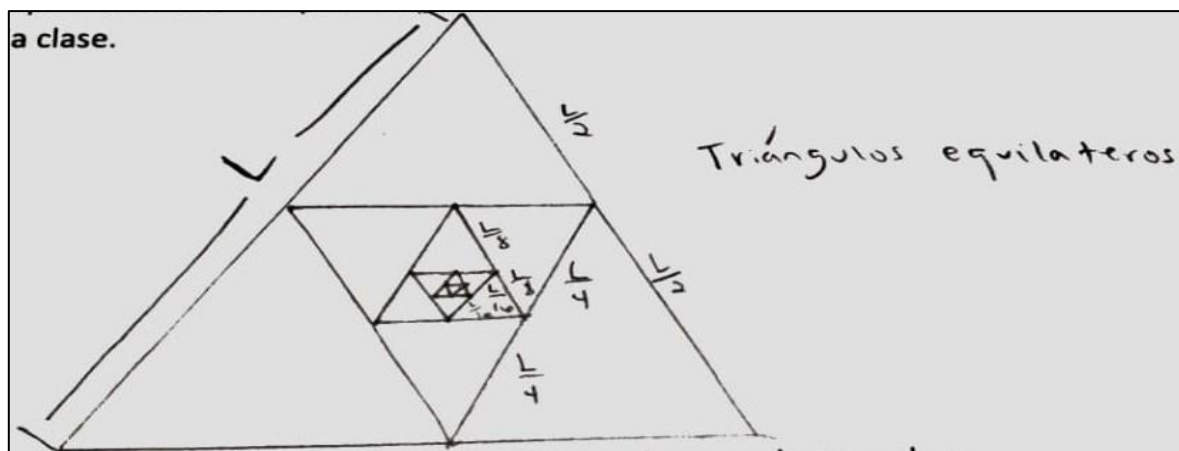
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G3N3: Percibimos que se pueden agregar más triángulos, los triángulos que se agregaron disminuyeron de tamaño.

G1N4: El proceso de construir continuará indefinidamente, a medida que se construyen más triángulos equiláteros dentro del original, el área de estos va decreciendo cada vez más. Con la medida de los lados (L) podemos calcular las áreas y perímetros de los triángulos construidos teniendo la medida de los ángulos que es 60° (por ser triángulos equiláteros), haciendo uso de algunas propiedades de la geometría.

G1N4:

Figura 14- 26 Triángulos inscritos y sus respectivas longitudes de lados señalados por grupo uno referentes al nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

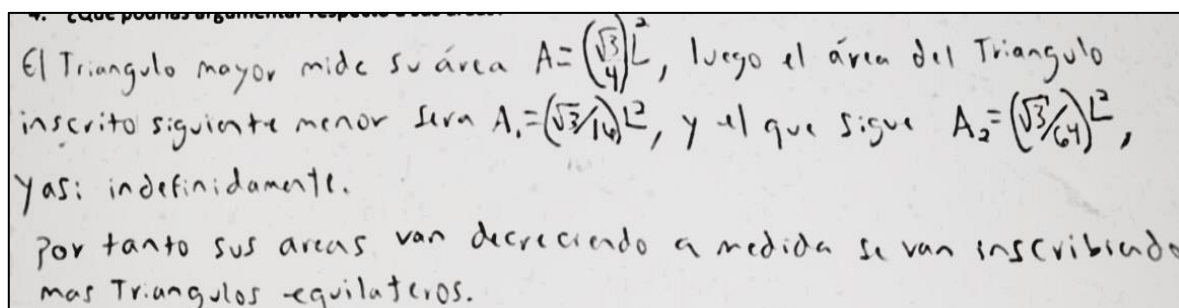
G1N4: Cada vez el perímetro de cada triángulo equilátero disminuirá a la mitad. El perímetro es $3L$, entonces el siguiente es la mitad $\frac{3}{2}L$, y el siguiente $\frac{3}{4}L$ y así continuamente.

G1N4: El área del triángulo mayor mide $A = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$, luego el área del triángulo inscrito

siguiente menor será $A = \frac{\sqrt{3}}{16}L^2$, el que sigue $A = \frac{\sqrt{3}}{64}L^2$, y así indefinidamente; por tanto,

sus áreas van decreciendo a medida se van inscribiendo más triángulos equiláteros.

Figura 14- 27 Conclusiones de la actividad mediante registro verbal presentada por grupo uno nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: El lado de cada triángulo inscrito es menor que el del triángulo anterior.

G1N4: El perímetro de cada triángulo es la mitad del perímetro del anterior.

G1N4: El área de cada triángulo es la cuarta parte del triángulo antecedente.

G1N4:

Figura 14- 28 Magnitudes de los triángulos obtenidos por el grupo uno referentes al nivel cuatro

5. ¿Elabora un listado de las longitudes, perímetros y áreas de los triángulos obtenidos?

Triángulo	Lado	Perímetro	Área
Triángulo #1	L	$3L$	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2$
#2	$\frac{L}{2}$	$\frac{3}{2} L$	$\frac{\sqrt{3}}{16} L^2$
#3	$\frac{L}{4}$	$\frac{3}{4} L$	$\frac{\sqrt{3}}{64} L^2$
#4	$\frac{L}{8}$	$\frac{3}{8} L$	$\frac{\sqrt{3}}{256} L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

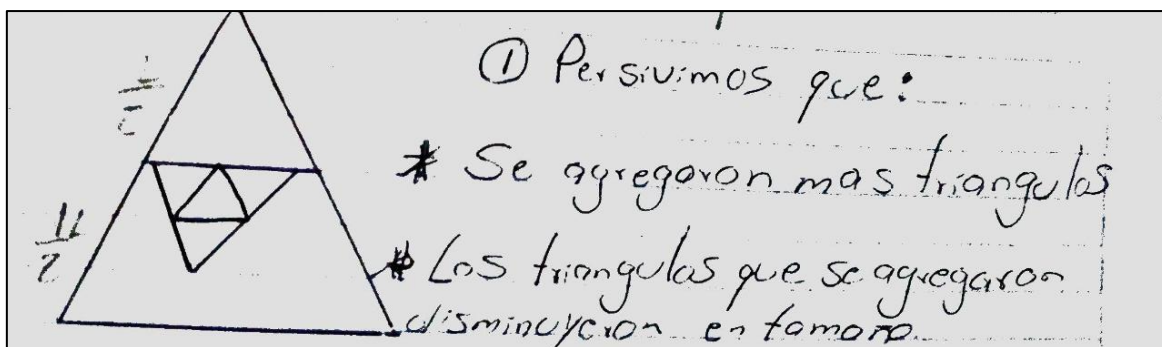
G1N4: En la construcción siempre se podrá seguir calculando las áreas, perímetros y lados ya que siempre se puede calcular la mitad de cada magnitud y siempre habrá triángulos inscritos infinitamente.

G2N4: Se puede realizar por medio de patrones la construcción de n figuras inscritas.

G2N4: Se observa que sus perímetros y sus áreas se van reduciendo pero manteniendo la relación con respecto a L.

G3N4:

Figura 14- 29 Afirmaciones mediante registro verbal y figural del grupo tres referentes al nivel cuatro

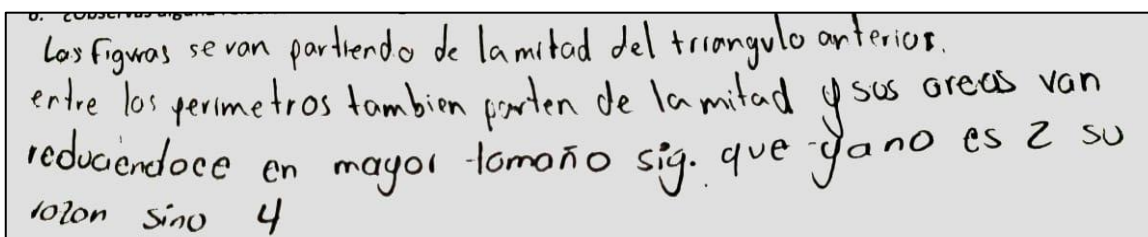


Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

G3N4: Las áreas de los triángulos inscritos se reducen gradualmente.

G3N4:

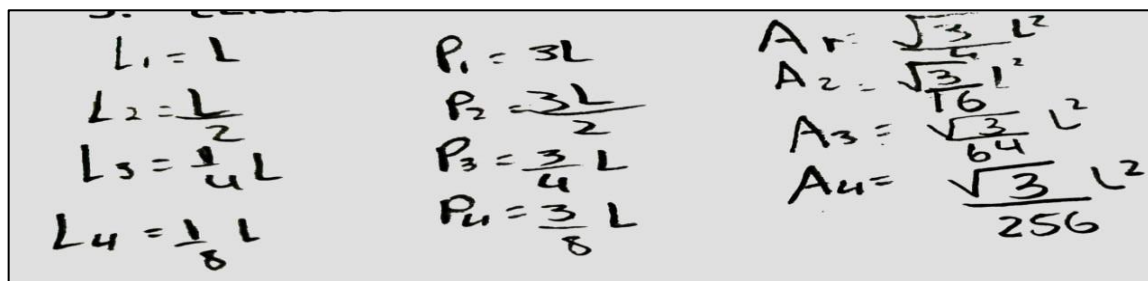
Figura 14- 30 Conclusiones en registro verbal sobre los triángulos inscritos por el grupo tres referente al nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G3N4:

Figura 14- 31 Magnitudes de los triángulos obtenidos por el grupo tres referentes al nivel cuatro



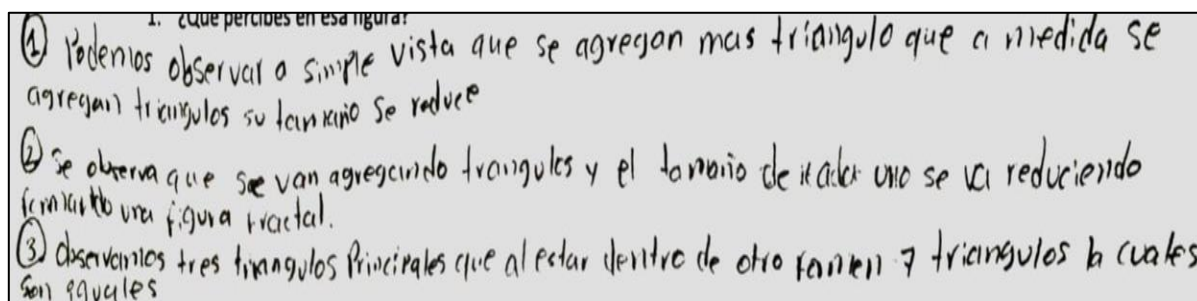
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N4: Es posible porque la figura se va generando una dentro de otra las cuales se van reduciendo su tamaño en un ciclo infinito.

G4N4: Es posible realizarse de acuerdo a que el patrón va reduciéndose en $\frac{1}{2}$, y con este es posible llegar a calcular la enésima figura.

G4N4:

Figura 14- 32 Conclusiones mediante registro verbal del grupo cuatro referentes al nivel cuatro



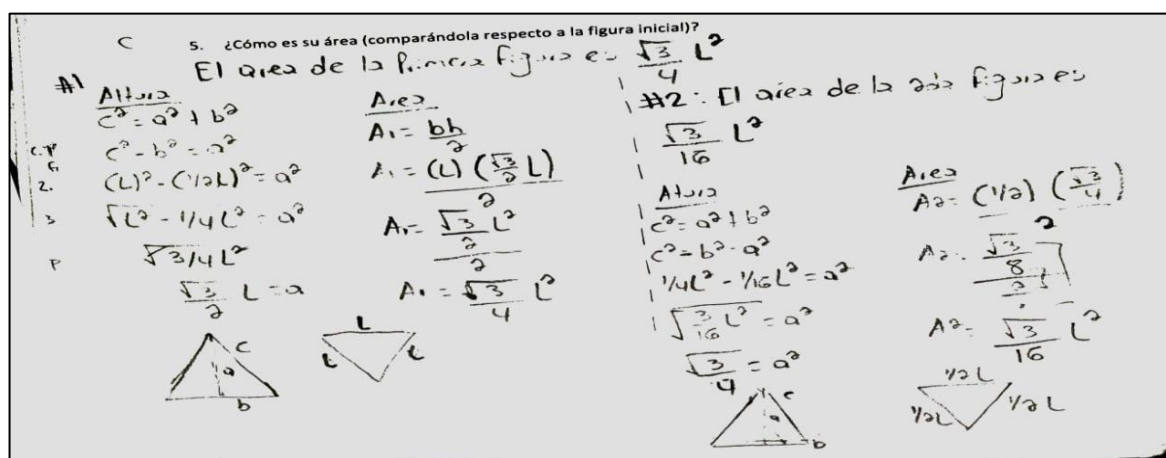
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N4: Las áreas van decreciendo a medida se van creando nuevas figuras siendo el patrón

$$A_n = L^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4^n} \right).$$

G4N4:

Figura 14- 33 Cálculos de las áreas basados en estrategias algebraicas por grupo cuatro nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N4: La relación existente entre las nuevas figuras construidas es que estas reducen su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior siguiendo el mismo patrón en sus perímetros y áreas.

G1N4: Sí, ya que se puede dividir los triángulos infinitamente.

G1N4: Se pueden seguir construyendo infinitos triángulos.

Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

▪ Lenguaje previo:

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: sucesión, polígono regular, triángulo equilátero, longitud, medida, interior, construcción geométrica, vértice, figura, punto medio, lado, proceso.

▪ Lenguaje emergente:

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de las sesiones de trabajo: tamaño, invertido, disminuido, triángulos inscritos, cambiando, reduciendo, disminuido, disminuye, patrones triángulos rectángulos, Pitágoras, agregan, ciclo infinito, construyendo, infinitos triángulos, medida, triángulo equilátero, dentro ,grande , inscrito, medida, menor, pequeño, reducen, continuará, indefinidamente, decreciendo, equiláteros, continuamente, antecedente, mitad, infinitamente, patrones, gradualmente, generando. De las palabras anteriores expresadas, estas tienen una vinculación con el lenguaje variacional, y esta manera de exteriorizar que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales que se ha mencionado anteriormente.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que todos los estudiantes se abocaron a la situación propuesta en las sesiones de trabajo sin generar otro

tipo de situación, ya sea vinculada a la situación propuesta u otra en un nuevo contexto. De lo anterior se tiene que un proceso general del pensamiento matemático (MEN, 1998), como lo es el proceso de formular, plantear, transformar y resolver problemas, no se evidencian ni se proponen nuevas situaciones variacionales.

Fase 5:

c) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Claro, han disminuido en el perímetro todos sus lados, son L y en el segundo $L/2$.

Si se podría realizar la construcción de n figuras porque cada vez que se añade un triángulo va cambiando sus magnitudes.

Si han cambiado porque su altura y área han disminuido. Uno de sus lados fue comprobado y su variable es L .

Se puede realizar por medio de patrones la construcción de n figuras inscritas.

Sus perímetros y sus áreas se van reduciendo, pero manteniendo la relación con respecto a L . El área de cada triángulo es la cuarta parte del triángulo antecedente.

Sí, porque en el primer triángulo todos los lados son L y en el triángulo de en medio tiene lados $L/2$. Este último se verifica con Pitágoras.

Las áreas de los triángulos inscritos se reducen gradualmente.

La relación existente entre las nuevas figuras construidas es que estas reducen su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior, siguiendo el mismo patrón en sus perímetros y áreas.

Si, ya que se puede dividir los triángulos infinitamente.

Se pueden seguir construyendo infinitos triángulos.

Afirman que el proceso de construir continuará indefinidamente, a medida que se construyen más triángulos equiláteros dentro del original, el área de estos va decreciendo cada vez más.

Es así que de las afirmaciones anteriores se observan elementos vinculados al pensamiento variacional como lo son: utilización de registros de representación (algebraico, numérico), actividades al interior de un registro, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, códigos variacionales, estrategias variacionales, reconocimiento de patrones, noción del infinito, identificación de objetos matemáticos (triángulos, patrones, dimensiones) y el empleo de algoritmos.

d) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Los estudiantes argumentan que si se podría realizar la construcción de n figuras porque cada vez que se añade un triángulo va cambiando sus magnitudes.

Objetan que $A_1 = \frac{L^2}{2}\sqrt{3}$, $A_2 = \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$, sus áreas cambian (disminuyen) respecto a la primer figura.

En el primer triángulo todos los lados son L , y en el triángulo de en medio tiene lados $L/2$. Este último se verifica con Pitágoras.

Las áreas van decreciendo a medida se van creando nuevas figuras siendo el patrón

$$A_n = L^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4^n} \right).$$

En la construcción siempre se podrá seguir calculando las áreas, perímetros y lados ya que siempre se puede calcular la mitad de cada magnitud y siempre habrá triángulos inscritos infinitamente.

La relación existente entre las nuevas figuras construidas es que estas reducen su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior, siguiendo el mismo patrón en sus perímetros y áreas.

Los estudiantes encuentran una relación de las áreas cada vez que se dividen los triángulos.

Atendiendo a estas consideraciones y argumentos anteriores se visibilizan procesos generales de pensamiento matemático (MEN, 1998) como ser formular, plantear y argumentar. Dentro de este marco se observan las estrategias variacionales que es una forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional (Caballero y Cantoral, 2013), específicamente se

observa la comparación, como por ejemplo cuando objetan que, $A_1 = \frac{L^2}{2} \sqrt{3}$, $A_2 = \frac{L^2}{4} \sqrt{3}$ sus áreas cambian (disminuyen) respecto a la primer figura. Es así que las áreas van decreciendo

a medida se van creando nuevas figuras siendo $A_n = L^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4^n} \right)$, esto implica que hay un reconocimiento de patrones. Por otro lado los códigos variacionales en esta situación se plantean de manera verbal o lenguaje natural y en algunos casos mediante un registro algebraico.

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

Los estudiantes poseen las concepciones clásicas de triángulos equiláteros, sucesión, construcción, interior, vértice, lado, punto medio, proceso, medida y algunos conocimientos relacionadas a las situaciones planteadas. Al afrontar esta actividad los estudiantes ponen de

manifiesto los conceptos relacionados con las propiedades de los triángulos, esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos

Emergentes:

Los estudiantes identifican las áreas resultantes de los triángulos como partes de una serie geométrica convergente.

Los estudiantes identifican un patrón en las áreas calculadas de los triángulos, la cual les ayuda a identificar la serie geométrica.

Varios estudiantes se aproximan a la resolución de problemas mediante estrategias de visualización (Mejía, 2007) expuesta anteriormente en el marco teórico. Por ejemplo los estudiantes toman el triángulo original que se les proporciona y lo subdividen en triángulos congruentes y así sucesivamente como sea necesario. Este trabajo geométrico que efectúan los estudiantes da evidencia que utilizan ideas variacionales (Caballero y Cantoral, 2013:6), ya que se percatan que el proceso de construcción sigue y lo maniobran con ello haciendo uso del registro geométrico.

Lo mismo se aprecia mediante el registro aritmético, donde escriben expresiones y cantidades diferentes a la figura inicial según la construcción que efectuaron en el ámbito geométrico. Igualmente reconocieron patrones que les permitieron identificar la serie geométrica y calcular la suma de lo solicitado.

Los estudiantes reconocieron las nociones de infinitos (Mendoza, 2013), y argumentaron expresiones como continuar una vez más, seguir y seguir, disminuir, reducir, ciclo infinito; son propias de la mayoría de los estudiantes que participaron en la actividad. Por lo tanto con

base al análisis de cada una de las etapas del Enfoque Ontosemiótico con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen: pensamiento variacional (como ser su definición operacional, niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional) (Báez et al., 2017:97), procesos generales vinculados al pensamiento matemático (MEN, 2006), elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, entre otros). Todos ellos relacionados con los registros de representación (Duval, 2006) como una manera de visibilizar el accionar de los estudiantes mediante representaciones o códigos variacionales ligados a procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra permite desarrollar (Villa y Ruiz, 2010).

En el mismo orden de ideas al hacer construcciones en Geogebra, la visualización fue de mucha importancia ya que permitió vislumbrar las características de cada triángulo equilátero inscrito construido, y así formular, comparar y resolver las áreas y perímetros de los mismos en estas sesiones de trabajo.

Las actividades de generalización de patrones algebraicos y geométricos que evidenciaron G4N4 y G1N4 donde resuelven e identifican patrones, manipulan relaciones y figuras en los cuales se basan los procesos de generalización (MEN, 1998), evidencian el buen uso del lenguaje (códigos variacionales) y utilización de formas de visualización para interpretar el proceso de construcción de la figuras, y en algunos casos en la interpretación adecuada de una situación problema enunciada, sea esta expresada en forma verbal o mediante una representación ostensiva (algebraica, figural o de otra índole) (Cabezas y Mendoza, 2016).

Atendiendo a estas consideraciones se determina que los estudiantes se ubican en el nivel dos de Relación según los niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento

variacional (Báez et al., 2017:97) que es la expresión del nivel intermedio en el desarrollo del pensamiento variacional, ya que los estudiantes establecen relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación (Caballero y Cantoral, 2013:6), relacionan propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos informales, reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático (códigos variacionales) para argumentar la solución de problemas sin llegar a formalizar la definición de serie geométrica.

4.2.6 Sesión de trabajo # 5

La presente sesión de trabajo (Ver anexo 3) muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. Está formada por una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 14- 34. La sesión cinco consta de cuatro niveles: en el nivel uno hay tres ítems, en el nivel dos hay cinco, en el nivel tres hay cinco y en el nivel cuatro hay seis ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos regulares, específicamente en la de hexágonos, y se supone que el lado del primer hexágono mide L de lado.

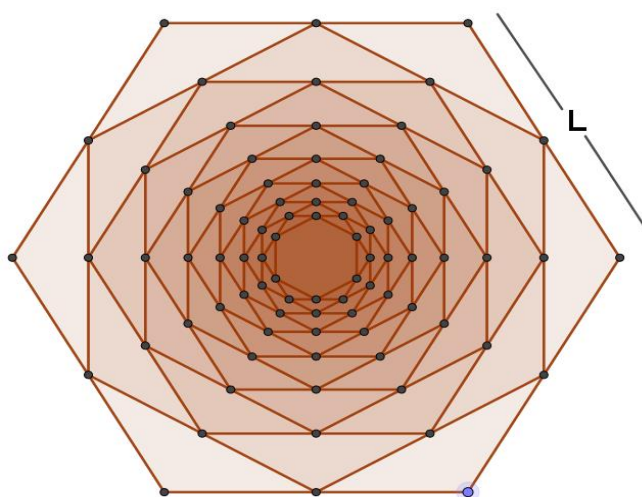


Figura 14- 34 Hexágonos inscritos

Fuente: Elaboración Propia

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?
¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figural que muestra sucesiones de hexágonos contruidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los hexágonos se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

La consigna se compone de ocho partes: 1) Inicialmente qué figura observas, 2) qué características podrías señalar de esta figura, 3) haga todos los comentarios que considere pertinentes si la construcción de n figuras inscritas podría realizarse de manera indefinida , 4) si la construcción es posible, como es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita, 5) comente de sus perímetros y sus posibles cambios, 6) afirme respecto a sus áreas, 7) haga un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas, 8) muestre las relaciones encontradas entre los elementos antes mencionados de las figuras construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra, y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son característicos y representativos

G1N2: Se observa un hexágono, dentro de él se forma otro de menor tamaño.

G1N2: Cuando un hexágono se inscribe en otro se precisa que sus magnitudes van disminuyendo.

G4N2:

Figura 14- 35 Cálculos aritméticos del área del hexágono original obtenida por el grupo cuatro referente al nivel dos

5. Area

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$C^2 - b^2 = a^2$$

$$(L)^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2 = a^2$$

$$L^2 - \frac{1}{4}L^2 = a^2$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}L^2} = a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L = a$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_1 = \frac{6L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L}{2}$$

$$A_1 = \frac{6\sqrt{3}L^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G4N2: Se aprecia dos figuras geométricas, el segundo hexágono está dentro del primero.

G1N2:

Figura 14- 36 Cálculo aritmético por semejanza de la longitud de lado de la segunda figura inscrita obtenida por el grupo uno referente al nivel dos

L = lado del Hexágono original.

L_1 = Lado del primer hexágono inscrito.

$L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, su lado es menor que la primer figura.

POTD

Angulo interno hexágono $\rightarrow 120^\circ$

Triángulo de 30, 60

Usando Semejanza

$$\frac{1}{2} = \frac{L_1}{L} \Rightarrow L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N2: “El hexágono original es más grande que el hexágono inscrito. La medida del lado del hexágono original es más grande que la medida del lado del hexágono inscrito en él, al igual que sus áreas”.

G4N2:

Figura 14- 37 Magnitudes y afirmaciones en registro aritmético y verbal del grupo cuatro referente al nivel dos

Longitud		Perímetro		Área	
Figura 1	$h = L$	Figura 1	$P_1 = P = 6(L) = 6L$	Figura 1	$A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$
Figura 2	$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} L$	Figura 2	$P_2 = 3\sqrt{3} L$	Figura 2	$A_2 = \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2$
formulas en la siguiente pagina Basicamente sucede que el primer hexagono no dividio sus lados reduciendo, sus magnitudes han cambiado porque la figura se reducio					

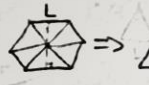
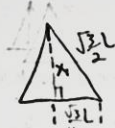
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G2N2: Se aprecia un nuevo polígono con sus magnitudes más reducidas,... nuevo hexágono con un menor tamaño reducido.

G2N2: Sí han cambiado, han disminuido tanto en su apotema como en su área.

G1N2:

Figura 14- 38 Cálculos de las áreas de los primeros hexágonos inscritos en registro figural y aritmético obtenida por el grupo uno referente al nivel dos

$A =$ Área del hexágono original.  $x = \sqrt{L^2 - (\frac{L}{2})^2}$ $x = \frac{\sqrt{3}}{2} L$ $A = \frac{P \cdot X}{2} = \frac{6L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L}{2}$ $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$	$A_1 =$ Área del primer hexágono inscrito. Sea $P_1 = 3\sqrt{3} L$, sea $X_1 =$ Apotema del hexágono inscrito.  $X_1 = \sqrt{(\frac{3}{4} L)^2 - (\frac{3}{8} L)^2}$ $X_1 = \sqrt{\frac{9}{16} L^2 - \frac{9}{64} L^2} = \frac{3}{8} L$ $A_1 = \frac{P_1 \cdot X_1}{2} = \frac{3\sqrt{3} L \cdot (\frac{3}{8} L)}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{16} L^2$ * Por tanto su area es más pequeña que la del hexágono original.
--	---

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N3: El área va cambiando, se va reduciendo según se inscriben más figura.

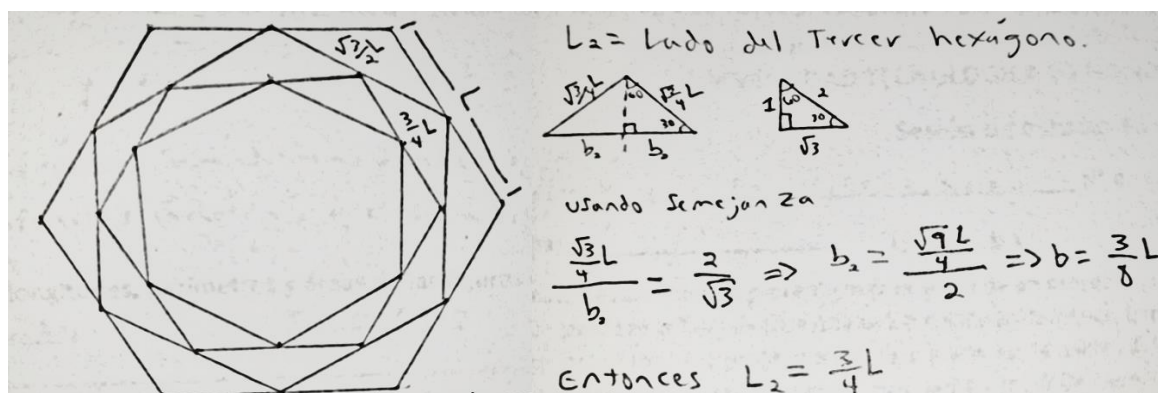
G4N3: Podemos observar 3 hexágonos que se van reduciendo.

G4N3: Sí han cambiado por que se van reduciendo sus magnitudes.

G1N3: Por tanto su área es más pequeña que la del hexágono original. De igual manera el área del tercer hexágono es de menor magnitud que el área del segundo hexágono.

G1N3:

Figura 14- 39 Descomposición del hexágono en triángulos y cálculo de la longitud de un lado de un triángulo por semejanza realizada por grupo uno referente al nivel tres



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

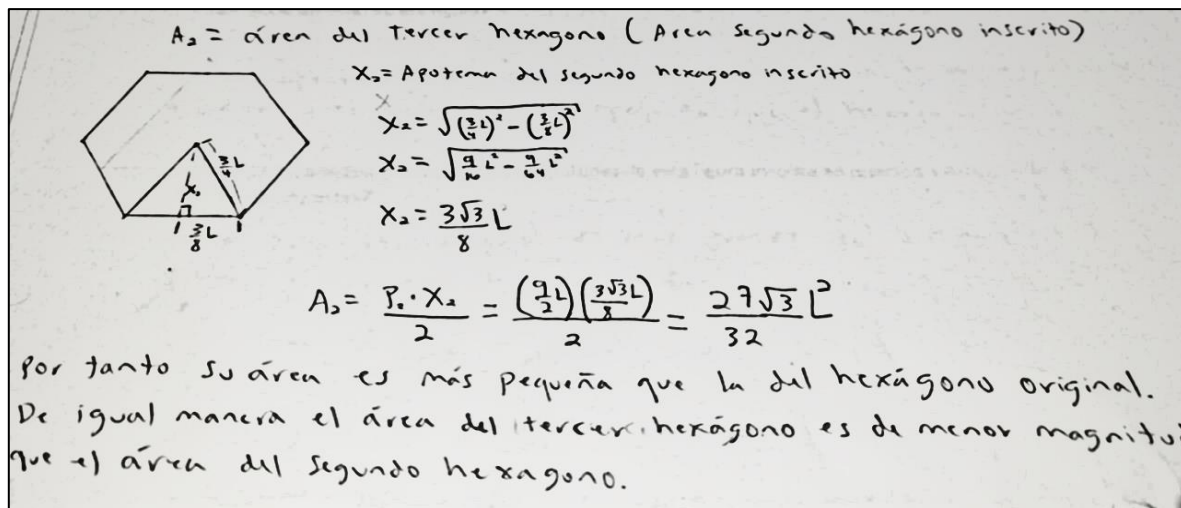
G1N3: Se aprecian tres hexágonos inscritos, uno dentro de otro. El segundo hexágono inscrito es más pequeño que el primer hexágono inscrito, y el primero es más pequeño que el hexágono original.

G3N3: (...) Si han cambiado, serían de menor tamaño.

G4N3: Se forma una tercera figura con 6 lados (hexano) dentro de la segunda figura, cuyos puntos o vértices están ubicados en la mitad de los lados de esta (...).

G1N3:

Figura 14- 40 Conclusiones del área del tercer hexágono en registro figural y aritmético obtenida por el grupo uno referente al nivel tres



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: $A_{f_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$, $A_{f_2} = \frac{3^2\sqrt{3}}{2^3}L^2$, $A_{f_3} = \frac{3^3\sqrt{3}}{2^5}L^2, \dots$, sus áreas se van reduciendo, según se van añadiendo figuras inscritas.

G1N4: (...) se van reduciendo sus valores a medida que se van inscribiendo más figuras, sin embargo no se pudo encontrar un patrón.

G2N4: La única relación es que van disminuyendo las figuras construidas; el área y el perímetro no tienen un patrón.

G4N4: (...) como se forma una especie de profundidad formado por un conjunto de hexágonos.

G4N4: La relación existente entre las magnitudes de las figuras construidas, es que estas van disminuyendo a medida se van construyendo nuevas figuras (...).

G1N4: Las áreas de los hexágonos se van reduciendo infinitamente.

G1N4: Las áreas de los hexágonos van disminuyendo $\frac{3}{4}$ con respecto al anterior.

G1N4: Podemos encontrar infinitas áreas, ya que los cálculos se pueden hacer infinitamente.

G4N4:

Figura 14- 41 Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo cuatro referentes al nivel cuatro

Figura	Longitud	Perímetro	Área
Figura 1	L	$6L$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$
Figura 2	$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$	$3\sqrt{3}L$	$\frac{3^2\sqrt{3}}{2^3} L^2$
Figura 3	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}L$	$\frac{3^3\sqrt{3}}{2^5} L^2$
Figura 4	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3^3\sqrt{3}}{2^8} L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

G1N4: Se percibe que los hexágonos se van construyendo infinitamente hacia dentro a medida que se inscriben, y esto sucede con sus perímetros y la longitud de sus lados.

G1N4: Si la construcción continuara la figura irá decreciendo, ya que el hexágono se construye con los puntos medios de la figura anterior, y siempre habrá área por más diminuto que sea.

G1N4:

Figura 14- 42 Magnitudes de los hexágonos obtenidos por grupo uno referentes al nivel cuatro

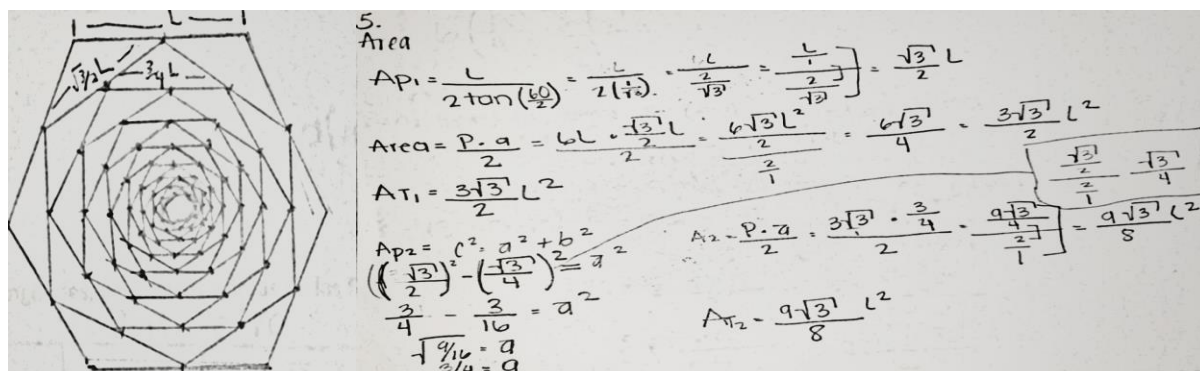
Hexágono	Lado	Perímetro	Área
Hexágono #1	L	$6L$	$\frac{\sqrt{3}}{2} L^2$
#2	$\frac{\sqrt{3}}{2} L$	$3\sqrt{3}L$	$\frac{9\sqrt{3}}{8} L^2$
#3	$\frac{3}{4} L$	$\frac{9}{2}L$	$\frac{27\sqrt{3}}{32} L^2$
#4	$\frac{3\sqrt{3}}{8} L$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}L$	$\frac{81\sqrt{3}}{128} L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

G1N4: El proceso de construcción continuará indefinidamente, cada vez que se construye más hexágonos dentro del original, el área y perímetro de estos irá disminuyendo cada vez más. Los hexágonos se van construyendo infinitamente hacia adentro a medida que se inscriben en los puntos medios de los lados de los hexágonos exteriores.

G4N4:

Figura 14- 43 Longitud de los lados de algunos hexágonos inscritos dibujados y cálculo aritmético de áreas realizada por grupo cuatro referente al nivel cuatro



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

G1N4: Al continuar inscribiendo más hexágonos regulares, dentro del primer hexágono, estos van disminuyendo su tamaño.

G1N4: Si la construcción continuara, la figura irá decreciendo ya que el hexágono se construye con los puntos medios de la figura anterior, y siempre habrá área por mas diminuto que sea, y la figura que se forma es similar a un fractal.

G1N4: En la construcción siempre se podrá seguir calculando las áreas, perímetros y lados cada vez que se construyan más hexágonos dentro del inicial; ya que siempre se puede calcular la mitad de cada magnitud y siempre habrá triángulos inscritos infinitamente.

Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

- Lenguaje previo:

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Polígono regular, hexágono, longitud, medida, interior, vértice, punto medio, lado, proceso, figura, sucesión, construcción geométrica.

- **Lenguaje emergente:**

Expresiones usadas para referir conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de las sesiones de trabajo: área, perímetro, indefinidamente, indefinida, sucesión, hexágono interior, hexágono exterior, tamaño, pequeño, magnitudes, disminuyendo, cambiando, reduciendo, figuras inscritas, patrón, reducidas, cambiado, disminuido, apotema, profundidad, conjunto, construyendo, reduciendo infinitamente, infinitas áreas, infinitamente hacia dentro, decreciendo, diminuto. Se observa en algunas de las palabras expresadas por los estudiantes vinculación con el lenguaje variacional. De igual forma estas manifestaciones que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales, que son los modos de expresar el cambio y la variación, que a su vez contribuyen en la generación de argumentos variacionales (Caballero y Cantoral, 2013), que se ha mencionado.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

En cuanto a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las consignas planteadas en la situación, y presentaron respuestas acordes a lo solicitado. Podría considerarse que un proceso general al pensamiento matemático como lo es el proceso de formular, plantear, transformar y resolver problemas, se considera que no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que responda sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Por tanto no se evidencia ni se propone una nueva situación variacional.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Dentro del hexágono se forma otro de menor tamaño.

Cuando un hexágono se inscribe en otro, se precisa que sus magnitudes van disminuyendo.

El área va cambiando, se va reduciendo según se inscriben más figura.

Sus áreas se van reduciendo, según se van añadiendo figuras inscritas.

Sí han cambiado, han disminuido tanto en su apotema como en su área.

Sí han cambiado, son de menor tamaño.

Se forma una tercera figura con 6 lados (hexágono) dentro de la segunda figura, cuyos puntos o vértices están ubicados en la mitad de los lados de esta.

... se forma una especie de profundidad formado por un conjunto de hexágonos.

Las áreas de los hexágonos se van reduciendo infinitamente.

Las áreas de los hexágonos van disminuyendo $\frac{3}{4}$ con respecto al anterior.

Los hexágonos se van construyendo infinitamente hacia dentro a medida que se inscriben, y esto sucede con sus perímetros y la longitud de sus lados.

La figura irá decreciendo, ya que el hexágono se construye con los puntos medios de la figura anterior, y siempre habrá área por más diminuto que sea.

Por tanto de las afirmaciones anteriores, estas develan ciertos elementos vinculados al pensamiento variacional, entre los cuales están: reconocimiento de patrones (como lo evidencian G1N4 Y G4N4) que se constituyen en una herramienta necesaria para el estudio de la variación (Vasco, 2006), utilización de registros, momentos de pensamiento, actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales,

estrategias variacionales, procesos generales (MEN, 2006) vinculados al pensamiento matemático como ser formular, plantear, resolver vinculados al pensamiento matemático.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Los estudiantes en general presentan argumentos con características variacionales:

Reconocen algunas propiedades particulares del hexágono regular y su descomposición. Sin embargo, presentan en su actividad registros de tipo algebraico y hacen tratamientos en su interior.

Los estudiantes utilizan argumentos y conversión de registros, entre el registro geométrico y algebraico cuando vinculan la relación existente entre la longitud del lado del triángulo anterior con respecto a la altura del triángulo siguiente.

Los estudiantes reconocen la razón de la serie ($r = 3/4$) y que esta va disminuyendo con respecto al valor anterior y efectúan el cálculo mediante la fórmula para ello.

Con respecto al área, ellos sostienen que a medida que se van construyendo más hexágonos inscritos, estos van reduciendo infinitamente. Para ellos, entre más hexágonos se construyen, las longitudes de los lados del hexágono y su área disminuye.

Expresaron que el proceso de construir un hexágono otro más y otro, lo podían continuar haciendo indefinidamente.

Los estudiantes recurren a la visualización, ya que hacen uso de la información visual y descomponen la figura original.

Por consiguiente de los argumentos anteriores los estudiantes se abocaron a realizar cálculos en representaciones de tipo geométrico y aritmético, además de representar argumentos

escritos (como un medio de apoyo y sustento a los procedimientos utilizados). También se visibilizan los códigos variacionales que se plantean de manera verbal o lenguaje natural y mediante registro algebraico (Duval, 2006) para justificar la construcción de una secuencia de medidas relacionadas a los elementos de los hexágonos inscritos.

No obstante, en relación a esta actividad donde se utiliza la visualización matemática, esta se revela en la aplicación del teorema de Pitágoras, donde consideran un dibujo a partir del cual atribuyen propiedades matemáticas a la resolución de la situación planteada (G1N3). En el proceso de confección de la situación problema van descubriendo la necesidad de nuevas hipótesis para integrar a la situación elementos dinámicos (Mendoza 2016).

Por otro lado se visibilizan las estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) específicamente el de la seriación: como por ejemplo cuando hacen referencia a que las áreas de los hexágonos van disminuyendo $\frac{3}{4}$ con respecto al anterior y esta relación se observa en todos los cálculos. Esto implica que hay un reconocimiento de patrones (Vasco, 2006).

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

En relación a los objetos matemáticos involucrados en el planteamiento de las sesiones de trabajo, tales como hexágono, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro, medida, longitud, áreas, figura inscrita, interior, vértice, punto medio, proceso, sucesión, construcción geométrica, entre otros, los estudiantes tienen las concepciones tradicionales en matemáticas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes:

Los estudiantes en su mayoría reconocieron que el proceso de construcción de hexágonos es infinito con apoyo del software Geogebra. Esto fue expresado mediante diferentes argumentaciones discursivas.

Algunos grupos de estudiantes calculan las sumas de las áreas de varios hexágonos que les permite deducir en la periodicidad de un patrón (Vasco, 2006), para lograr reconocer la serie geométrica que les permite calcular las respectivas sumas infinitas.

El grupo número uno de estudiantes encuentra el área de algunos hexágonos apoyándose en la descomposición de triángulos rectángulos con ayuda de Geogebra y a la vez recurren a la visualización (Hitt, 1998b), ya que hacen uso de la visualización y descomponen el hexágono original.

Los estudiantes reconocen la relación de congruencia existente entre la altura del triángulo anterior y el lado del triángulo posterior en cada uno de los cálculos de los hexágonos. Ahí se evidencia que hay conversión de registros, entre el registro geométrico y algebraico cuando los estudiantes logran vincular dicha relación de congruencia.

Un grupo de estudiantes hace uso del registro geométrico y de tratamientos algebraicos en su interior (Duval, 2006), ya que usan semejanza para calcular los lados de los triángulos y luego calculan sus respectivas áreas.

El grupo número dos no logró, en su mayoría, los objetivos de la sesión de trabajo ya que muchos estudiantes no logran establecer la covariación entre las variables involucradas en las situaciones problema propuestas.

En consecuencia al análisis de cada una de las fases del EOS con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen pensamiento variacional (definición operacional, desarrollo de pensamiento variacional, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, entre otros). Todos ellos articulados con los registros de representación (Duval, 2006) como una manera de visibilizar el accionar de los estudiantes mediante códigos variacionales ligados a procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra permite desarrollar (Villa y Ruiz, 2010). En los niveles de esta sesión de trabajo propuesta, se observa que los grupos (G1, G4) comprendieron en términos generales la situación propuesta, aunque en unas más que en otras, la participación fue más activa que los grupos (G2, G3).

En lo referente a lenguaje fue notable el uso de códigos variacionales (Caballero y Cantoral, 2013:6) que los estudiantes utilizaron en las sesiones de trabajo. Los esfuerzos por abordar la situación problema fue notable, la creatividad en cada una de las situaciones problemas fue expresada en algunas de las textualidades que los estudiantes presentaron. La visualización fue notable puesto que los estudiantes atribuyen propiedades a los objetos geométricos en sus representaciones (Mendoza, 2016), ya que observaron con mayor detalle los tamaños (por ejemplo cuando expresan que en la construcción siempre se podrá seguir calculando las áreas, perímetros y lados cada vez que se construyan más hexágonos dentro del inicial; ya que siempre se puede calcular la mitad de cada magnitud y siempre habrá hexágonos inscritos infinitamente), las características de cada hexágono inscrito construido y de este modo formular, plantear, comparar y calcular (MEN, 2006) las áreas de los mismos.

De los argumentos anteriores, los estudiantes se ubican en el nivel dos de Relación según los niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional (Báez et al., 2017:97), que es la expresión del nivel intermedio en el desarrollo del pensamiento variacional, ya que ellos en sus producciones identifican y manipulan relaciones, patrones, procesos algebraicos y geométricos, así como reconocen la existencia y el significado de la variación de un fenómeno, y lo reflexionan matemáticamente.

4.2.7 Sesión de trabajo # 6

La presente sesión de trabajo muestra una figura construida con el apoyo de Geogebra classic 5. Está formada por un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades; se dibuja una espiral tal como se muestra en la figura 14- 44. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, y así sucesivamente de manera indefinida. La sesión seis consta de dos niveles: en el nivel uno hay dos ítems y en el nivel dos hay cuatro ítems. En general están focalizados en el tema de polígonos. En definitiva la actividad intenta desafiar al estudiante a encontrar la longitud de una espiral infinita que se va construyendo bajo ciertas condiciones particulares.

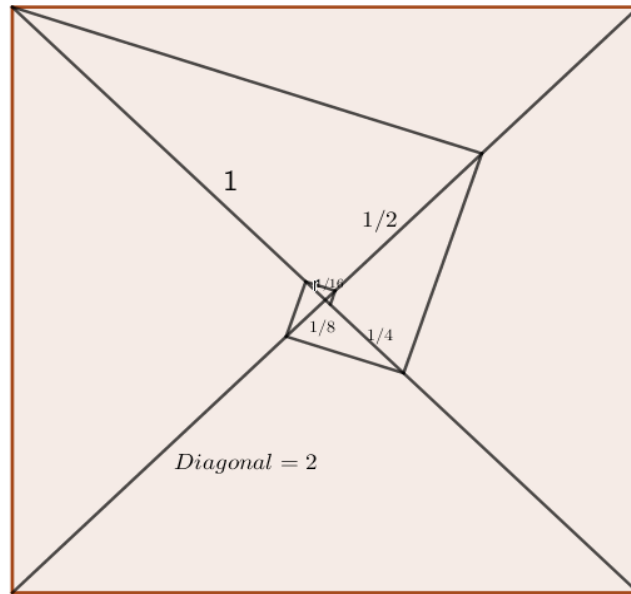


Figura 14- 44 Espiral
Fuente: Elaboración Propia.

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados?
¿Cómo se secuencian o se relacionan?. La actividad se presenta en un registro figural que muestra un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades; se dibuja una espiral infinita que se va construyendo bajo ciertas condiciones particulares. La actividad plantea que la espiral se construye de manera indefinida atendiendo a ese patrón. La consigna se compone de cuatro partes: 1) Inicialmente qué aprecias en la figura, 2) si la construcción es posible, cómo es la

longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima segmento de la espiral, 3) se podrá continuar con la construcción de cada una de las espirales de manera indefinida, 4) muestre las relaciones encontradas entre las longitudes y elementos antes mencionados de las figuras construidas.

La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea.

Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de Geogebra, y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.

Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son características y representativas

G1N3: (...) espiral que cada vez va reduciendo su tamaño”.

G1N3: (...) cada vez que se va añadiendo una longitud en la espiral, se va reduciendo a la mitad.

G2N3: Sí se puede realizar la construcción de la espiral de manera indefinida.... El patrón que obtenemos de la longitud de la espiral sería: $F_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

G3N3: Mediante el proceso de sacar las longitudes de la espiral existe un patrón y es $D_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, D_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}, D_3 = \frac{\sqrt{5}}{8}, D_4 = \frac{\sqrt{5}}{16}, \dots, D_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$, las encontramos mediante Pitágoras.

G3N3: Si ha cambiado, esta ha reducido su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior.

G3N4: (...) a medida se construyen nuevas longitudes en espiral estas reducirán su tamaño (longitud) a la mitad respecto a la figura anterior.

G4N4: Se puede seguir con la construcción de las espirales, porque el proceso se puede seguir formando infinitamente.

G4N4: La longitudes de cada una de las espirales se irán haciendo muy pequeñas.

G4N4: Se obtiene que en el cuadrado las espirales tienen una razón de $\frac{1}{2}$ en su longitud con respecto al anterior.

Etapas 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

- **Lenguaje previo:**

Términos y expresiones usadas para referir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Figura, sucesión, construcción, polígono regular, espiral, longitud, medida, interior, vértice, punto, lado, proceso.

- **Lenguaje emergente:**

Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la sesión de trabajo: Reduciendo, tamaño, añadiendo, mitad, indefinida, patrón, Pitágoras, reducido, formando infinitamente, pequeña. Se observa en algunas de las palabras expresadas vinculaciones con el lenguaje variacional. De igual forma esta manera de

expresar que utilizan los estudiantes aluden a los códigos variacionales que se ha mencionado anteriormente.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que los estudiantes en su mayoría atendieron únicamente a la consigna planteada en las situaciones problema sin surgir otro tipo de situación, ya sea vinculada a la situación propuesta u otra en un nuevo contexto. Por tanto podría considerarse que un proceso general al pensamiento matemático como lo es el proceso (formular, plantear, transformar y resolver problemas) no se evidencia ni se propone una nueva situación variacional.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo

(...) espiral que cada vez va reduciendo su tamaño.

(...) cada vez que se va añadiendo una longitud en la espiral, se va reduciendo a la mitad.

Si ha cambiado, esta ha reducido su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior.

A medida se construyen nuevas longitudes en espiral estas reducirán su tamaño (longitud) a la mitad respecto a la figura anterior.

Las longitudes de cada una de las espirales se irán haciendo muy pequeñas.

Por tanto de las afirmaciones anteriores se evidencian ciertos elementos vinculados al pensamiento variacional: reconocimiento de patrones, utilización de registros, códigos variacionales, estrategias variacionales, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, noción del infinito, identificación de objetos matemáticos (secuencias, sucesiones, dimensiones), entre otros.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Si se puede realizar la construcción de la espiral de manera indefinida..., el patrón que obtenemos de la longitud espiral sería: $F_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$.

Varios estudiantes argumentan que mediante el proceso de sacar las longitudes de la espiral

existe un patrón y es $D_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, D_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}, D_3 = \frac{\sqrt{5}}{8}, D_4 = \frac{\sqrt{5}}{16}, \dots, D_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$, la cual encontramos mediante Pitágoras.

Los estudiantes argumentan que se puede seguir con la construcción de las espirales, porque el proceso se puede seguir formando infinitamente, de igual manera concluyen que las espirales tienen una razón de $\frac{1}{2}$ en su longitud con respecto a la longitud anterior.

De los argumentos anteriores, se evidencian estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013) específicamente la comparación (está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes), como por ejemplo, cuando hacen referencia a que la longitud de cada una de las espirales se irán haciendo muy pequeñas, lo cual esto permite identificar cambios y poder analizarlos con base en las características de esos cambios y lo que varía. Por otro lado los códigos variacionales en estas situaciones se plantean de manera verbal o lenguaje natural y en algunos casos mediante un registro algebraico.

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

Respecto a los objetos matemáticos involucrados, los estudiantes tienen el manejo de conceptos como cuadrado, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro, medida,

longitud, proceso, construcción geométrica, el cálculo de los elementos de un triángulo rectángulo, entre otros. Los estudiantes además desplegaron concepciones geométricas y mostraron el desarrollo de visualización de la situación problema.

Emergentes:

Los estudiantes han reconocido que la construcción de la espiral se puede realizar y que la longitud se puede determinar, algunos hacen uso del diagrama proporcionado, al cual le asignan valores para las espirales. Estos cálculos los realizan en el registro aritmético, de donde se dan cuenta de un patrón de potencias de dos para el denominador.

Algunos estudiantes mencionan que no lograron encontrar el valor de las longitudes totales, pero presentaron argumentos interesantes en su análisis de la situación problema.

Varios estudiantes utilizan tratamientos de tipo algebraico y centraron su atención en visualizar con detalle la figura mostrada en el software Geogebra. De acuerdo a ello, identificaron tres triángulos rectángulos y argumentan cálculos mediante Pitágoras.

Los estudiantes evidenciaron la vinculación que hicieron entre el registro geométrico siendo el Teorema de Pitágoras el elemento que ejerce de conector entre el cuadrado y los triángulos rectángulos que se producen al interior del cuadrado. Es así que las longitudes de las hipotenusas de los triángulos rectángulos constituyen elementos de la longitud final de la espiral.

Los estudiantes afirman la posibilidad de seguir construyendo espirales de manera infinita. Si se sigue el proceso, la longitud va disminuyendo, y esto implica indicios e ideas de variación en ellos. De igual forma expresaron que si se podía seguir construyendo la espiral

puesto que la longitud de los lados formaban una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y se observaba claramente un patrón de los lados de la espiral que seguía construyéndose.

Los estudiantes hicieron cálculos y obtuvieron valores, aplicando su conocimiento de trigonometría de triángulo rectángulo. Es así que ellos evidenciaron cierto dominio de los algoritmos (de forma operativa) relativos al cálculo de las funciones trigonométricas.

Por tanto con base al análisis de cada una de las etapas del EOS con su respectiva articulación de los elementos del marco teórico que incluyen pensamiento variacional (definición operacional, desarrollo de pensamiento variacional, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variacional, entre otros) desde los diferentes elementos de análisis, hubo una producción sustantiva en las sesiones de trabajo propuesto, en algunos elementos como: lenguaje, afirmaciones, argumentos y en menor escala desde las concepciones y procedimientos adecuados para abordar la situación problema desde el pensamiento variacional. En particular, los estudiantes en esta sesión de trabajo no destacan, identificación de patrones, transformaciones, y articulación de procesos geométricos, así como de la existencia de covariaciones en sus argumentos. Sin embargo, el uso del lenguaje y las correctas concepciones de los elementos previos que demuestran tener, es base importante para estimular el desarrollo del pensamiento variacional (Posada et al., 2006) de manera formal.

Atendiendo a estas consideraciones se puede afirmar que los estudiantes en esta sesión de trabajo se ubican en el nivel uno de reconocimiento según los niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional (Báez et al., 2017:97) que es la expresión

del nivel primario en el desarrollo del pensamiento variacional, ya que ellos reconocen en algunos casos la existencia y el significado de la variación en un fenómeno modelado matemáticamente e identifican y manipulan en pocas ocasiones relaciones, patrones, procesos algebraicos y geométricos.

A continuación se presenta un resumen de las producciones contenidas en las sesiones de trabajo.

Tabla 4.0 Producciones contenidas en las sesiones de trabajo

ETAPAS DEL EOS	Sesión No.1	Sesión No.2	Sesión No.3	Sesión No.4	Sesión No.5	Sesión No.6
Respuestas representativas	• Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad. • Si, por que se va reduciendo la medida de las figuras mediante se agrega una figura dentro de otra. • Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos. • Si se puede porque existe un patrón de	• Podemos apreciar círculos dentro de otros círculos lo cual provoca un ciclo infinito de círculos y que se van reduciendo, dándole una especie de profundidad a la figura. • Sí, ya que el proceso de ir construyendo circunferencias va a seguir indefinidamente; siempre el círculo de adentro va a ser de menor área que el círculo de afuera, y los círculos interiores se van construyendo concéntricamente de acuerdo a los	• Las semicircunferencias interiores son más pequeñas que la semicircunferencia del exterior y la suma de sus áreas es la mitad de la semicircunferencia grande, mientras que la suma de sus perímetros es igual al perímetro de la semicircunferencia original. • Sus áreas disminuyen a medida que las semicircunferencias se hacen más pequeñas.	• Por tanto su área es más pequeña que la del triángulo original; de igual manera el área de la tercera figura es de menor magnitud que el área de la segunda figura. • El proceso de construir continuará indefinidamente, a medida que se construyen más triángulos equiláteros dentro del original, el área de estos va decreciendo o cada vez más. Con la	• El hexágono original es más grande que el hexágono inscrito. La medida del lado del hexágono original es más grande que la medida del lado del hexágono inscrito en él, al igual que sus áreas. • La relación existente entre las magnitudes de las figuras construidas, es que estas van disminuyendo o a medida se van construyendo nuevas figuras (...). • Las áreas de los hexágonos se	• (...) a medida se construyen nuevas longitudes en espiral estas reducirán su tamaño (longitud) a la mitad respecto a la figura anterior. • Se puede seguir con la construcción de las espirales, porque el proceso se puede seguir formando infinitamente • Las longitudes de cada una de las espirales se irán haciendo muy pequeñas. • Se obtiene que en el cuadrado las espirales tienen una

	construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área.	círculos exteriores y sus áreas serán la mitad del anterior.	• Las áreas van disminuyendo o conforme agreguemos más figuras. • La suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es la cuarta parte de la semicircunferencia grande.	medida de los lados (L) podemos calcular las áreas y perímetros de los triángulos construidos teniendo la medida de los ángulos que es 60^0 (por ser triángulos equiláteros) , haciendo uso de algunas propiedades.	• Las áreas de los hexágonos van disminuyendo o $\frac{3}{4}$ con respecto al anterior.	razón de $\frac{1}{2}$ en su longitud con respecto al anterior.
Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo.	Cuadrado interno, fractal, pequeño, reduciendo, patrón, infinito, triángulos reducidos, teorema, insertando (dentro de otra figura), diagonal, figura geométrica, patrones, construcción (de n figuras inscritas), mitad, secuencia (de patrones mediante una fórmula), medida, datos, fórmula,	Pequeño, reduciendo, patrón, infinito, figura geométrica, patrones, magnitudes, construir n circunferencias, infinito, profundidad, decreciendo, infinitamente hacia dentro, modifican, cambiando, disminuyendo, menor tamaño, límites, tienden a infinito, profundidad, reduciendo, mayor, interno, añadiendo, indefinidamente	Disminuyen, pequeñas, cambiado, tamaño, reducido, patrón, infinitos, secuencia, disminuyendo, reducción, insertando, modificado, reduciendo, infinitas, agregando, dentro, efecto de profundidad, modificado, reduce, proporcionalmente, sucesivamente, internamente, interiores, exterior, grande,	Disminuido, triángulos inscritos, cambiando, reduciendo, disminuido, disminuye, patrones triángulos rectángulos, agregan, ciclo infinito, construyendo, o, infinitos triángulos, medida, triángulo equilátero, dentro ,grande , inscrito, medida, menor, pequeño, reducen, continuará,	Indefinidamente, indefinida, sucesión, hexágono interior, hexágono exterior, tamaño, pequeño, magnitudes, disminuyendo, cambiando, reduciendo, figuras inscritas, patrón, reducidas, cambiado, disminuido, profundidad, conjunto, construyendo, reduciendo infinitamente, infinitas áreas, infinitamente hacia dentro,	Reduciendo, tamaño, añadiendo, mitad, indefinida, patrón, Pitágoras, reducido, formando infinitamente, pequeña.

	profundidad, externo, decreciendo.	te, adentro, menor, círculos interiores, círculos exteriores, decreciendo, infinitos círculos, patrón.	subdividir, construyendo, divide, subdivisión, infinitos semicírculos.	indefinidamente, decreciendo, equiláteros, continuamente, antecedente, mitad, infinitamente, patrones, gradualmente, generando.	decreciendo, diminuto.	
Situaciones problemáticas emergentes: Afirmaciones	• El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente. • Sí se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área. • La primera área L^2, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera sería $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior.	• El área de la segunda figura es de $\frac{\pi r^2}{4}$ y el perímetro es de πr. La tercera figura, el área es de $\frac{\pi r^2}{16}$ y el perímetro es de $\frac{\pi r}{2}$. Según los hallazgos, si se modificaron las magnitudes. • Hay un patrón numérico en la construcción de cada circunferencia construida la cual será más pequeña y, por lo tanto, su área será menor. • Cada vez que se agregan	• Algunos estudiantes afirman que las semicircunferencias interiores son más pequeñas que la semicircunferencia del exterior, y la suma de sus áreas es la mitad de la semicircunferencia grande, mientras que la suma de sus perímetros es igual al perímetro de la semicircunferencia original. • De igual manera mencionan que la suma de las áreas de las semicircunferencias más pequeñas es	• Sus perímetros y sus áreas se van reduciendo, pero manteniendo la relación con respecto a L. El área de cada triángulo es la cuarta parte del triángulo antecedente. • La relación existente entre las nuevas figuras construidas es que estas reducen su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior, siguiendo el mismo patrón en sus perímetros	• Afirman que los hexágonos se van construyendo infinitamente hacia dentro a medida que se inscriben, y esto sucede con sus perímetros y la longitud de sus lados. • La figura irá decreciendo, ya que el hexágono se construye con los puntos medios de la figura anterior, y siempre habrá área por más diminuto que sea. • El área va cambiando, se va reduciendo según se	• Algunos estudiantes afirman que a medida se construyen nuevas longitudes en espiral estas reducirán su tamaño (longitud) a la mitad respecto a la figura anterior. • (...) cada vez que se va añadiendo una longitud en la espiral, se va reduciendo a la mitad. • Las longitudes de cada una de las espirales se irán haciendo muy pequeñas.

	• Sí porque el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas.	más círculos concéntricos, cada círculo va disminuyendo en sus medidas; el área de las circunferencias es cada vez más pequeño.	la cuarta parte de la semicircunferencia grande y que la suma de las áreas de los cuatro semicírculos, resulta igual que el área de uno de los dos semicírculos anteriores que están en el interior del primer semicírculo.	y áreas, ya que se puede dividir los triángulos infinitamente.	inscriben más figura. • Sus áreas se van reduciendo, según se van añadiendo figuras inscritas.	
	Visual-deductivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales: • Sí se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área. La primera área L^2, la	•Deductivo - intuitivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales. •Varios estudiantes reconocen el patrón numérico de la serie geométrica. El reconocimiento del patrón numérico (1/4) lo expresan mediante el registro de lenguaje natural, y que se pueden	• Varios estudiantes argumentan que han comprobado que las áreas se van reduciendo cada vez que se añaden más semicircunferencias. De igual manera argumentan la relación existente entre las semicircunferencias y el proceso de subdivisión de estas. • Ellos argumentan que, en efecto, al	• Los estudiantes argumentan que si se podría realizar la construcción de n figuras porque cada vez que se añade un triángulo va cambiando sus magnitudes. • En la construcción siempre se podrá seguir calculando las áreas, perímetros y lados ya que siempre se puede calcular la mitad de	• Los estudiantes en general presentan argumentos con características variacionales: • Reconocen algunas propiedades particulares del hexágono regular y su descomposición. Sin embargo, presentan en su actividad registros de tipo algebraico y hacen tratamientos en su interior. • Los estudiantes	• Si se puede realizar la construcción de la espiral de manera indefinida..., el patrón que obtenemos de la longitud espiral sería: $F_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ • Varios estudiantes argumentan que mediante el proceso de sacar las longitudes de la espiral existe un patrón. • Los estudiantes

Situaciones problemáticas emergentes: Argumentos	segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera sería $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. • El tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior. Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura (...), también se va formando más triángulos reducidos. • El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente. Entre más figuras aparecen más se reduce. (...) y entre más cuadrados, se ve una profundidad.	construir infinitos círculos dentro de la figura original, ya que la medida de sus áreas y longitudes siempre puede dividirse. • Argumentan que el proceso de ir construyendo circunferencias va a seguir indefinidamente; siempre el círculo de adentro va a ser de menor área que el círculo de afuera y los círculos interiores se van construyendo concéntricamente de acuerdo a los círculos exteriores y sus áreas serán la mitad de la figura anterior.	sumar los perímetros de las semicircunferencias que surgen de cada subdivisión se obtiene una longitud del perímetro igual a la semicircunferencia anterior, o sea, la semicircunferencia subdividida. • Deducen que se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, que si se suma las áreas de los 2 semicírculos construidos en la segunda figura, dará el área de la primera y así sucesivamente.	cada magnitud y siempre habrá triángulos inscritos infinitamente. • La relación existente entre las nuevas figuras construidas es que estas reducen su tamaño a la mitad respecto a la figura anterior, siguiendo el mismo patrón en sus perímetros y áreas. Los estudiantes encuentran una relación de las áreas cada vez que se dividen los triángulos.	reconocen la razón de la serie ($r = 3/4$) y que esta va disminuyendo con respecto al valor anterior y efectúan el cálculo mediante la fórmula para ello. • Con respecto al área, ellos sostienen que a medida que se van construyendo más hexágonos inscritos, estos van reduciendo infinitamente. Para ellos, entre más hexágonos se construyen, las longitudes de los lados del hexágono y su área disminuye.	argumentan que se puede seguir con la construcción de las espirales, porque el proceso se puede seguir formando infinitamente, de igual manera concluyen que las espirales tienen una razón de $\frac{1}{2}$ en su longitud con respecto a la longitud anterior.
	• La mayoría de estudiantes muestran que comprendieron los procedimientos de construcción, ya que explicitaron que siempre existe un patrón de construcción de una nueva figura que	• Reconocen el patrón vinculado que en los círculos sus áreas van disminuyendo un cuarto respecto a la figura concéntrica anterior y lo manifiestan mediante el registro de lenguaje natural.	• “Sí se han modificado por que cada vez se reduce más y más cada magnitud, mientras más semicírculos se agreguen más se hacen pequeños”. En esta afirmación se reflejan elementos	• Los estudiantes identifican un patrón en las áreas calculadas de los triángulos, la cual les ayuda a identificar la serie geométrica. • Varios estudiantes se aproximan	• Algunos grupos de estudiantes calculan las sumas de las áreas de varios hexágonos que les permite deducir en la periodicidad de un patrón para lograr reconocer la serie geométrica que les permite	• Los estudiantes han reconocido que la construcción de la espiral se puede realizar y que la longitud se puede determinar, algunos hacen uso del diagrama proporcionado

Conceptos y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo.	indica que su magnitud (área) se reduce a la mitad con cada construcción. En el mismo orden de ideas los estudiantes atestiguan que la construcción de cuadrados es infinito. • Algunos grupos de estudiantes hicieron cálculos y encontraron patrones en las longitudes de los cuadrados inscritos. El grupo G4N4 se percataron de la existencia de los primeros cuatro términos de un patrón aritmético y logrando establecer una fórmula algebraica general acercándose a una relación funcional del lado, para cualquier cuadrado inscrito en términos de lado $n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.	• Los estudiantes entienden el proceso de construcción mediante el empleo del infinito en variados registros, los cuales afirman que se puede construir una y otra y otra circunferencia concéntrica a la primera y siempre se puede seguir haciendo este proceso. • Los estudiantes recurrieron a la visualización cuando construyeron circunferencias concéntricas y dedujeron patrones de la construcción. • De igual manera usan como medio el software Geogebra para realizar dichos procesos de visualización, donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a las construcciones geométricas.	variacionales; como ser códigos variacionales y al equiparar las longitudes y magnitudes de las semicircunferencias, así como la aproximación a la noción del concepto de infinito. • “Se obtendrá un valor igual al del área de la primera figura, es decir, si suman las áreas de los 2 semicírculos construidos en la segunda figura, eso les dará el área de la primera figura y así sucesivamente”. Atendiendo a estas consideraciones, se ve evidenciado la variación ya que los estudiantes alcanzan establecer relaciones de congruencia entre el semicírculo original y los dos semicírculos que resultan al subdividirse, es así que dedujeron un patrón particular de las semicircunferencias	a la resolución por una estrategia de visualización expuesta anteriormente en el marco teórico. Ellos toman el triángulo original que se les proporciona y lo subdividen en triángulos congruentes y así sucesivamente como sea necesario. Este trabajo geométrico que efectúan los estudiantes da evidencia que utilizan ideas variacionales, ya que se percatan que el proceso de construcción sigue y lo maniobran con ello haciendo uso del registro geométrico. • Lo mismo se aprecia mediante el registro aritmético, donde escriben expresiones y cantidades diferentes a la figura inicial según la construcción	calcular las respectivas sumas infinitas. • El grupo número uno de estudiantes encuentra el área de algunos hexágonos apoyándose en la descomposición de triángulos rectángulos con ayuda de Geogebra y a la vez recurren a la visualización, ya que hacen uso de la visualización y descomponen el hexágono original. • Los estudiantes reconocen la relación de congruencia existente entre la altura del triángulo anterior y el lado del triángulo posterior en cada uno de los cálculos de los hexágonos. Ahí se evidencia que hay conversión de registros, entre el registro geométrico y algebraico cuando los estudiantes logran vincular dicha	, al cual le asignan valores para las espirales. Estos cálculos los realizan en el registro aritmético, de donde se dan cuenta de un patrón de potencias de dos para el denominador. • Los estudiantes afirman la posibilidad de seguir construyendo espirales de manera infinita. Si se sigue el proceso, la longitud va disminuyendo, y esto implica indicios e ideas de variación en ellos. De igual forma expresaron que si se podía seguir construyendo la espiral puesto que la longitud de los lados formaban una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y se observaba claramente un patrón de los lados de la espiral que seguía construyéndose.

	ncias; cada vez que dividían un semicírculo obtenían dos semicírculos, estos sumaban la longitud (perímetro y áreas) igual al semicírculo anterior. que efectuaron en el ámbito geométrico. Igualmente reconocieron patrones que les permitieron identificar la serie geométrica y calcular la suma de lo solicitado. relación de congruencia.
--	---

Fuente: Elaboración propia

4.3 Prueba final

Se confeccionó una prueba final (Ver anexo 4) de acuerdo al trabajo realizado en las sesiones de trabajo la cual fue diseñada para ser contestada de manera individual por los estudiantes en un lapso no mayor de dos horas. La prueba se conformó por doce preguntas cuyo objetivo principal fue valorar los desarrollos estudiantiles y determinar los elementos de pensamiento variacional que obtuvieron en su desarrollo, además se les invitó a realizar comentarios desde un punto de vista variacional.

Para la selección adecuada de las preguntas, de acuerdo con el enfoque teórico utilizado, se adoptó una mirada holística sobre el objeto matemático y su significados, la cual lleva a pensar no en un objeto simple, sino en un sistema complejo formado por partes o componentes que deben articularse o conectarse entre sí (Rondero y Font, 2015).

Análisis Ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo del trabajo analizado? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

En la pregunta uno, en general se les consultó que recordaran de las tareas del instrumento uno si podían sumar las áreas de todos de los cuadrados contruidos y a cuánto equivalen esos valores. Los estudiantes se focalizaron en la comprensión de la situación propuesta y algunos estudiantes presentaron una representación figural y algunos argumentos verbales para justificar el desarrollo de la situación propuesta. En la pregunta dos se les interrogó sobre el instrumento dos y si serían capaces de sumar las áreas de todos los círculos concéntricos contruidos y a cuánto equivale y equivalen esos valores. De igual manera, en la pregunta tres se les consultó respecto al instrumento tres, si podrían sumar las áreas de todos los semicírculos contruidos y a cuánto equivalen esos valores.

En cuanto a las preguntas cuatro y cinco se consultó si para ellos sería posible sumar todos los perímetros de las figuras contruidas en los instrumentos número uno, dos y tres. Así cómo a cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados y si hay algún patrón en las magnitudes de las figuras en los instrumentos antes mencionados. No obstante, en la interrogante número seis se les solicitó a los estudiantes en cuanto a que diferencias

podían encontrar en el instrumentó uno y en el instrumentó dos, o en el instrumentó dos y en el instrumentó tres; en que se parecían y cuáles serían sus similitudes.

Se pudo constatar en las interrogantes que algunos estudiantes evidenciaron diferentes elementos variacionales en sus afirmaciones como ser: reconocimiento de patrones Vasco (2006), momentos de pensamiento, variaciones , utilización de registros Duval (2006), actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales, estrategias variacionales, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, noción del infinito Mendoza (2013), identificación de objetos matemáticos (polígonos, cuadrados, sucesiones, dimensiones) empleo de algoritmos. En cuanto a los procedimientos y argumentos se visibilizan las estrategias variacionales Caballero y Cantoral (2013) específicamente la comparación, por ejemplo cuando hacen referencia a como el perímetro va disminuyendo respecto a la del cuadrado anterior o al del círculo, esto implica que hay un reconocimiento de patrón, además se visualiza la situación propuesta.

Respecto a la pregunta siete se les consultó sobre el trabajo realizado en el instrumento cuatro y si podían sumar las áreas de todos los triángulos equiláteros inscritos construidos y a cuánto equivalen esos valores. Asimismo en la pregunta ocho se les interrogó sobre el instrumento cinco y si serían capaces de sumar las áreas de todos los hexágonos inscritos y a cuánto equivalen esos valores. De igual manera, en la pregunta nueve se les consultó respecto al instrumento seis, si podrían sumar las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado y a cuánto equivalen esos respectivos valores.

En consecuencia en las preguntas diez y once se les consultó si para ellos es posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número cuatro, cinco y

seis, así como a cuánto equivalen esos valores en cada uno de los instrumentos aplicados y si hay algún patrón en las magnitudes de las figuras de los instrumentos antes mencionados. Sin embargo, en la interrogante número doce se les preguntó a los estudiantes en cuanto a que diferencias podían encontrar en el instrumento cuatro y cinco, o en el instrumento cinco y seis; en que se parecían, si hay patrones parecidos y cuáles serían sus similitudes.

En las interrogantes se observan diferentes estrategias y representaciones figúrales, además de argumentos que muestran con detalle los trabajos en la situación planteada. En esta situación se refleja con base al desarrollo de pensamiento variacional en las sesiones de trabajo, procesos generales vinculados al pensamiento matemático, elementos del pensamiento variacional, indicadores del pensamiento variaiconal, entre otros, donde la articulación entre los registros de representación es una manera de visibilizar las producciones de los estudiantes mediante códigos variacionales ligados a procesos de reflexión y visualización que el software Geogebra permite desarrollar.

Los estudiantes relacionan propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos informales, reflexionan matemáticamente y usan el lenguaje matemático para argumentar la solución de problemas sin llegar a formalizar la definición de serie geométrica. La visualización fue vital durante toda la sesión, puesto que al construir de manera gráfica, varias veces les permitió observar con mayor detalle el tamaño, las características de cada cuadrado construido y de este modo deducir, comparar las áreas de los mismos.

En las sesiones de trabajo uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis se encontró en alguna medida que los estudiantes utilizaron algunos elementos variacionales como ser: utilización de

registros de representación Duval (2006), actividades al interior de un registro, conversión entre registros, códigos variacionales , estrategias variacionales y empleo de algoritmos

Fase 2: Producciones de los estudiantes del grupo que son representativas de las interacciones surgidas al enfrentar las situaciones y preguntas problema

Pregunta Uno

E1:

Figura 14- 45 Suma de las áreas de los cuadrados inscritos obtenida por el estudiante uno referente a la pregunta uno

1. Recuerda el instrumento #1 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los cuadrados construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos de los cuadrados construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

1) Suma = $L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 = \frac{15}{8}L^2$

2) Áreas Totales $\rightarrow L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 + \dots + n$

3) equivale $\rightarrow S = \frac{a}{1-r} = \frac{1L^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2L^2$

Patrón $\rightarrow \left(\frac{1}{2^n}\right)L^2$

- En la segunda pregunta sacamos el patrón $\left(\frac{1}{2^n}\right)L^2$

En la tercera pregunta la suma de todas las áreas es $2L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E2: Si una vez calculando el valor de cada área de cada cuadrado inscrito se procede a sumar cada uno de ellos. La suma de las áreas de los cuatro primeros cuadrados construidos da como

resultado $S_4 = \frac{15L^2}{8}$. La suma total de todas las áreas de los cuadrados es $S = \frac{1L^2}{1-\frac{1}{2}} = 2L^2$.

E3: Si se pueden sumar las áreas de todos los cuadrados construidos,

$A = L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{8}L^2 + \frac{1}{32}L^2 + \dots$, su factor es L^2 y su razón = $\frac{1}{4}$, por tanto

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{L^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}L^2.$$

E4:

Figura 14- 46 Suma de la serie geométrica obtenida por el estudiante cuatro referente a la pregunta uno

Handwritten work for E4:

- Left side: L^2 , $\frac{1}{2}L^2$, $\frac{1}{4}L^2$, $\frac{1}{8}L^2$
- Top equation: $L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 = \frac{15}{8}L^2 \leftarrow \text{Sumas}$
- Circle: "Las áreas: $L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 + \dots + nL^2$ "
- Bottom text: "Áreas sumadas totales"
- Pattern: $\frac{1L^2}{2^n}$ (labeled "Patrón")
- Formula: $S = \frac{a}{1-r}$ (labeled "fórmula")
- Calculation: $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E5:

Figura 14- 47 Cálculos y conclusiones de la suma de la serie geométrica obtenida por el estudiante cinco referente a la pregunta uno

Handwritten work for E5:

- Left side: "valores" L^2 , $\frac{1L^2}{2}$, $\frac{1L^2}{4}$, $\frac{1L^2}{8}$
- Top equation: "sumatoria = $L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 = \frac{15}{8}L^2$ "
- Second equation: "todas las áreas = $L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{8}L^2 + \dots + n$ "
- Calculation: $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2L^2$
- Formula: $S = \frac{a}{1-r}$
- Pattern: $(\frac{1}{2^n})L^2 \leftarrow \text{Patrón}$
- Conclusion: "R/= Primeramente la sumatoria de todas las áreas da como resultado de $\frac{15}{8}L^2$, luego la incógnita es encontrar la enésima y colocamos las áreas con puntos suspensivos. la formula de las sumatorias y encontramos que $a = L^2$, y la razón es que va de $\frac{1}{2}$. Por la cual el patrón es: $(\frac{1}{2^n})L^2$."

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E15: En el instrumento #1 se encontraron los valores de los primeros 4 cuadrados construidos, el patrón de construcción de cada área es $\frac{1}{2^n} L^2$, siendo el total de la suma de las áreas es $2L^2$.

E16: Para encontrar la suma del área total de todos los cuadrados donde $a=1$ y $r=1/2$

utilizamos
$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} L^2 = 2L^2.$$

E17: De la misma forma que hay más cuadrados dentro del primero de lado L , el área de estos irá decreciendo a medida que se van construyendo. Así como sus perímetros y la longitud de sus lados.

Pregunta Dos

E1:

Figura 14- 48 Patrón de las áreas de los círculos concéntricos obtenido por el estudiante uno referente a la pregunta dos

hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los círculos concéntricos construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los círculos concéntricos construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

Áreas

$\pi r^2 \rightarrow 1 \text{ figura}$

$\frac{r^2}{4} \pi \rightarrow 2 \text{ figura}$

$\frac{r^2}{16} \pi \rightarrow 3 \text{ figura}$

$\frac{r^2}{64} \pi \rightarrow 4 \text{ figura}$

1) suma $= \pi r^2 + \frac{r^2}{4} \pi + \frac{r^2}{16} \pi + \frac{r^2}{64} \pi = \frac{85}{64} r^2 \pi$

* Primera pregunta sumamos las áreas de las 4 figuras del círculo, me da una respuesta de $\frac{85}{64} r^2 \pi$

2). suma de áreas $= \pi r^2 + \frac{r^2}{4} \pi + \frac{r^2}{16} \pi + \frac{r^2}{64} \pi + \dots$

Patrón $\rightarrow \left(\frac{\pi r^2}{2^{n(2)}} \right) L^2$, También se puede $\left(\frac{\pi r^2}{4^n} \right) L^2$

* este sería el patrón del instrumento 2.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E5:

Figura 14- 49 Patrón de las áreas de los círculos concéntricos obtenido por el estudiante cinco referente a la pregunta dos

res:

$$A_1 = \pi r^2$$

$$A_2 = \frac{r^2}{4} \pi$$

$$A_3 = \frac{r^2}{16} \pi$$

$$A_4 = \frac{r^2}{64} \pi$$

* Sumatoria de todas las áreas $= \pi r^2 + \frac{r^2}{4} \pi + \frac{r^2}{16} \pi + \frac{r^2}{64} \pi = \frac{85\pi r^2}{64}$ $S = \frac{a}{1-r}$

* Tricoguita para encontrar la enésima se necesita el patrón de área.

* Se realiza la suma de las áreas con el cual el resultado da $= \frac{85\pi r^2}{64}$

$\pi r^2 + \frac{r^2}{4} \pi + \frac{r^2}{16} \pi + \frac{r^2}{64} \pi + \dots + \frac{r^2}{4^n} \pi$

* Ahora con la fórmula de la suma se busca encontrar sus variables, es decir, la razón y factor.

* El patrón para encontrar la enésima.

$\left(\frac{\pi r^2}{4^n} \right) 12$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E6: Sí podemos sumar las áreas de cada uno de los círculos concéntricos construidos,

$$A_4 = \pi r^2 + \frac{1}{4} \pi r^2 + \frac{1}{16} \pi r^2 + \frac{1}{64} \pi r^2 = \frac{85}{64} \pi r^2, \text{ donde } a = \pi r^2 \text{ y } r = \frac{\frac{1}{64} \pi r^2}{\frac{1}{16} \pi r^2} = \frac{1}{4}, \text{ la suma de}$$

todas las áreas $S = \frac{\pi r^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi r^2}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \pi r^2$.

E10:

Figura 14- 50 Suma de la serie geométrica obtenidas de las circunferencias concéntricas por el estudiante diez referente a la pregunta dos

equivalen esos valores?

si podríamos realizar la suma de los áreas.

$$S_4 = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16} + \frac{\pi r^2}{64} = \frac{65}{64} \pi r^2$$

$$S = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16} + \frac{\pi r^2}{64} + \dots$$

$$S = \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right)$$

$$r = \frac{0.2}{0.1} \quad \frac{\frac{2}{2^0}}{\frac{2}{2^1}} = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{\pi r^2}{1 - \frac{1}{4}} \quad a = \frac{\pi r^2}{\frac{3}{4}} \quad a = \frac{4}{3} \pi r^2$$

mediante los calculos nos dimos cuenta que la areas van aumentando a razon de $\frac{1}{4}$

la suma total de las areas mediante el calculo realizado al dividir $\frac{\pi r^2}{1 - \frac{1}{4}}$ fue de $\frac{4}{3} \pi r^2$

efectivamente la construcción se puede

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E13: Según los trabajado en el instrumento #2 si se podrían sumar dichas áreas. La suma total

de todas las figuras inscritas es $S_{total} = \frac{a}{1-r} = \frac{\pi r^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \pi r^2$.

E15: En el instrumento #2 calculamos el valor de las primeras 4 circunferencias, y en los

cuales encontré 2 patrones para la construcción de cada área, $\frac{\pi r^2}{2^{2n}}$, $\frac{\pi r^2}{4^n}$.

E17: Para que el proceso de construcción de las circunferencias continúe indefinidamente, todo depende de sus medidas y el proceso de construcción.

Pregunta tres

E1: Sea d el diámetro de la primer figura (semicircunferencia), entonces el área de las primeras cuatro figuras es

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4}, F_2 = \frac{\pi d^2}{16} \rightarrow 2 \text{ figuras}, F_3 = \frac{\pi d^2}{64} \rightarrow 3 \text{ figuras}, F_4 = \frac{\pi d^2}{256} \rightarrow 4 \text{ figuras}, \dots, \text{ donde el}$$

patrón encontrado sería $\frac{\pi d^2}{4^n}$, entonces la suma de todas las áreas de los semicírculos

$$\text{teniendo que } \frac{\pi d^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots \right), \text{ con } a = \frac{\pi d^2}{2} \text{ y } r = \frac{1}{2}, \text{ sería } S_r = \frac{\frac{\pi d^2}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi d^2.$$

E2:

Figura 14- 51 Suma de la serie geométrica de las semicircunferencias obtenidas por el estudiante dos referente a la pregunta tres

3. Recuerda el instrumento #3 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los semicírculos construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los semicírculos construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

La suma de las áreas de los semicírculos es:

$$A = \pi \left(\frac{d^2}{8} \right) + \pi \left(\frac{d^2}{32} \right) + \pi \left(\frac{d^2}{128} \right) + \pi \left(\frac{d^2}{512} \right) = \pi \left(\frac{85 d^2}{512} \right)$$

la suma total de las enesimas es:

$$A_n = \pi \left(\frac{d^2}{2^3} \right) \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} \right)$$

Por lo tanto suprimir Valor, $= \pi \left(\frac{85 d^2}{512} \right)$ y el segundo valor de la suma es $= \pi \left(\frac{d^2}{6} \right)$

$$\text{total} = \frac{\pi \left(\frac{d^2}{2^3} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi \left(\frac{d^2}{2^3} \right)}{\frac{3}{4}} = \pi \left(\frac{d^2}{6} \right)$$

$a = \pi \left(\frac{d^2}{2^3} \right)$
 $r = \frac{1}{512} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{128}$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E15: En el instrumento tres se obtuvo el valor de las áreas de los primeros cuatro semicírculos. Se encontraron dos patrones para la construcción de cada área el cual es

$$\frac{\pi d^2}{4}, \frac{\pi d^2}{16}, \frac{\pi d^2}{64}, \frac{\pi d^2}{256}, \dots, \frac{\pi d^2}{2^{2n}}; \text{ la suma total de todas las áreas de los semicírculos es } \pi d^2.$$

E16: La suma total de las áreas del instrumento tres es $\frac{16\pi d^2}{15}$, donde $r = \frac{1}{16}$ y $a = \frac{\pi d^2}{4}$,

entonces
$$\text{Suma total} = \frac{\pi d^2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \pi d^2.$$

E17: Al seguir construyendo semicircunferencias, la primer semicircunferencia de diámetro **D** y los que están dentro de ella, van decreciendo en su tamaño, y en sus medidas a medida se van añadiendo más. El diámetro de las semicircunferencias es cada vez más pequeño.

Pregunta cuatro

E7:

Figura 14- 52 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante siete referente a la pregunta cuatro

4. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 1, número 2, número 3? ¿A cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?	
7) Suma de perímetros del cuadrado $P_0 = 4L + 2\sqrt{2}L + \sqrt{2}L + \frac{\sqrt{2}}{2}L = 15/2 \sqrt{2}$	Suma de la sucesión del cuadrado $4L + 2\sqrt{2}L + \sqrt{2}L + \frac{\sqrt{2}}{2}L =$ No pudo sacar la sucesión porque no tengo el siguiente valor.
Suma de perímetros del círculo $P_0 = 2\pi r + \pi r + \pi \frac{r}{2} + \pi \frac{r}{4} = \pi 15/4$	Suma de la sucesión del círculo $A = 2\pi r, r = \frac{1}{2}$ $A = \pi r \Rightarrow \frac{1}{1 - 1/2} = 2\pi r + 2\pi r = 4\pi r$
Suma de perímetros del semicírculo $P_0 = \pi(\frac{d}{2}) + \pi(\frac{d}{4}) + \pi(\frac{d}{8}) + \pi(\frac{d}{16}) = \pi(\frac{17d}{8})$	Suma de la sucesión del semicírculo $a = \pi d, r = \frac{1}{2}$ Pr. 1. $\pi d (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ Pr. 2. $\frac{\pi d}{1 - 1/2} = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi d$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E4: La suma de todos los perímetros de los cuadrados del instrumento uno no es posible realizarla, debido a que no se le pudo encontrar un patrón.

E11:

Figura 14- 53 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante once referente a la pregunta cuatro

4. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 1, número 2, número 3? ¿A Cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?

Suma de Semicírculos
 $P_0 = \pi d + \pi d/2 + \pi d/4 + \pi d/8 = \pi 15d/8$

Suma de Cuadrados
 $P_0 = 4L + 2\sqrt{2}L + \sqrt{2}L + \sqrt{2}/2L = 15\sqrt{2}L/2$

Suma de Círculo
 $P_0 = 2\pi r + \frac{\pi r}{2} + \frac{\pi r}{4} = \frac{11\pi r}{4}$

Suma de la encima del semicírculo:
 $a = \pi d \quad r = 1/2$
 $P_{total} = \pi d \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$
 $P_{total} = \frac{\pi d}{1 - 1/2} = \frac{\pi d}{1/2} = \boxed{2\pi d}$

Suma de la encima del cuadrado
 No lo encontramos

Suma de la encima del Círculo
 $a = \pi r \quad r = 1/2$
 $P_{total} = \pi r \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$
 $P_{total} = \frac{\pi r}{1 - 1/2} = \frac{\pi r}{1/2} = 2\pi r + 2\pi r = \boxed{4\pi r}$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E17: Siempre la medida de los perímetros de cada figura interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados son la mitad de las figuras correspondientes antes mencionadas.

E13:

Figura 14- 54 Suma de los perímetros de los infinitos cuadrados, círculos y semicircunferencias obtenidas por el estudiante trece referente a la pregunta cuatro

4. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 1, número 2, número 3? ¿A Cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?

Ins 1	Ins 2	Ins 3
$4L$	$2\pi r$	$\pi \frac{d}{2}$
$2\sqrt{2}L$	πr	$\pi \frac{d}{8}$
$2L$	$\pi \frac{r}{2}$	$\pi \frac{d}{16}$
$\sqrt{2}L$	$\pi \frac{r}{16}$	$\pi \frac{d}{64}$

Cuadrado
 $\text{Cuadrado} = \text{Ins 1} = 4L + 2\sqrt{2}L + 2L + \sqrt{2}L = 15\sqrt{2}L$
 $\text{Círculo} = \text{Ins 2} = 2\pi r + \pi r + \frac{\pi r}{2} + \frac{\pi r}{16} = 15\frac{1}{4}\pi r$
 $\text{Semi} = \text{Ins 3} = \pi \frac{d}{2} + \pi \frac{d}{8} + \pi \frac{d}{16} + \pi \frac{d}{64} = \frac{49}{64}\pi d$

Círculo
 $a = 2\pi r \quad r = 1/2$
 $S_{total} = \frac{\pi r}{1 - 1/2} = \frac{1}{1/2} = 2\pi r + 2\pi r = \boxed{4\pi r}$

Cuadrado
 No pude encontrar un patrón correcto

Semicírculo
 $a = \pi d \quad r = 1/4$
 $S_{total} = \frac{\pi d}{1 - 1/4} = \frac{1}{3/4} = \boxed{\frac{4}{3}\pi d}$

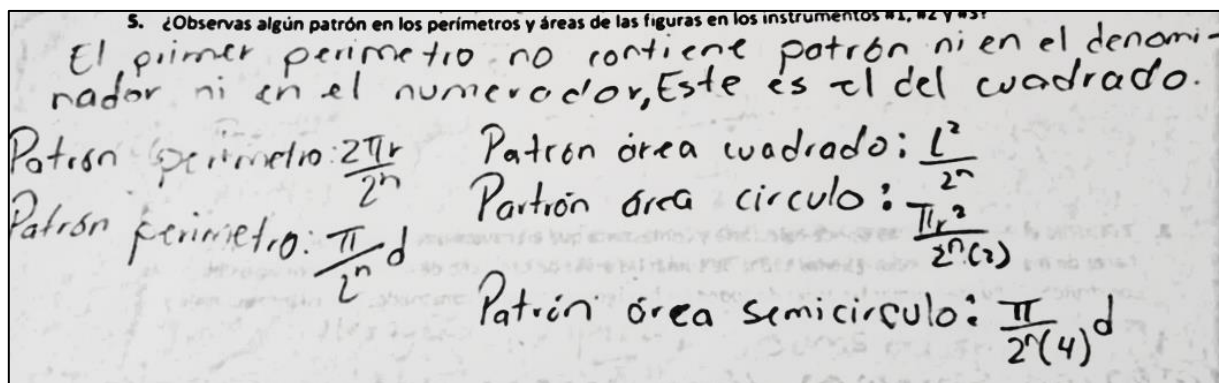
Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

Pregunta cinco

	Instrumento 1	Instrumento 2	Instrumento 3
E1: Los patrones encontrados	$\text{área} = \left(\frac{1}{2^n}\right)L^2$ $\text{Perímetro} = \text{patrón}$ no encontrado.	$\text{área} = \frac{\pi r^2}{4^n}$ $P = \frac{2\pi r}{2^n}$	$\text{área} = \frac{\pi d^2}{4^n}$ $P = \frac{\pi d}{2^n}$

E16:

Figura 14- 55 Argumentos descritos mediante registro verbal del estudiante dieciséis referente a la pregunta cinco



Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E17: Todas las figuras van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de un patrón. Por tanto se puede conocer el área y perímetro de cada una de las figuras al saber la medida del lado inicial de cada una.

Pregunta seis

E1: Se tiene que la razón en los patrones de las áreas de los instrumentos uno, dos y tres es $\frac{1}{2}$ y varía según la figura.

E4: En los patrones encontrados dependiendo de las medidas, el factor puede cambiar, mientras que la razón de $\frac{1}{2}$ se mantiene igual en las áreas.

E6: Se encontraron variaciones en los instrumento #1 y #2.

E13: Considero que en los tres primeros problemas, en sus áreas y perímetros hay variaciones y van disminuyendo.

E17: Las similitudes entre las figuras de los tres primeros instrumentos es que se pueden encontrar y calcular infinitas áreas y perímetros en las figuras dadas.

Pregunta siete

E1:

Figura 14- 56 Suma de la serie geométrica de los infinitos triangulo obtenidos por el estudiante uno referente a la pregunta siete

7. Recuerda el instrumento #4 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida. ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los triángulos equiláteros inscritos construidos?, ¿Puedes sumar las áreas de todos de los triángulos equiláteros construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

$$\frac{A_{119}}{\frac{\sqrt{3}}{4} L^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16} L^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{64} L^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{256} L^2$$

1) Suma de Area

$$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{64} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{256} L^2 = \frac{85\sqrt{3}}{256} L^2$$

2) $\frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{64} L^2 + \frac{\sqrt{3}}{256} L^2 + \dots n$
 Patron = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2^{n+2}}\right) L^2$ o $\left(\frac{\sqrt{3}}{4^n}\right) L^2$

3) suma Total = $\frac{\sqrt{3}}{2} L^2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} L^2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3} L^2$
 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ - Primera Pregunta, sumamos las areas de las 4 Figuras el total el $\frac{85\sqrt{3}}{256} L^2$
 - Segunda Pregunta, el patron seria $\left(\frac{\sqrt{3}}{2^{n+2}}\right) L^2$ o $\left(\frac{\sqrt{3}}{4^n}\right) L^2$
 - Tercera Pregunta, la suma total de todas las areas es de $\sqrt{3} L^2$

Recuerda el instrumento #5 donde calculaste...

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E2: Encontré el área de los primeros 4 triángulos inscritos para encontrar el patrón de cada

área $\frac{\sqrt{3}}{2^n} L^2$, y la suma total que es $S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} L^2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3} L^2$.

E5: $\sqrt{3}L^2$ sería la suma de todas las áreas, ya que en el instrumento 4 realizamos la suma de los primeros cuatro triángulos encontrando su patrón.

E7: La suma total de todos los triángulos construidos es $S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}L^2$, donde el factor

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ y la razón} = \frac{1}{4}.$$

E11:

Figura 14- 57 Cálculo de la razón y de la suma de la serie geométrica de los infinitos triángulos inscritos obtenida por el estudiante once referente a la pregunta siete

Suma del área de los triángulos

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{64}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{256}L^2 = \frac{85\sqrt{3}}{256}L^2$$

La suma total del área enésimo es: $a = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ $r = 1/4$

$$A_{\text{total}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2}{1 - 1/4} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}L^2}{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{3}L^2$$

Su primer valor es $= \frac{85\sqrt{3}}{256}L^2$
y su segundo es $= \frac{\sqrt{3}}{3}L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E17: La construcción se podrá construir hasta llegar a un triángulo de lado infinitamente pequeño, o sea que su área sea que casi nada.

Pregunta ocho

E1:

Figura 14- 58 Suma de la serie geométrica de los hexágonos inscritos obtenido por el estudiante uno referente a la pregunta ocho

hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los hexágonos inscritos construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los hexágonos inscritos construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

Área

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

$$\frac{3^2\sqrt{3}}{2^3}L^2$$

$$\frac{3^3\sqrt{3}}{2^5}L^2$$

$$\frac{3^4\sqrt{3}}{2^6}L^2$$

1) suma de Área

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{9\sqrt{3}}{8}L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{32}L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{256}L^2 = \frac{915\sqrt{3}}{256}L^2$$

2) No se encuentra el patrón del área de la figura.

3) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(1L^2 + \frac{3}{4}L^2 + \frac{9}{16}L^2 + \frac{9}{64}L^2 \right)$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 = \left[\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2}{1 - \frac{3}{4}} \right] = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}L^2$$

-Primera Pregunta - sumamos el área de las cuatro figuras es $\frac{915\sqrt{3}}{256}L^2$

-segunda Pregunta - no se encuentra el patrón del área de la figura

-Tercera Pregunta - la suma de todas las áreas es $6\sqrt{3}L^2$.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E8: En los términos tanto en el numerador como en el denominador, no contienen una similitud en la secuencia del cálculo por tanto no se puede calcular un patrón para el enésimo término.

E11: La suma de las primeras tres áreas de los hexágonos inscritos es $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{9\sqrt{3}}{8}L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{32}L^2 = \frac{79\sqrt{3}}{32}L^2$, luego la suma total de las áreas hasta la enésima es:

$$A_{tot} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{3^2\sqrt{3}}{2^3}L^2 + \frac{3^3\sqrt{3}}{2^5}L^2 + \dots = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2}{1 - \frac{3}{4}} = 6\sqrt{3}L^2, \text{ donde el factor } a = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 \text{ y la}$$

razón r es $r = \frac{3}{4}$.

E15:

Figura 14- 59 Conclusiones mediante registro aritmético y verbal del estudiante quince referente a la pregunta ocho

Handwritten student work showing a sequence of hexagon areas and a conclusion about a geometric series.

Top row: $T_1 \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2$ followed by the sum $\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 + \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{32} L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{256} L^2 + \dots + N$

Second row: $T_2 \frac{3\sqrt{3}}{2^3} \circ \frac{9\sqrt{3}}{8}$ followed by the text: "No se encontró un patrón. Razón: $L^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{9}{256} \right)$ "

Third row: $T_3 \frac{3\sqrt{3}}{2^3} \circ \frac{27\sqrt{3}}{32}$ followed by the text: "En este instrumento, se encontraron 4 áreas. No se encontró un patrón. Por tanto se deduce que no hay una razón constante de cambio, por tanto no se logró obtener la suma total de áreas."

Fourth row: $T_4 \frac{3\sqrt{3}}{2^8} \circ \frac{27\sqrt{3}}{256}$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E17: En la construcción cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad, si el lado y así sucesivamente. Se pueden calcular las áreas de los hexágonos $\frac{3\sqrt{3}}{2} L^2, \frac{9\sqrt{3}}{8} L^2, \frac{27\sqrt{3}}{32} L^2, \dots$ y continuar este patrón hasta el área del enésimo hexágono construyendo hasta los infinitos hexágonos.

Es así que las sumas de las áreas de los infinitos hexágonos calculando la suma con la serie geométrica, donde el área total de los infinitos hexágonos es $6\sqrt{3}L^2$.

Pregunta nueve

E1:

Figura 14- 60 Cálculo del patrón y de la suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante uno referente a la pregunta nueve

hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado que construiste?, ¿Puedes sumar las distancias de los extremos de los segmentos de la espiral que construiste? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

longitud

$$\frac{\sqrt{5}}{2}L, \frac{\sqrt{5}}{4}L, \frac{\sqrt{5}}{8}L, \frac{\sqrt{5}}{16}L$$

1) $\frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L = \frac{15\sqrt{5}}{16}L$

2) $\frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L + \dots + n$

Patrón $\left(\frac{\sqrt{5}}{2^n}\right)L$

3) $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right)$ suma T. $\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}L^2$

- Primera Pregunta, la suma de las longitudes de las 4 figuras es $\frac{15\sqrt{5}}{16}L$.

- Segunda Pregunta, el patrón para calcular la n es $\left(\frac{\sqrt{5}}{2^n}\right)L$.

- Tercera Pregunta, la suma total de todas las áreas es $\sqrt{5}L^2$.

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E4: Realizando las mismas operaciones de las anteriores en las sesiones de trabajo respectivas, encontramos que las primeras 4 longitudes de la espiral son:

$\frac{\sqrt{5}}{2}L, \frac{\sqrt{5}}{4}L, \frac{\sqrt{5}}{8}L, \frac{\sqrt{5}}{16}L, \dots$ el patrón encontrado es $\frac{\sqrt{5}}{2^n}L$, y el total de las sumas hasta la

“n” es $Suma = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$

E10:

Figura 14- 61 Cálculo del patrón y suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante diez referente a la pregunta nueve

Longitud

1) $\frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L = \frac{15\sqrt{5}}{16}L$

2) $\frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L \dots$ Patrón $(\frac{\sqrt{5}}{2^n})L$

3) $\frac{\sqrt{5}}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ sum total $= \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

- $\frac{\sqrt{5}}{2}L$

- $\frac{\sqrt{5}}{4}L$

- $\frac{\sqrt{5}}{8}L$

- $\frac{\sqrt{5}}{16}L$

- en la primera pregunta, detalla la suma de las longitudes de las figuras es $\frac{15\sqrt{5}}{16}L$

- el patrón obtenido en la segunda es $(\frac{\sqrt{5}}{2^n})L$

- la suma de las áreas es $\sqrt{5}$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E11: La suma de las primeras cuatro distancias de la espiral son

$$D = \frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L = \frac{15\sqrt{5}}{16}L, \text{ donde la suma total está dada}$$

$$D_{tot} = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right), \text{ y al calcular la serie tenemos el factor } a = \frac{\sqrt{5}}{2}L \text{ y la}$$

$$\text{razón r es } r = \frac{3}{4}, \text{ entonces } D_{tot} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{5}.$$

E9:

Figura 14- 62 Suma de la longitud de la espiral construida por el estudiante nueve referente a la pregunta nueve

Longitud

$$\frac{\sqrt{3}}{2} L$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4} L$$

$$\frac{\sqrt{5}}{8} L$$

$$\frac{\sqrt{5}}{16} L$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} L + \frac{\sqrt{5}}{4} L + \frac{\sqrt{5}}{8} L + \frac{\sqrt{3}}{16} L = \boxed{\frac{15\sqrt{3}}{16} L} \rightarrow \text{suma de las longitudes}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} L + \frac{\sqrt{5}}{4} L + \frac{\sqrt{5}}{8} L + \frac{\sqrt{5}}{16} L \dots + n \rightarrow \text{cálculo para encontrar la enésimo}$$

El patrón es $\left(\frac{\sqrt{5}}{2^n}\right) L$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) S_{\text{Total}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\sqrt{5}}$$

Patrón para encontrar la suma total de las áreas

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

Pregunta diez

E4:

Figura 14- 63 Suma de los perímetros de los triángulos, hexágonos y cuadrados por el estudiante cuatro referente a la pregunta diez

Triangulo	Hexagono	Cuadrado
$3L$	$6L$	$\sqrt{5} L$
$\frac{3}{2} L$	$3\sqrt{3} L$	$\frac{\sqrt{5}}{4} L$
$\frac{3}{4} L$	$\frac{9}{2} L$	$\frac{\sqrt{5}}{8} L$
$\frac{3}{8} L$	$\frac{9}{4} L$	$\frac{\sqrt{5}}{16} L$

Triangulo

$$3L + \frac{3}{2}L + \frac{3}{4}L + \frac{3}{8}L = \boxed{\frac{45}{8} L}$$

Hexagono

$$6L + 3\sqrt{3}L + \frac{9}{2}L + \frac{9}{4}L + \frac{9}{8}L + 3\sqrt{3}$$

Cuadrado

$$\frac{\sqrt{5}}{2} L + \frac{\sqrt{5}}{4} L + \frac{\sqrt{5}}{8} L + \frac{\sqrt{5}}{16} L = \boxed{\frac{15\sqrt{5}}{16}}$$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E16: En la figura del hexágono, no encontramos un patrón determinado ni razón, Por lo tanto no encontramos la suma total de los perímetros.

E17: Suponemos que las razones encontradas que conforman la figuras en los tres instrumentos son semejantes entre ellos ya que tienen el mismo denominador con sus respectivas potencias y cada uno es proporcional hasta cierto límite.

E10:

Figura 14- 64 Cálculo de las razones y suma de la serie geométrica de los infinitos triángulos, cuadrados y hexágonos inscritos obtenidos por el estudiante diez referente a la pregunta diez

10. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 4, número 5 y número 6? ¿A cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?

hexágono	espiral	Triángulo	$a=3 \quad r=\frac{1}{2}$
$6L$	$\frac{\sqrt{5}}{2}L$	$3L$	$3(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots)$
$3\sqrt{3}L$	$\frac{\sqrt{5}}{4}L$	$\frac{3}{2}L$	$\text{Triángulo} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6L^2$
$\frac{9}{2}L$	$\frac{\sqrt{5}}{8}L$	$\frac{3}{4}L$	hexágono = no se encontró una razón ni factor porque los números son diferentes
$\frac{9}{4}L$	$\frac{\sqrt{5}}{16}L$	$\frac{3}{8}L$	

$P_{\text{hexágono}} = 6L + 3\sqrt{3}L + \frac{9}{2}L + \frac{9}{4}L = \frac{51}{4}L + 3\sqrt{3}L$
 $P_{\text{cuadrado}} = \frac{\sqrt{5}}{2}L + \frac{\sqrt{5}}{4}L + \frac{\sqrt{5}}{8}L + \frac{\sqrt{5}}{16}L = \frac{15\sqrt{5}}{16}L$
 $P_{\text{triángulo}} = 3L + \frac{3}{2}L + \frac{3}{4}L + \frac{3}{8}L = \frac{45}{8}L$

espiral
 $\frac{\sqrt{5}}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots)$
 $a = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad r = \frac{1}{2} \quad \text{espiral} \quad \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}L^2$
 La suma total de las áreas de la espiral es $\sqrt{5}L^2$

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

Pregunta once

E1: Los patrones encontrados

Instrumento 4

$$\text{área} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4^n} \right) L^2$$

$$P = \frac{3}{2^n} L$$

Instrumento 2

área = patrón no encontrado.

Perímetro = patrón

no encontrado.

Instrumento 3

área = ...

$$P = \frac{\sqrt{5}}{2^n} L$$

E5: El patrón del área de los triángulos inscritos es $\left(\frac{\sqrt{3}}{2^{2n}} \right) L^2$, y el perímetro $\frac{3}{2^n} L$. De la

figura hexágonos inscritos no se encontró un patrón definido respecto a su área o perímetro.

En cuanto a la figura del cuadrado donde se dan longitudes de una espiral; el patrón de su

perímetro sería $\frac{\sqrt{5}}{2^n} L$.

E7:

Figura 14- 65 Cálculo de patrones de las sumas de áreas construidas por el estudiante siete referente a la pregunta once

11. ¿Observas algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos #4, #5 y #6?

Perímetro Patrón #4 $P_4 = 3L + \frac{3}{2}L + \frac{3}{4}L + \frac{3}{8}L + \dots + \frac{3}{2^n}L$ $3L \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ Patrón #5 $P_5 = 6L + 3\sqrt{3}L + \frac{9\sqrt{3}}{2}L + \frac{27\sqrt{3}}{4}L + \dots$ No encuentro un patrón Perímetro Patrón #6 $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ Patrón $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$	Patrón área #4 $A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{64}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{256}L^2 + \dots$ $\sqrt{3}L^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ Patrón = $\frac{\sqrt{3}L^2}{2^n}$ Patrón área #5 $P_5 = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2^3}L^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2^5}L^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2^8}L^2 + \dots$ Patrón = $\frac{3\sqrt{3}L^2}{2^n}$ Patrón área #6 No tiene área.
---	---

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E10: Lo que observamos en relación a los patrones encontrados en las sesiones de trabajo es que el denominador es común y es 2^n , mientras que el numerador es el único que cambia y no son comunes sus valores.

E11:

Figura 14- 66 Cálculo de patrones de las sumas de los perímetros y áreas construidas por el estudiante once referente a la pregunta once

11. ¿Observas algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos #4, #5 y #6?

Patrón Perímetro #4
 $P_4 = 3L + \frac{3}{2}L + \frac{3}{4}L + \frac{3}{8}L$
 $P_4 = 3L \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ **Patrón** $\frac{3L}{2^n}$

Patrón Perímetro #5
 $P_5 = 6L + 3\sqrt{3}L + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4}$ } **No tiene**

Patrón Perímetro #6
 $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ **Patrón** $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$

Patrón Área #4
 $A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{16}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{64}L^2 + \frac{\sqrt{3}}{256}L^2$
 $\sqrt{3}L^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ **Patrón** $\frac{\sqrt{3}L^2}{2^n}$

Patrón Área #5
 $A_5 = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{3^2\sqrt{3}}{2^3}L^2 + \frac{3^3\sqrt{3}}{2^5}L^2 + \frac{3^4\sqrt{3}}{2^8}L^2$

Patrón Área #6
No tiene Área

Fuente: Con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes

E17: Todas las figuras van presentando un decrecimiento que puede ser conformado por medio de un patrón. Es así que se puede saber el área y perímetro de cada una de las figuras al conocer la medida del lado inicial de cada una de las figuras antes mencionadas.

Pregunta doce

E1: En el perímetro, la similitud que tienen las sesiones de trabajo 4 y 6 es que sus razones son iguales, $r = 1/2$.

E6: En los patrones de los instrumentos #4 y #6 tenemos similitudes ya que ambos varían y se reducen en sus valores similarmente.

E11: En sus áreas varían los valores de los numeradores, pero en sus denominadores se mantiene el mismo patrón de donde sus razones encontradas son las mismas.

E13: No logré encontrar diferencias, y no hay parecido ni similitudes en los patrones.

E14: No encontré similitudes, ya que no encontré patrones algunos en las sesiones 5 y 6.

E15: La única similitud encontrada se da en los patrones de los perímetros de los triángulos inscritos y la espiral que tienen una razón de $\frac{1}{2}$.

E17: Las similitudes entre las figuras de las sesiones de trabajo 4, 5 y 6 es que se pueden encontrar y calcular infinitas áreas y perímetros en las figuras dadas. Es así que al encontrar los patrones pertinentes se puede identificar las series geométricas y calcular las sumas de los elementos en las figuras antes mencionadas.

Fase 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de las sesiones de trabajo

▪ Lenguaje previo:

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, cuadrados, polígono regular, longitud, medida, construcción, lado, series, puntos medios, áreas, figura inscrita, perímetro, círculos, circunferencias, radio, figura concéntrica, circunscrita, semicírculos, semicircunferencias, diámetro, punto, polígono regular, espiral, interior, vértice, punto, lado, proceso, patrón.

▪ Lenguaje emergente:

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de las sesiones de trabajo: Equivale, enésima, dentro, decreciendo, construyendo, aumentando, continuar, indefinidamente, dentro, tamaño, añadiendo, pequeño, figura interior, figura exterior, numerador, denominador, decrecimiento, razón , varía, cambiar, variaciones, disminuyendo, infinitas áreas, infinitamente pequeño, secuencia, razón constante de cambio, disminuirá, sucesivamente, semejantes, proporcional, límite, decrecimiento, similarmente.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

Los estudiantes se circunscriben a los ejercicios propuestos en la sesión de estudio y en sus textualidades no se exhibe una nueva situación que aporte otros elementos diferentes a los propuestos. Por tanto, en sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado.

Fase 5:

a) Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Sí, una vez calculando el valor de cada área de cada cuadrado inscrito se procede a sumar cada uno de ellos. La suma de las áreas de los cuatro primeros cuadrados construidos da como

resultado $S_4 = \frac{15L^2}{8}$. La suma total de todas las áreas de los cuadrados es $S = \frac{1L^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2L^2$

Si se pueden sumar las áreas de todos los cuadrados contruidos,

$A = L^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{8}L^2 + \frac{1}{32}L^2 + \dots$, su factor es L^2 y su razón= $\frac{1}{4}$, por tanto

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{L^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}L^2.$$

Sí, podemos sumar las áreas de cada uno de los círculos concéntricos contruidos.

$A_4 = \pi r^2 + \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{16}\pi r^2 + \frac{1}{64}\pi r^2 = \frac{85}{64}\pi r^2$, donde $a = \pi r^2$ y $r = \frac{\frac{1}{64}\pi r^2}{\frac{1}{16}\pi r^2} = \frac{1}{4}$, la suma de

todas las áreas $S = \frac{\pi r^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi r^2}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\pi r^2$.

Para que el proceso de construcción de las circunferencias continúe indefinidamente, todo depende de sus medidas y el proceso de construcción.

La suma de todos los perímetros de los cuadrados del instrumento uno no es posible realizarla, debido a que no se le pudo encontrar un patrón (Vasco, 2006).

En los patrones encontrados dependiendo de las medidas, el factor puede cambiar, mientras que la razón de $\frac{1}{2}$ se mantiene igual en las áreas.

Las similitudes entre las figuras de los tres primeros instrumentos es que se pueden encontrar y calcular infinitas áreas y perímetros en las figuras dadas.

En los términos tanto en el numerador como en el denominador, no contienen una similitud en la secuencia del cálculo, por tanto, no se puede calcular un patrón para el enésimo término.

(...) las razones encontradas que conforman las figuras en los tres instrumentos son semejantes entre ellos ya que tienen el mismo denominador con sus respectivas potencias y cada uno es proporcional hasta cierto límite.

(...) en relación a los patrones encontrados en las sesiones de trabajo es que el denominador es común y es 2^n , mientras que el numerador es el único que cambia y no son comunes sus valores.

En sus áreas varían los valores de los numeradores, pero en sus denominadores se mantiene el mismo patrón, donde sus razones encontradas son las mismas.

La única similitud encontrada se da en los patrones de los perímetros de los triángulos inscritos y la espiral que tienen una razón de $\frac{1}{2}$.

Las similitudes entre las figuras de las sesiones de trabajo 4, 5 y 6 es que se pueden encontrar y calcular infinitas áreas y perímetros en las figuras dadas.

Al seguir construyendo semicircunferencias, la primer semicircunferencia de diámetro **D** y los que están dentro de ella, van decreciendo en su tamaño y en sus medidas se van añadiendo más. El diámetro de las semicircunferencias es cada vez más pequeño.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

En el instrumento 1 se encontraron los valores de los primeros 4 cuadrados construidos, el patrón de construcción de cada área es $\frac{1}{2^n} L^2$, siendo el total de la suma de las áreas es $2L^2$

Los estudiantes argumentan que para encontrar la suma del área total de todos los cuadrados

donde $a=1$ y $r=1/2$ utilizamos $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} L^2 = 2L^2$, de la misma forma que hay más

cuadrados dentro del primero de lado L , el área de estos irá decreciendo a medida que se van construyendo. Así como sus perímetros y la longitud de sus lados.

Todas las figuras van presentando un decrecimiento que puede ser conformado por medio de un patrón. Es así que se puede saber el área y perímetro de cada una de las figuras al conocer la medida del lado inicial de cada una de las figuras antes mencionadas.

Siempre la medida de los perímetros de cada figura interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados son la mitad de las figuras correspondientes antes mencionadas.

El patrón del área de los triángulos inscritos es $\left(\frac{\sqrt{3}}{2^{2n}}\right)L^2$, y el perímetro $\frac{3}{2^n}L$. De la figura

hexágonos inscritos no se encontró un patrón definido respecto a su área o perímetro. En cuanto a la figura del cuadrado donde se dan longitudes de una espiral; el patrón de su

perímetro sería $\frac{\sqrt{5}}{2^n}L$.

Es así que al encontrar los patrones pertinentes se puede identificar las series geométricas y calcular las sumas de los elementos en las figuras dadas.

Tenemos que la suma de las primeras tres áreas de los hexágonos inscritos es

$\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{9\sqrt{3}}{8}L^2 + \frac{27\sqrt{3}}{32}L^2 = \frac{79\sqrt{3}}{32}L^2$, luego la suma total de las áreas hasta la enésima es:

$$A_{tot} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 + \frac{3^2\sqrt{3}}{2^3}L^2 + \frac{3^3\sqrt{3}}{2^5}L^2 + \dots = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2}{1 - \frac{3}{4}} = 6\sqrt{3}L^2, \text{ donde el factor } a = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 \text{ y la}$$

razón r son $r = \frac{3}{4}$.

Algunos estudiantes argumentan que en la respectiva construcción cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad y así sucesivamente. Se pueden calcular las áreas de los

hexágonos $\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2, \frac{9\sqrt{3}}{8}L^2, \frac{27\sqrt{3}}{32}L^2, \dots$, y continuar este patrón hasta el área del enésimo

hexágono construyendo hasta los infinitos hexágonos. Es así que las sumas de las áreas de los infinitos hexágonos calculando la suma con la serie geométrica, donde el área total de los infinitos hexágonos es $6\sqrt{3}L^2$.

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:

En relación a los objetos matemáticos involucrados en el planteamiento de las sesiones de trabajo, tales como hexágono, triángulos, espiral, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro, medida, longitud, áreas, figura inscrita, interior, vértice, punto medio, proceso, sucesión, construcción geométrica, entre otros, los estudiantes tienen las concepciones tradicionales en matemáticas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Las producciones estudiantiles mostraron que ellos poseen un dominio conceptual de la mayoría de estos conceptos, sin embargo, las aseveraciones y argumentos que presentan

evidencian que se requiere potenciar aún más aspectos de los conceptos matemáticos desde otra mirada más dinámica y menos estática con ayuda de softwares dinámicos.

Emergentes:

Los estudiantes hicieron intentos por realizar el estudio variacional de las sesiones de trabajo cuatro, cinco y seis, deliberando respecto a los problemas y haciendo uso de habilidades cognitivas, como la de visualizar (Arcavi, 2003), representar, deducir, objetar, analizar y resumir que se evidenciaron en los distintas figuras geométricas que fueron expresándose por algún tipo de representación ostensible.

Algunos estudiantes reflexionaron de manera dinámica respecto a la variación (Cabezas y Mendoza, 2016) cuando contestaban las interrogantes y trataban de calcular las áreas y los perímetros en las figuras de las tres sesiones de trabajo presentadas. Por tanto, esto nos hace vislumbrar que hay desarrollo de pensamiento variacional en ellos (MEN, 2006).

Los Estudiantes E1, E5, E10, E17 reflexionaron de manera dinámica respecto a la variación, por ejemplo cuando hacen referencia que se pueden construir infinitos cuadrados, círculos, hexágonos,..., dentro de la figura original, ya que la medida de sus áreas y longitudes siempre puede dividirse, esto implica que hay una forma particular de razonar y actuar ante una situación dinámica y variacional. De igual manera los estudiantes reflejan y presentan evidencias de desarrollo de pensamiento variacional MEN(2006) al analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye los valores en las secuencias o series de las figuras geométricas; e intentan formular procedimientos, algoritmos o fórmulas que permitan reproducir el mismo patrón. Todo esto cuando contestaban las interrogantes de los ítems del

uno al doce de la prueba final y trataban de calcular las áreas y los perímetros en las figuras de las seis sesiones de trabajo presentadas.

Atendiendo a las consideraciones teóricas propuestas por autores como Vasco (2002), Posada y Villa (2006), Caballero y Cantoral (2013), Mendoza (2016) quienes aluden que la intervención de elementos como la variación y el cambio son fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional y a las consideraciones teóricas de autores como Duval respecto a los registros de representación semiótica como medio para exteriorizar el desarrollo del pensamiento variacional. Se logró que los estudiantes identificaran variables y establecieran relaciones entre ellas, Identificaran en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de sucesiones o secuencias, desarrollaran la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula, plantearan modelos (Vasco, 2006) o expresiones algebraicas, y utilizaran distintos códigos variacionales, plantearan expresiones algebraicas con los modelos correspondientes a diversos problemas planteados en forma figural.

4.4 *Rúbricas de evaluación*

A continuación se presentan las rúbricas de evaluación construidas en base a cada objetivo de los ítems de cada uno de los instrumentos aplicados, tanto de la prueba diagnóstica, como de cada una de las sesiones de trabajo. Para la descripción de los resultados obtenidos se proponen cuatro categorías: Correcto, si la respuesta que proporciona el estudiante atiende a lo solicitado en la consigna; Parcialmente correcto, si el procedimiento realizado muestra ciertos elementos correctos a lo solicitado; Indicios a conceptos e ideas matemáticas, si el

estudiante presenta algunos argumentos e ideas vagas a conceptos en lo solicitado, e Incorrecto si la respuesta no atiende a lo que se le pidió; y No contestó, si el estudiante no presentó ningún desarrollo o evidencia a la consigna propuesta.

En la siguiente tabla se presenta las rúbricas de evaluación de la prueba diagnóstica

Tabla 4.1 Rúbrica de evaluación de la prueba diagnóstica

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
<i>Ítem</i>	El estudiante	El estudiante	El estudiante	El estudiante no	No
<i>#1</i>	presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra la suma de las series finitas de cuadrados y cubos de números enteros.	presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra la suma de las series finitas de cuadrados y cubos de números enteros.	presenta ideas vagas o indicios a conceptos de la suma de series finitas de los cuadrados y cubos de números enteros presentados.	encuentra correctamente la suma de las series finitas, ni presenta ningún argumento o procedimiento pertinente al ítem propuesto.	proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
<i>Ítem</i>	El estudiante	El estudiante	El estudiante	El estudiante no	El estudiante
<i>#2</i>	presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra la suma de los incisos de series infinitas.	presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra la suma de las series infinitas.	presenta ideas vagas o indicios a conceptos de la suma de series infinitas.	encuentra correctamente la suma de la serie infinita, ni presenta ningún argumento o procedimiento pertinente a los	no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

				ítems propuesto.	
Ítem #3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra suma infinita considerando las fracciones representadas en la figura del pastel.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente la suma infinita de las fracciones representadas en la figura del pastel.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos de la suma infinita considerando las fracciones representadas en la figura del pastel.	El estudiante no encuentra correctamente la suma infinita de las fracciones representadas en la figura del pastel, ni presenta ningún argumento o procedimiento pertinente a los ítems propuesto.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem #4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular la suma infinita considerando las área de las regiones sombreadas representadas en la figura de los cuadrados inscritos.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente la suma infinita del área de las regiones sombreadas representadas en la figura de los cuadrados inscritos.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos de la suma infinita considerando las área de las regiones sombreadas representadas en la figura de los cuadrados inscritos.	El estudiante no encuentra correctamente la suma infinita del área de las regiones sombreadas representadas en la figura de los cuadrados inscritos, ni presenta ningún argumento o procedimiento pertinente al	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

ítems propuesto.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.2 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 1

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas Matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contesto</i>
NIVEL 1					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante especifica todas las características correctas de la figura presentada.	El estudiante especifica algunas características correctas de la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al especificar características de la figura presentada.	El estudiante especifica características incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 3	El estudiante argumenta de manera correcta todas las magnitudes encontradas la figura presentada.	El estudiante argumenta algunas magnitudes correctas en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir magnitudes en la figura presentada.	El estudiante argumenta magnitudes incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
NIVEL 2					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

	observaciones sobre la figura presentada.	la figura presentada.	figura presentada.	observaciones sobre la figura presentada.	escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en la figura presentada.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en la figura presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos, o procedimientos pero no encuentra el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem # 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor del perímetro de la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor del perímetro de la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la segunda figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la segunda figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem #5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la segunda	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la segunda figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la segunda figura inscrita ni la compara	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

	figura inscrita y la compara respecto a la figura inicial.	segunda figura inscrita ni la compara respecto a la figura inicial.		respecto a la figura inicial.	
NIVEL 3					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en relación a la segunda figura inscrita.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada respecto a la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en la figura inscrita presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura inscrita presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos, y encuentra el valor correcto de la longitud del lado en la tercera figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el valor correcto de la longitud del lado en la tercera figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado en la tercera figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del lado en la tercera figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del

	valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	la tercera figura inscrita.	perímetro de la tercera figura inscrita.	ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la tercera figura inscrita y la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la tercera figura inscrita ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la tercera figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la tercera figura inscrita ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 4					
Ítem# 1	El estudiante argumenta de forma correcta por que la construcción de n figuras inscritas podría realizarse sobre la figura presentada.	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porque la construcción de n figuras inscritas podría realizarse sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar porque la construcción de n figuras inscritas podría realizarse sobre la figura presentada.	El estudiante argumenta de forma incorrecta porque la construcción de n figuras inscritas podría realizarse sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante calcula y compara de manera correcta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante calcula y compara de manera correcta algunas de las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrito	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra los valores correctos de los perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de los perímetros de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas respecto al valor del área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante elabora un listado correcto de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	El estudiante elabora un listado con algunas longitudes, perímetros y áreas correctas de las figuras construidas.	El estudiante presenta ideas vagas al elaborar un listado de longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	El estudiante elabora un listado incorrecto de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 6	El estudiante argumenta correctamente las relaciones encontradas entre las figuras	El estudiante argumenta algunas relaciones entre las figuras construidas, sus	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto a algunas	El estudiante argumenta incorrectamente las relaciones encontradas entre las figuras	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del

construidas, sus perímetros y áreas.	perímetros y áreas.	y relaciones entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas.	construidas, sus perímetros y áreas.	ítem propuesto.
--------------------------------------	---------------------	---	--------------------------------------	-----------------

Fuente: Elaboración propia

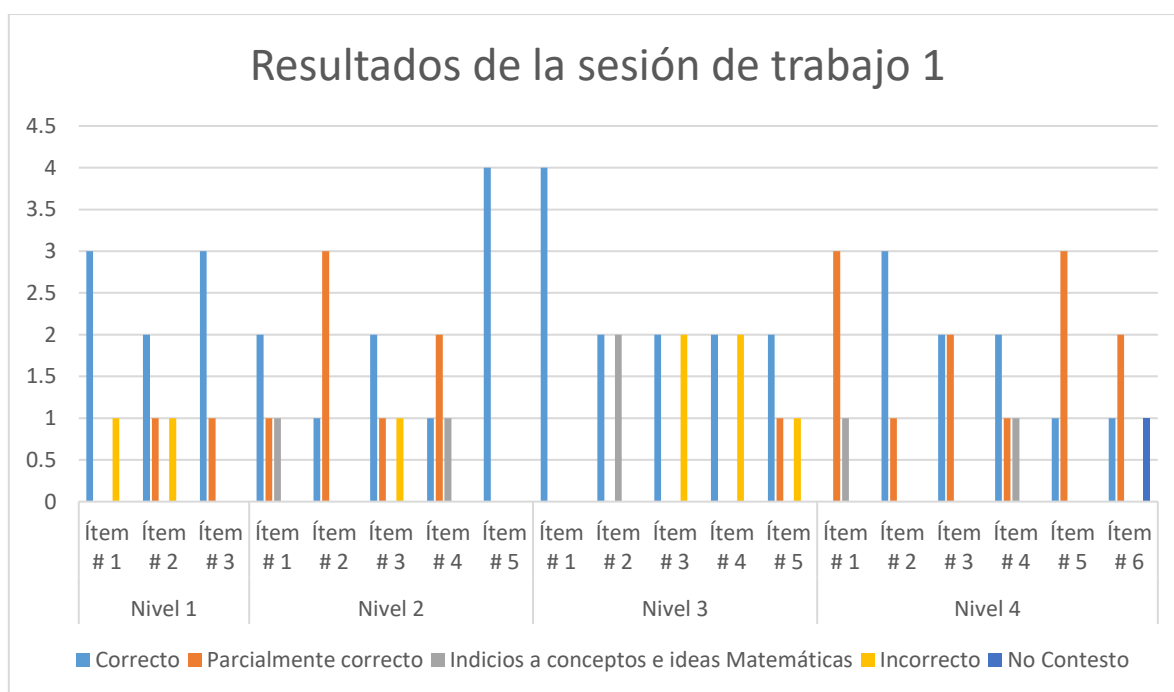
Tabla 4.3 Resultados de la sesión de trabajo # 1

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	3	0	0	1	0
Ítem # 2	2	1	0	1	0
Ítem # 3	3	1	0	0	0
Nivel 2					
Ítem # 1	2	1	1	0	0
Ítem # 2	1	3	0	0	0
Ítem # 3	2	1	0	1	0
Ítem # 4	1	2	1	0	0
Ítem # 5	4	0	0	0	0
Nivel 3					
Ítem # 1	4	0	0	0	0
Ítem # 2	2	0	2	0	0
Ítem # 3	2	0	0	2	0

Ítem # 4	2	0	0	2	0
Ítem # 5	2	1	0	1	0
Nivel 4					
Ítem # 1	0	3	1	0	0
Ítem # 2	3	1	0	0	0
Ítem # 3	2	2	0	0	0
Ítem # 4	2	1	1	0	0
Ítem # 5	1	3	0	0	0
Ítem # 6	1	2	0	0	1

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 5 Resultados de la sesión de trabajo # 1



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.4 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 2

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
NIVEL 1					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante especifica todas las características correctas de la figura presentada.	El estudiante especifica algunas características correctas de la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al especificar características de la figura presentada.	El estudiante especifica características incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 3	El estudiante argumenta de manera correcta todas las magnitudes encontradas la figura presentada.	El estudiante argumenta algunas magnitudes correctas en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir magnitudes en la figura presentada.	El estudiante argumenta magnitudes incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
NIVEL 2					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas de la figura presentada.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes de la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes de la figura concéntrica en la figura presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

	la figura concéntrica en relación a la primera.	la figura concéntrica en relación a la primera.	la figura concéntrica en relación a la primera.	la figura concéntrica en relación a la primera.	la figura concéntrica en relación a la primera.
Ítem # 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor del perímetro de la circunferencia.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor del perímetro de la circunferencia.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la circunferencia.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la circunferencia.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem #4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la segunda figura concéntrica. Y la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la segunda figura concéntrica ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la segunda figura concéntrica.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la segunda figura concéntrica. Ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 3					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en la relación a la	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en la figura concéntrica presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

	segunda figura concéntrica.	respecto a la segunda figura concéntrica.		concéntrica presentada.	
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor del perímetro de la tercera circunferencia concéntrica.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor del perímetro de la tercera circunferencia concéntrica.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la tercera circunferencia concéntrica.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la tercera circunferencia concéntrica.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la tercera circunferencia concéntrica y la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la tercera circunferencia concéntrica, ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la tercera circunferencia concéntrica.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la tercera circunferencia concéntrica, ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 4					
Ítem# 1	El estudiante argumenta de forma correcta porqué la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse.	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porque la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse.	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar el porqué la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse.	El estudiante argumenta de forma incorrecta el porqué la construcción de n circunferencias concéntricas podría realizarse.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

Ítem# 2	El estudiante calcula y compara de manera correcta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima circunferencias concéntricas.	El estudiante calcula y compara de manera correcta algunas de las longitudes de las enésima circunferencias concéntricas.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima circunferencias concéntricas.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima circunferencias concéntricas.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra los valores correctos de los perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de los perímetros de las enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de las enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante presenta ideas vagas respecto al valor del área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas circunferencias concéntricas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante elabora un listado correcto de las	El estudiante elabora un listado con algunas	El estudiante presenta ideas vagas al elaborar un listado de	El estudiante elabora un listado incorrecto de	El estudiante no proporcionó ninguna

	longitudes, perímetros y áreas de las circunferencias concéntricas construidas.	longitudes, perímetros y áreas correctas de las circunferencias concéntricas construidas.	longitudes, perímetros y áreas de las circunferencias concéntricas construidas.	las longitudes, perímetros y áreas de las circunferencias concéntricas construidas.	evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 6	El estudiante argumenta correctamente las relaciones encontradas entre las circunferencias concéntricas construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta algunas relaciones entre las circunferencias concéntricas construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto a algunas relaciones entre las circunferencias concéntricas construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta incorrectamente las relaciones encontradas entre las circunferencias concéntricas construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

Fuente: Elaboración propia.

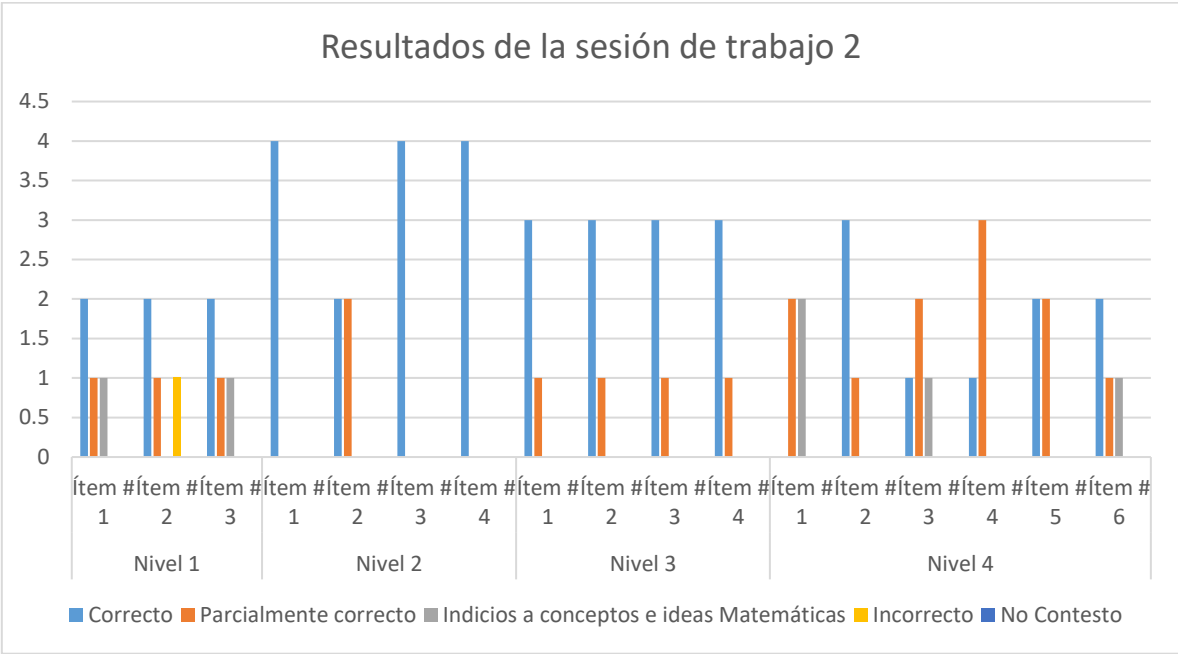
Tabla 4.5 Resultados de la sesión de trabajo # 2

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	2	1	1	0	0
Ítem # 2	2	1	0	1	0
Ítem # 3	2	1	1	0	0
Nivel 2					
Ítem # 1	4	0	0	0	0
Ítem # 2	2	2	0	0	0
Ítem # 3	4	0	0	0	0

Ítem # 4	4	0	0	0	0
Nivel 3					
Ítem # 1	3	1	0	0	0
Ítem # 2	3	1	0	0	0
Ítem # 3	3	1	0	0	0
Ítem # 4	3	1	0	0	0
Nivel 4					
Ítem # 1	0	2	2	0	0
Ítem # 2	3	1	0	0	0
Ítem # 3	1	2	1	0	0
Ítem # 4	1	3	0	0	0
Ítem # 5	2	2	0	0	0
Ítem # 6	2	1	1	0	0

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 6 Resultados de la sesión de trabajo # 2



Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.6 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo #3

	Correcto	Parcialmente correcto	Indicios a conceptos e ideas matemáticas	Incorrecto	No Contestó
NIVEL 1					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas de las semi-	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes de las semi-	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes de las semi-	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de las semi-	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

	circunferencias en relación a la primera.	circunferencias en relación a la primera.	circunferencias en relación a la primera.	circunferencias en relación a la primera	
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor de los diámetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el valor de los diámetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta ideas vagas, o indicios a conceptos respecto al valor de los diámetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de los diámetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta ideas vagas, o indicios a conceptos respecto al valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem #5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de las semi-circunferencias presentadas y la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de las semi-circunferencias presentadas ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no encuentra correctamente el área las semi-circunferencias presentadas ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

NIVEL 2

Ítem#1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre las semicircunferencias presentadas.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre las semi-circunferencias presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir las semi-circunferencias presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre las semi-circunferencias presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en las semi-circunferencias presentadas en relación a la segunda figura.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en las semi-circunferencias presentadas respecto a la segunda figura concéntrica.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra el valor correcto del diámetro de la tercera figura presentada.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto del diámetro de la tercera figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del diámetro de la tercera figura presentada.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del diámetro de la tercera figura presentada.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra el valor correcto de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de los perímetros de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

Ítem# 5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de las semi-circunferencias presentadas comparándolas respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de las semi-circunferencias presentadas comparándolas respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de las semi-circunferencias presentadas.	El estudiante no encuentra correctamente el área de las semi-circunferencias presentadas comparándolas respecto a la segunda figura.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
----------------	--	---	---	--	--

NIVEL 3

Ítem# 1	El estudiante argumenta de forma correcta por que la construcción de n semi-circunferencias podría realizarse.	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porque la construcción de n semi-circunferencias podría realizarse.	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar porque la construcción de n semi-circunferencias podría realizarse.	El estudiante argumenta de forma incorrecta porque la construcción de n semi-circunferencias podría realizarse.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante calcula y compara de manera correcta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima semi-circunferencias.	El estudiante calcula y compara de manera correcta algunas de las longitudes de la enésima semi-circunferencias.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima semi-circunferencias	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima semi-circunferencias.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra los	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia

	valores correctos de los perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias.	encuentra el valor correcto de los perímetros de la enésima semi-circunferencias.	del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias.	el valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias.	escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de las enésimas semi-circunferencias	El estudiante presenta ideas vagas respecto al valor del área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias	El estudiante no encuentra correctamente el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésimas semi-circunferencias.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante elabora un listado correcto de las longitudes, perímetros y áreas de la semi-circunferencias construidas.	El estudiante elabora un listado con algunas longitudes, perímetros y áreas correctas de la semi-circunferencias construidas.	El estudiante presenta ideas vagas al elaborar un listado de longitudes, perímetros y áreas de la semi-circunferencias construidas.	El estudiante elabora un listado incorrecto de las longitudes, perímetros y áreas de la semi-circunferencias construidas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 6	El estudiante argumenta correctamente las relaciones encontradas entre la semi-circunferencias construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta algunas relaciones entre la semi-circunferencias construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto a algunas relaciones entre la semi-circunferencias construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta incorrectamente las relaciones encontradas entre la semi-circunferencias construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

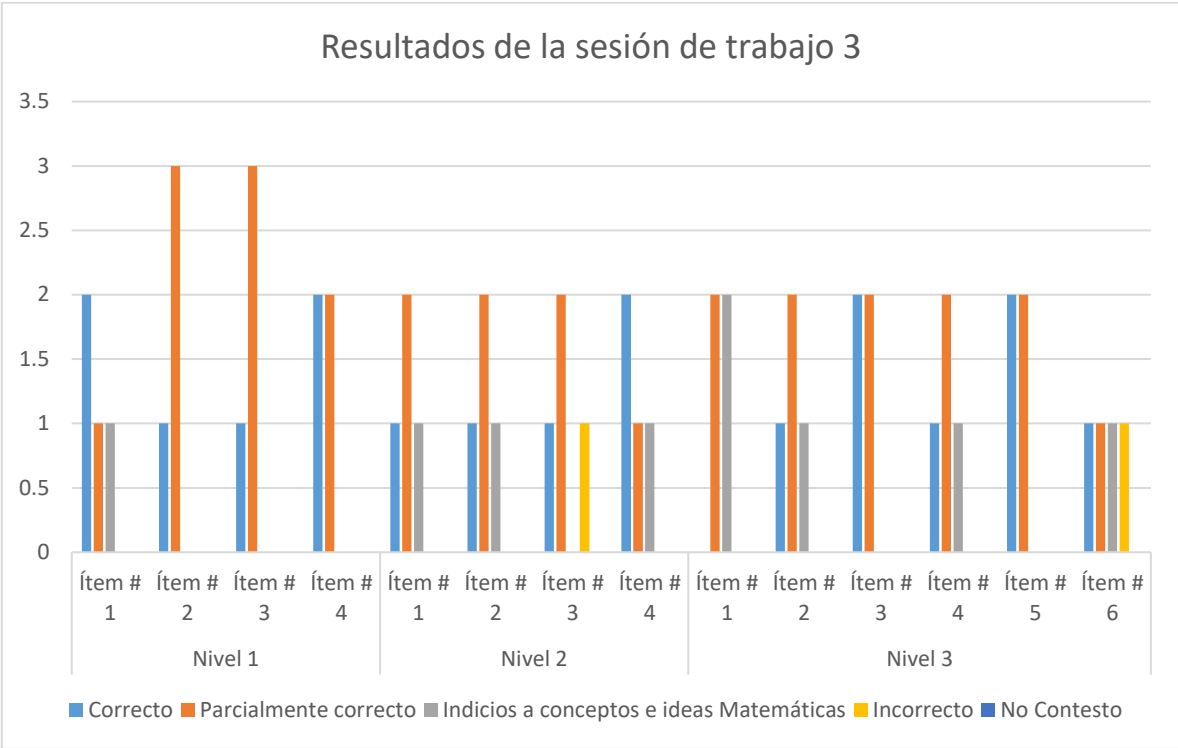
Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.7 Resultados de la sesión de trabajo # 3

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	2	1	1	0	0
Ítem # 2	1	3	0	0	0
Ítem # 3	1	3	0	0	0
Ítem # 4	2	2	0	0	0
Nivel 2					
Ítem # 1	1	2	1	0	0
Ítem # 2	1	2	1	0	0
Ítem # 3	1	2	0	1	0
Ítem # 4	2	1	1	0	0
Nivel 3					
Ítem # 1	0	2	2	0	0
Ítem # 2	1	2	1	0	0
Ítem # 3	2	2	0	0	0
Ítem # 4	1	2	1	0	0
Ítem # 5	2	2	0	0	0
Ítem # 6	1	1	1	1	0

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 7 Resultados de la sesión de trabajo # 3



Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.8 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 4

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
NIVEL 1					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante especifica todas las características correctas de la	El estudiante especifica algunas características correctas de la	El estudiante presenta ideas vagas al especificar características de	El estudiante especifica características incorrectas de la	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del

	figura presentada.	figura presentada.	la presentada.	figura presentada.	figura presentada.	ítem propuesto.
Ítem # 3	El estudiante argumenta de manera correcta todas las magnitudes encontradas la figura presentada.	El estudiante argumenta algunas magnitudes correctas en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir magnitudes en la figura presentada.	El estudiante argumenta magnitudes incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.	
NIVEL 2						
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.	
Ítem # 2	El estudiante establece y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en la figura presentada.	El estudiante establece y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al establecer y comparar las magnitudes en la figura presentada.	El estudiante establece y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.	
Ítem # 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del lado en la segunda figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.	
Ítem # 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos	El estudiante presenta argumentos o procedimientos,	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra	El estudiante no proporcionó ninguna	

	correctos y pero no respecto al valor correctamente evidencia encuentra el encuentra el del perímetro de el valor del escrita del valor del valor del perímetro de la segunda figura inscrita. segunda figura ítem perímetro de la segunda figura inscrita. propuesto.				
Ítem #5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la segunda figura inscrita y la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la segunda figura inscrita ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la segunda figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la segunda figura inscrita ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 3					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la tercera figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la tercera figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la tercera figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la tercera figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes de la figura presentada en relación a la segunda figura inscrita.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes de la figura presentada respecto a la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes de la figura inscrita presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura inscrita presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta	El estudiante presenta	El estudiante presenta ideas	El estudiante no presenta	El estudiante no

argumentos, procedimientos y encuentra el valor correcto de la longitud del lado de la tercera figura inscrita.	argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de la longitud del lado de la tercera figura inscrita.	vagas o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado de la tercera figura inscrita.	argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del lado de la tercera figura inscrita.	proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
---	---	---	---	---

Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la tercera figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
----------------	---	---	--	---	--

Ítem# 5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la tercera figura inscrita y la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de la tercera figura inscrita ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área de la tercera figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la tercera figura inscrita ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
----------------	---	---	---	--	--

NIVEL 4

Ítem# 1	El estudiante argumenta de forma correcta por que la construcción de n figuras inscritas podría realizarse en la	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porqué la construcción de n figuras	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar el porqué la construcción de n figuras inscritas podría	El estudiante argumenta de forma incorrecta el porqué la construcción de n figuras inscritas podría	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
----------------	--	---	--	---	--

	figura presentada.	inscritas podría realizarse en la figura presentada.	realizarse en la figura presentada.	realizarse en la figura presentada.	
Ítem# 2	El estudiante calcula y compara de manera correcta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante calcula y compara de manera correcta algunas de las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra los valores correctos de los perímetros de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de los perímetros de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de las enésimas figuras inscritas.	El estudiante presenta ideas vagas respecto al cálculo del valor del área en la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no encuentra correctamente el área de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante elabora un listado correcto de las	El estudiante elabora un listado con algunas	El estudiante presenta ideas vagas al elaborar un listado de	El estudiante elabora un listado incorrecto de	El estudiante no proporcionó ninguna

	longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	longitudes, perímetros y áreas correctas de las figuras construidas.	longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.	evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 6	El estudiante argumenta correctamente las relaciones encontradas entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta algunas relaciones correctamente entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto a algunas relaciones entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta incorrectamente las relaciones encontradas entre las figuras construidas, sus perímetros y áreas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.

Fuente: Elaboración propia

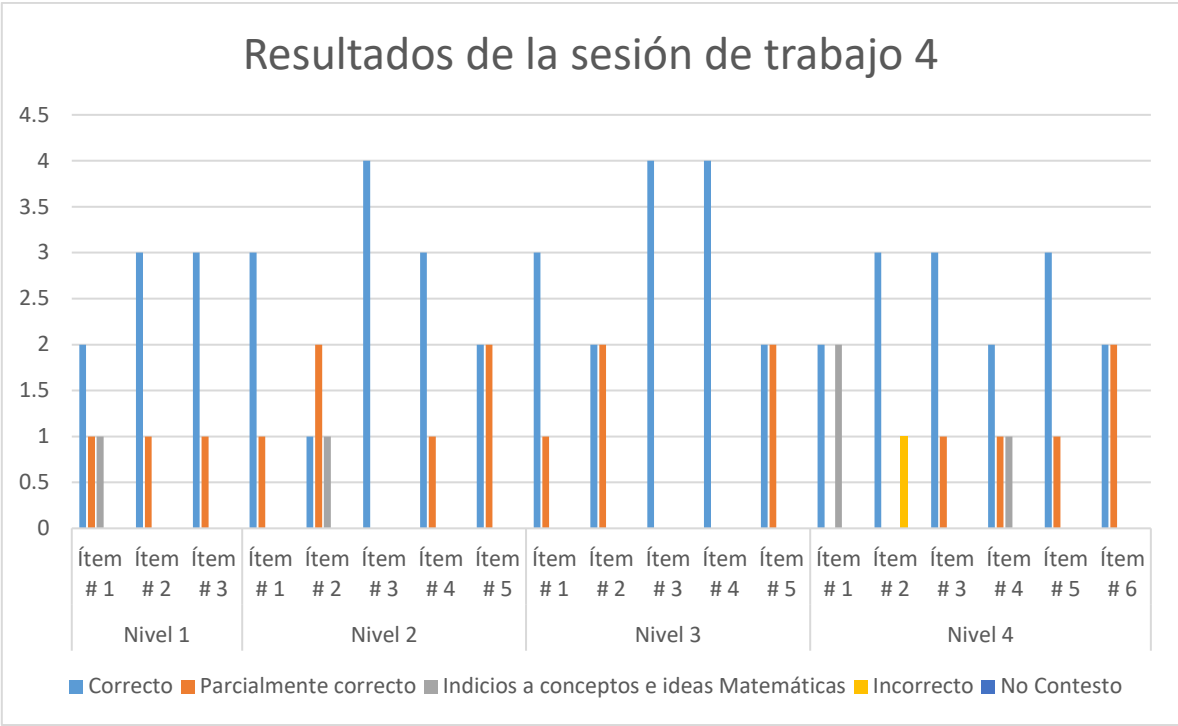
Tabla 4.9 Resultados de la sesión de trabajo # 4

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	2	1	1	0	0
Ítem # 2	3	1	0	0	0
Ítem # 3	3	1	0	0	0
Nivel 2					
Ítem # 1	3	1	0	0	0
Ítem # 2	1	2	1	0	0
Ítem # 3	4	0	0	0	0
Ítem # 4	3	1	0	0	0

Ítem # 5	2	2	0	0	0
Nivel 3					
Ítem # 1	3	1	0	0	0
Ítem # 2	2	2	0	0	0
Ítem # 3	4	0	0	0	0
Ítem # 4	4	0	0	0	0
Ítem # 5	2	2	0	0	0
Nivel 4					
Ítem # 1	2	0	2	0	0
Ítem # 2	3	0	0	1	0
Ítem # 3	3	1	0	0	0
Ítem # 4	2	1	1	0	0
Ítem # 5	3	1	0	0	0
Ítem # 6	2	2	0	0	0

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 8 Resultados de la sesión de trabajo # 4



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.10 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 5

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
NIVEL 1					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante especifica todas las características correctas de la figura presentada.	El estudiante especifica algunas características correctas de la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al especificar características de la figura presentada	El estudiante especifica características incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

Ítem # 3	El estudiante argumenta de manera correcta todas las magnitudes encontradas la figura presentada.	El estudiante argumenta algunas magnitudes correctas en la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir magnitudes en la figura presentada.	El estudiante argumenta magnitudes incorrectas de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
NIVEL 2					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas de la figura inscrita en relación a la primera.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes de la figura inscrita en relación a la primera.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes de la figura inscrita en relación a la primera	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura inscrita en relación a la primera	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor de la longitud del lado de la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el valor de la longitud lado de la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas, o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado de la segunda figura inscrita.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del r lado de la segunda figura inscrita.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem # 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el	El estudiante presenta ideas vagas, o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro del	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del

	valor del perímetro del hexágono inscrito.	valor del perímetro del hexágono inscrito.	hexágono inscrito.	perímetro del hexágono inscrito.	ítem propuesto.
Ítem #5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área del hexágono inscrito y la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área del hexágono inscrito ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área del hexágono inscrito.	El estudiante no encuentra correctamente el área del hexágono inscrito ni la compara respecto a la figura inicial.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 3					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en la relación a la segunda figura inscrita.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada respecto a la segunda figura inscrita.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en la figura inscrita presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura inscrita presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra el valor correcto de la longitud del	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor de la longitud del lado del segundo	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la longitud del	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del

	lado del segundo hexágono inscrito.	la longitud del lado del segundo hexágono inscrito.	hexágono inscrito.	lado segundo hexágono inscrito.	ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el valor del perímetro del segundo hexágono inscrito.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos pero no encuentra el valor del perímetro del segundo hexágono inscrito.	El estudiante presenta ideas vagas, o indicios a conceptos respecto al valor del perímetro del segundo hexágono inscrito.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro del segundo hexágono inscrito.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área del segundo hexágono inscrito y la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área del segundo hexágono inscrito, ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor del área del segundo hexágono inscrito.	El estudiante no encuentra correctamente el área del segundo hexágono inscrito, ni la compara respecto a la segunda figura.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
NIVEL 4					
Ítem# 1	El estudiante argumenta de forma correcta por que la construcción de n hexágonos inscritos podría realizarse.	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porque la construcción de n hexágonos inscritos podría realizarse.	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar el porque la construcción de n hexágonos inscritos podría realizarse.	El estudiante argumenta de forma incorrecta el porque la construcción de n hexágonos inscritos podría realizarse.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

Ítem# 2	El estudiante calcula y compara de manera correcta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima hexágonos inscritos.	El estudiante calcula y compara de manera correcta algunas de las longitudes de las enésima hexágonos inscritos.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima hexágonos inscritos.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las longitudes de la primera, segunda, tercera, cuarta y enésima hexágonos inscritos.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante presenta argumentos, procedimientos y encuentra los valores correctos de los perímetro del primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el valor correcto de los perímetros de los enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al cálculo del valor del perímetro en el primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor del perímetro del primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y es capaz de calcular el área del primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra correctamente el área de los enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante presenta ideas vagas respecto al cálculo del valor del área en el primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante no presenta argumentos, procedimientos ni encuentra correctamente el área del primero, segundo, tercero, cuarto y enésimos hexágonos inscritos.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem propuesto.
Ítem# 5	El estudiante elabora un listado correcto de las longitudes,	El estudiante elabora un listado con algunas longitudes,	El estudiante presenta ideas vagas al elaborar un listado de longitudes,	El estudiante elabora un listado incorrecto de las longitudes,	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia

	perímetros y áreas de los hexágonos inscritos construidos.	perímetros y áreas correctas de los hexágonos inscritos construidos.	perímetros y áreas de los hexágonos inscritos construidos.	perímetros y áreas de los hexágonos inscritos construidos.	escrita del ítem del propuesto.
Ítem# 6	El estudiante argumenta correctamente las relaciones encontradas entre los hexágonos inscritos construidos, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta algunas relaciones entre los hexágonos inscritos construidos, sus perímetros y áreas.	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto a algunas relaciones entre de los hexágonos inscritos construidos, sus perímetros y áreas.	El estudiante argumenta incorrectamente las relaciones encontradas entre los hexágonos inscritos construidos, sus perímetros y áreas.	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del ítem del propuesto.

Fuente: Elaboración propia

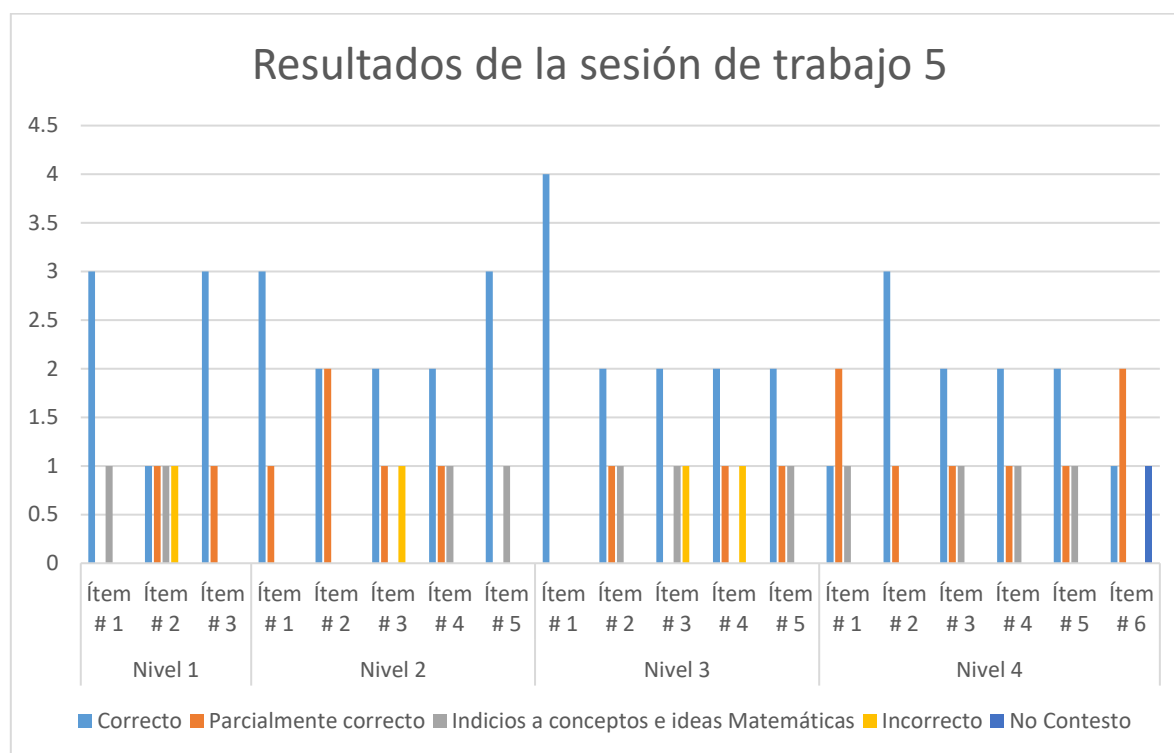
Tabla 4.11 Resultados de la sesión de trabajo # 5

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	3	0	1	0	0
Ítem # 2	1	1	1	1	0
Ítem # 3	3	1	0	0	0
Nivel 2					
Ítem # 1	3	1	0	0	0
Ítem # 2	2	2	0	0	0
Ítem # 3	2	1	0	1	0

Ítem # 4	2	1	1	0	0
Ítem # 5	3	0	1	0	0
Nivel 3					
Ítem # 1	4	0	0	0	0
Ítem # 2	2	1	1	0	0
Ítem # 3	2	0	1	1	0
Ítem # 4	2	1	0	1	0
Ítem # 5	2	1	1	0	0
Nivel 4					
Ítem # 1	1	2	1	0	0
Ítem # 2	3	1	0	0	0
Ítem # 3	2	1	1	0	0
Ítem # 4	2	1	1	0	0
Ítem # 5	2	1	1	0	0
Ítem # 6	1	2	0	0	1

Fuente: Elaboración propia

Gráfica 9 Resultados de la sesión de trabajo # 5



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.12 Rúbrica de evaluación de la sesión de trabajo # 6

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
NIVEL 1					
Ítem # 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem # 2	El estudiante presenta argumentos, procedimientos correctos y encuentra el	El estudiante presenta argumentos o procedimientos, pero no encuentra el	El estudiante presenta ideas vagas o indicios a conceptos respecto al valor	El estudiante no presenta argumentos ni encuentra correctamente el valor de la	El estudiante no proporcionó ninguna evidencia escrita del

	valor de la longitud de la espiral.	valor de la longitud de la espiral.	de la longitud de la espiral.	longitud de la espiral.	ítem propuesto.
NIVEL 2					
Ítem# 1	El estudiante describe de forma correcta todas las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante describe algunas observaciones correctas sobre la figura presentada.	El estudiante presenta ideas vagas al describir la figura presentada.	El estudiante describe de forma incorrecta las observaciones sobre la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 2	El estudiante precisa y compara de manera correcta todas las magnitudes encontradas en la figura presentada en relación a la segunda figura.	El estudiante precisa y compara de manera correcta algunas magnitudes en la figura presentada respecto a la segunda figura.	El estudiante presenta ideas vagas al precisar y comparar las magnitudes en la figura presentada.	El estudiante precisa y compara de manera incorrecta las magnitudes de la figura presentada.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 3	El estudiante argumenta de forma correcta por que la construcción de cada una de las espirales podría realizarse de manera indefinida.	El estudiante argumenta algunas observaciones correctas sobre porque la construcción de cada una de las espirales podría realizarse de manera indefinida.	El estudiante presenta ideas vagas al argumentar porque la construcción de cada una de las espirales podría realizarse de manera indefinida.	El estudiante argumenta de forma incorrecta porque la construcción de cada una de las espirales podría realizarse de manera indefinida.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.
Ítem# 4	El estudiante calcula y justifica de manera correcta las longitudes de cada una de las espirales.	El estudiante calcula y justifica de manera correcta algunas de las longitudes de cada una de las espirales.	El estudiante presenta ideas vagas al calcular y justificar las longitudes de cada una de las espirales.	El estudiante calcula y justifica de manera incorrecta las longitudes de cada una de las espirales.	El estudiante no proporcionó evidencias escritas del ítem propuesto.

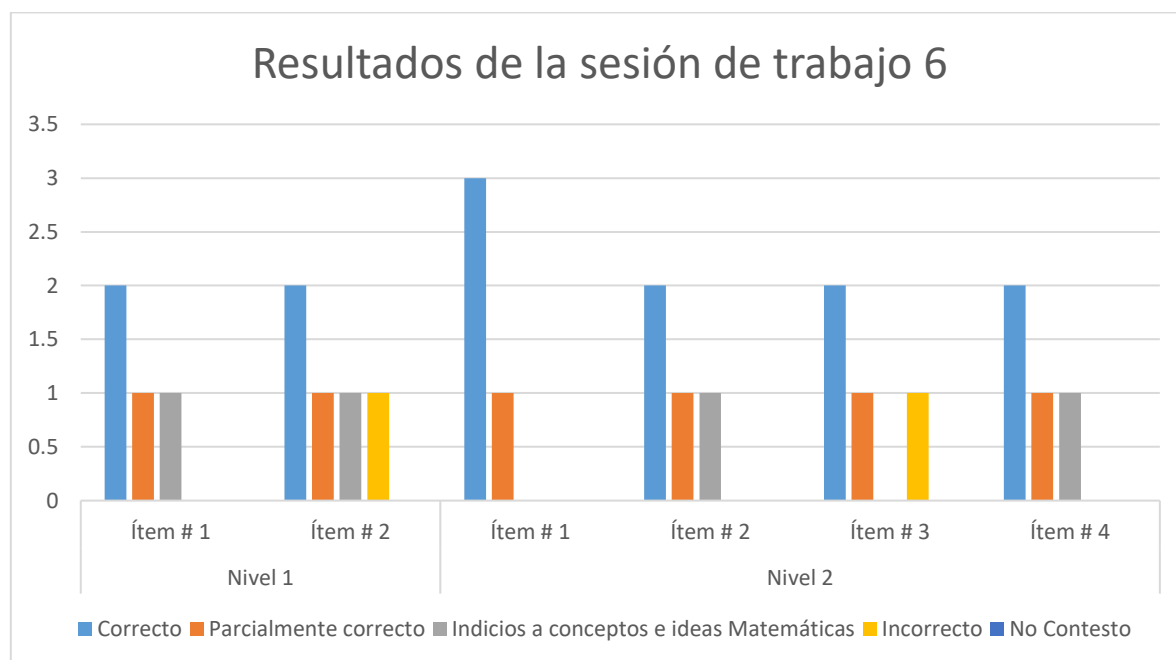
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.13 Resultados de la sesión de trabajo # 6

	<i>Correcto</i>	<i>Parcialmente correcto</i>	<i>Indicios a conceptos e ideas matemáticas</i>	<i>Incorrecto</i>	<i>No Contestó</i>
Nivel 1					
Ítem # 1	2	1	1	0	0
Ítem # 2	2	1	1	1	0
Nivel 2					
Ítem # 1	3	1	0	0	0
Ítem # 2	2	1	1	0	0
Ítem # 3	2	1	0	1	0
Ítem # 4	2	1	1	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 10 Resultados de la sesión de trabajo # 6



Fuente: Elaboración propia

5 Conclusiones y recomendaciones

En este último capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones de los resultados que se han obtenido con el progreso de cada uno de los capítulos que conforman esta investigación. Estos resultados son producto de las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 1, y de los objetivos específicos propuestos para la consecución de las respuestas a estas preguntas.

5.1 Conclusiones

Con respecto al primer objetivo de la investigación; explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes referentes a sumas finitas e infinitas vinculadas con el concepto de series geométricas y respondiendo a la primera pregunta de investigación, no son evidenciados a gran escala en la prueba diagnóstica. Esto implica que los estudiantes no poseen algunos conceptos básicos necesarios para la noción y comprensión de la serie geométrica. Lo anterior evidencia que en la etapa diagnóstica de acuerdo a los conocimientos previos que los estudiantes, estos no destacan el uso de elementos e indicadores de pensamiento variacional como por ejemplo: identificación de patrones (Vasco, 2006), articulación de procesos geométricos (MEN, 1998), así como de la existencia de covariaciones en sus argumentos (Mendoza, 2016), así como saber identificar en el objeto matemático lo que varía, cuánto varía y como varía al momento de trabajar o resolver situaciones problema (Vasco, 2002) .

De igual manera se evidencian dificultades en la resolución de cada una de los problemas propuestos de serie geométrica, como por ejemplo en su mayoría los estudiantes no llegaron a terminar todos los ejercicios completos del primer inciso, y además presentaron ideas vagas

correspondientes a la suma de series finitas. Asimismo, en las dificultades encontradas se detectó que no logran calcular correctamente series de sumas infinitas sobre todo de cubos. Es así que la mayoría de estudiantes no alcanzaron los objetivos completamente según lo establecido en las rúbricas y se percibieron errores de tipo matemático y falta de comprensión al resolver dichas sumas de series geométricas, así como la debilidad en los conocimientos previos de cursos como pre cálculo que los estudiantes deberían de poseer.

Estos indicadores señalados, denotan que los estudiantes mostraron dificultades para responder las consignas respecto a dichos cálculos, ya que ningún estudiante de los diecisiete pudo resolver los tres incisos correctamente. Al respecto, los estudiantes en su mayoría, tienen concepciones confusas asociadas a las estrategias para poder calcular sumas infinitas a pesar de realizar algunos cálculos aritméticos coherentes. Por tanto, las respuestas permiten conjeturar que los estudiantes no han desarrollado elementos, indicadores de desarrollo del pensamiento matemático variacional (Posada et al., 2006) en relación a argumentar sus procedimientos y a obtener cálculos numéricos correctos, sin dar una explicación de los mismos, lo que significa que no han desarrollado completamente un pensamiento matemático.

Con respecto al segundo objetivo del estudio; sobre el diseño e implementación de las sesiones de trabajo y respondiendo a la segunda pregunta de investigación, se articularon situaciones con el objetivo que estas fuesen accedibles y significativas a los estudiantes. En este sentido, se diseñaron sesiones de trabajo en las que se evidenció que las actividades les brindó una forma diferente para abordar una introducción a la temática de serie geométrica. Estas sesiones perseguían que a través del análisis de fenómenos que implican el cambio y variación, desarrollar el pensamiento variacional con sus niveles y elementos, así como la

articulación de sus diversos registros de representación semiótica con el uso de este pensamiento y lograr la construcción del concepto de serie geométrica.

De igual manera llevaban implícitas situaciones y fenómenos de cambio y variación, donde se adecuó un cimiento para estimular el desarrollo del pensamiento variacional donde los estudiantes lograron llevar a cabo tareas de conversión, como transitar el concepto de serie geométrica en diversos registros de representación, así como de tratamientos y transitar el objeto serie geométrica en un mismo registro. De lo anterior Duval y Sáenz (2016:91) afirman que “cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación”.

Es así que con la implementación de estas sesiones de trabajo se pretendió que los estudiantes identifiquen de manera adecuada el concepto de serie geométrica, identifiquen variables y constantes en el objeto matemático, así como lo que varía un objeto, cuánto varía, cuánto simplifica y que el estudiante haga uso adecuado de distintos registros de representación, de conversiones y de tratamiento con apoyo del software Geogebra. También que puedan identificar adecuadamente el patrón en que el área, perímetro, longitud cambia en cada figura y sumar las áreas, perímetros y longitudes de las infinitas figuras construidas.

Al mismo tiempo que ellos visualizan de manera adecuada la descomposición de figuras geométricas en otras menores, en el proceso de solución de la propuesta planteada haciendo uso de Geogebra (Ruiz et al., 2013), y hacen uso del software de forma adecuada para la construcción de diferentes tipos de figuras geométricas.

En conclusion, los problemas propuestos presentan diferentes tipos de estrategias, ideas, formas de razonar y establecen correlaciones entre diferentes magnitudes lo que nos permite una perspectiva de que los conceptos de variación y el cambio se desarrollen y puedan ser parte de los esquemas cognitivos de los estudiantes, articulándose y desarrollándose de manera adecuada. Es así que las diferentes sesiones de trabajo aplicadas fueron analizadas desde el primer nivel de análisis del Enfoque Ontosemiótico, específicamente considerando el lenguaje, definiciones, afirmaciones, procedimientos, argumentaciones, concepciones. Todos estos elementos analizados desde lo previo y lo desarrollado eventualmente (Mendoza, 2016).

El tercer objetivo de investigación, se refiere a los elementos que reflejan los estudiantes en sus producciones que permitan reflexionar respecto a la presencia o no del pensamiento variacional al resolver las situaciones planteadas en las sesiones de trabajo que involucra series geométricas con apoyo de Geogebra. Es así que respondiendo a la tercera pregunta de investigación se tomó como referencia la perspectiva que brinda el análisis de las producciones estudiantiles con el EOS, que en su primer nivel de análisis se asocia a los objetos y fases primarias de los trabajos de los estudiantes, así como de sus afirmaciones, argumentos, concepciones y procedimientos. La revisión de la bibliografía, acorde al pensamiento variacional, ayudó a la construcción de la perspectiva teórica de dicho pensamiento al cual hacemos referencia en esta investigación.

Si nos basamos en las representaciones utilizadas por los estudiantes, en cuanto a las conversiones más frecuentes que se encontraron en los cuatro grupos de estudiantes entre los diversos sistemas de representación en la solución de las sesiones de trabajo y prueba final que involucran series geométricas están:

- La conversión de un registro aritmético a un registro algebraico.
- La conversión de un registro verbal a un registro aritmético.
- La conversión de un registro de representación pictórico a un registro aritmético.
- La conversión de un registro de representación pictórico a un registro algebraico.

Asimismo en los trabajos hechos por los estudiantes en las sesiones de trabajo se ha evidenciado indicios de desarrollo de pensamiento variacional reflejados mediante alguna representaciones. Por ejemplo, tres grupos en ocasiones para dar ciertos argumentos hicieron comentarios expresados mediante registro de lenguaje natural o verbal.

Atendiendo a estas consideraciones, entre los elementos que los estudiantes evidenciaron está el uso de algunas estrategias para la resolución ante la situación propuesta donde la articulación entre registros como el aritmético con el verbal y el geométrico con el analítico algebraico fueron los que más favorecieron a dar respuesta a la situaciones problema. Ejemplo de lo anterior fue cuando evidenciaron la descomposicion de las figuras de las sesiones en otras menores y en la situacion de reunir todas las áreas de las n figuras que lograron construir con apoyo de Geogebra donde utilizaron la serie geométrica para calcular los valores, así como de igual manera diferenciaron procesos finitos de infinitos donde concluían que los procesos y cálculos se pueden realizar con argumentos finalizando estos en algún momento.

En algunas sesiones desarrolladas los grupos obtuvieron respuestas análogas a pesar de las diferentes estrategias efectuadas. Las diferentes estrategias a las que recurrieron sobresalen estrategias de argumento, estrategias aritméticas y estrategias visuales articuladas con tratamientos algebraicos.

Volviendo a las conclusiones en cuanto al análisis de los objetos y fases primarias del EOS sobre las producciones de los estudiantes en las sesiones de trabajo tenemos que: En lo referente a lenguaje fue destacado en cierta medida el uso de recursos lingüísticos asociados a conceptos matemáticos que utilizaron en las sesiones de trabajo.

De acuerdo con estos recursos lingüísticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, entre otros) que se incluyen y surgieron de las sesiones de trabajo, están por ejemplo: sucesión, cuadrados, polígono regular, longitud, medida, construcción, lado, series, puntos medios, áreas, figura inscrita, perímetro, cuadrado interno, fractal, pequeño, reduciendo, patrón, infinito, triángulos reducidos, teorema, insertando (dentro de otra figura), diagonal, figura geométrica, patrones, construcción (de n figuras inscritas), mitad, secuencia (de patrones mediante una fórmula), medida, datos, fórmula, profundidad, externo, decreciendo, esto evidencia que los estudiantes tienen las ideas básicas, lo que les permite desarrollar la situación con los conocimientos adquiridos, y reafirma que hay procesos al interior de los conocimientos que manejan los estudiantes.

Las formas de argumentación de sus afirmaciones son visuales y muestran dominios conceptuales a conceptos matemáticos (códigos variacionales) (Caballero y Cantoral, 2013), los cuales están en un nivel básico según los niveles de desempeño en relación al desarrollo del pensamiento variacional (Báez et al., 2017:97) que es la expresión del nivel primario. Sin embargo las aseveraciones y afirmaciones que presentan evidencian que se requiere potenciar aún más dichos aspectos de los conceptos matemáticos desde otra mirada más dinámica y menos estática.

Referente a los procedimientos de los estudiantes, en su mayoría estos coincidieron en: determinar en los objetos matematicos lo que cambia y varia, lo que permanece constante, identificar patrones de regularidad de los procesos (Vasco, 2006), recurrir a distintas representaciones del concepto de serie geométrica al identificarla en un registro algebraico desde un registro verbal o geométrico y en un registro geométrico desde un registro algebraico (Duval, 2004a), plantear modelos o expresiones algebraicas, plantear expresiones algebraicas como los modelos correspondes a diversos problemas planteados en forma verbal o figural, construir figuras inscritas como mediador para construir series geométricas, plantear expresiones algebraicas a partir de figuras y dimensiones.

Asi mismo a través de realizar cálculos, los estudiantes recurrieron a uso de la seriación como una de las estrategias variacionales propuestas por (Caballero y Cantoral, 2013) quien señala que la seriación como estrategia variacional, puede ser usada para encontrar patrones, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras. De acuerdo a los procedimientos anteriores, los estudiantes trataron de dar respuesta a la situaciones problema en las sesiones de trabajo apoyados con el software Geogebra enfocándose en elementos del pensamiento variacional, como lo que cambia y cuánto cambia, donde principalmente utilizaron la serie geométrica para calcular valores correspondientes a cada figura.

En cuanto a los argumentos de la investigación, el software Geogebra fue de ayuda a los estudiantes para poder visualizar los comportamientos de las figuras, así como su cambio y cuánto cambian, los resultado de sus mediciones y con esto construir argumentos para realizar sus discusiones y llegar a consensos en cada uno de los grupos de trabajo conformados. Por ejemplo en sus argumentos evidenciaron habilidades cognitivas, tales como visualizar, representar, conjeturar, refutar y sintetizar las cuales pusieron en escena en

los distintos argumentos que fueron plasmados por algún tipo de representación ostensible (Cabezas y Mendoza, 2016).

Algunos estudiantes brindan sus argumentos basados solamente en aspectos visuales y de intuición, aunque, en sus escritos también evidencian argumentos con características que evidencian un pensamiento variacional, por ejemplo: en la sesión de trabajo #5, donde argumentan que si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser muy pequeña ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior y siempre existirá la mitad de un número..., de igual manera cada vez el lado de los hexágonos inscritos se reducirá a la mitad. Ellos utilizan argumentos algebraicos para justificar la construcción de una sucesión de medidas relacionadas a los elementos de los hexágonos. Así mismo argumentan que es posible construir sin fin los hexágonos con el hecho de que las medidas en base a números siempre pueden dividirse.

En cuanto a las concepciones, estas se evidenciaron en tres (G1, G2, Y G4) de los cuatro grupos, donde los estudiantes en su mayoría hablan de aumento y disminución en base a objetos matemáticos (expresados en distintos términos) para describir lo que ocurre en el proceso de construcción de figuras y elementos asociados a éstos. De igual manera descubren como elementos de variación, las medidas asociadas a las áreas, perímetros, radios, etc., evidenciando tener una idea clara de estos conceptos. Los estudiantes también realizan procesos de visualización (Arcavi, 2003) pues atribuyen propiedades a los objetos y figuras geométricas en sus distintas representaciones, e hicieron el proceso de descomponer las figuras de las sesiones de trabajo en otras pequeñas y también al momento de calcular todas las áreas de las n figuras donde hacen uso de la serie geométrica.

En general los estudiantes del G1,G4 hicieron cálculos e hicieron descomposición de figuras y encontraron patrones (Vasco, 2006) de construcción. Se abocaron a realizar cálculos en representaciones de tipo algebraico y aritmetico que intentaron modelar en los problemas planteados en representacion geometrica haciendo uso de Geogebra, además de representar argumentos escritos de conceptos matematicos como un medio de apoyo y sustento a los procedimientos utilizados. En este sentido Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) sugieren que el uso de más de un registro para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones. Es asi que el hecho de presentar un concepto de formas diversas hace que a este se le conozca en más facetas de las que normalmente se le considera cuando se hace el aprendizaje con un solo lenguaje.

El recurso de Geogebra, como una herramienta de apoyo fue de gran utilidad, puesto que se percibió que los estudiantes progresaron en aspectos cognitivos principalmente en uso de la visualización (Villa y Ruiz, 2010), para poder resolver problemas, entre otros aspectos. Asi mismo se vislumbro que los estudiantes progresaron al evidenciar sus concepciones en aspectos de la cognición, ya que, por ejemplo al momento de descomponer las figuras para hacer uso de estas concepciones y poder argumentar, se encontraron estrategias para resolver situaciones planteadas, así como diferentes tipos de representaciones articulando entre registros principalmente el geométrico con el analítico algebraico, entre otros aspectos.

En concordancia con (Arcavi, 2003), la visualización es un requisito indispensable para desarrollar pensamiento variacional puesto que es el canal receptor de lo visual y de otros sentidos para la posterior comprensión de los procesos cognitivos que involucra una situación didáctica. Es asi que para la contruccion de objetos matematicos y desarrollo de aspectos

cognitivos, la visualización y el desarrollo de pensamiento variacional deben ser apoyadas con el uso de softwares dinámicos (García y Benitez, 2015).

Por tanto, en las sesiones de trabajo, en su mayoría evidenciaron la fortaleza en algunas fases primarias del pensamiento variacional como el lenguaje, las afirmaciones, los procedimientos, y los otros que se deben fortalecer como son los argumentos, y concepciones, ya que varios estudiantes no logran hacer la articulación entre variables involucradas y resolver en su totalidad algunos problemas en las situaciones propuestas. No obstante se han encontrado en las producciones estudiantiles elementos vislumbrantes de desarrollo de estructuras de pensamiento variacional como identificar, analizar e interpretar, diferentes situaciones relacionadas con el cambio y la variación (Cabezas y Mendoza, 2016).

De igual manera evidencian los procesos matemáticos (MEN, 2006) en las sesiones de trabajo cuando los estudiantes, razonan, modelan (representan), construyen, comparan y ejercitan procedimientos de resolución. Es así que el engranaje de estos procesos (engranaje entendido como el mecanismo para transmitir potencia y dinamismo de un proceso a otro y desarrollar la actividad matemática propia del pensamiento variacional, se caracterizan como habilidades inherentes al pensamiento variacional.

Sin embargo, a medida avanzaban en las sesiones de trabajo hasta llegar a la prueba final, se observó avances respecto a evidencias de pensamiento variacional en relación a los primeros instrumentos que se aplicaron al inicio del estudio. Cabe destacar que el trabajo en los diferentes grupos ha sido importante y elemental en cuanto a las estrategias de resolución en los diferentes trabajos, la inventiva, y capacidad de solución, los cuales son de gran aporte y

ayuda para el estudiante ya que reafirman y desarrollan nuevas competencias y robustecen el pensamiento variacional.

El cuarto objetivo de investigación se refiere a categorizar los rasgos distintivos de las producciones estudiantiles en la construcción de serie geométrica con apoyo del software Geogebra, asociados a un pensamiento variacional, analizados desde diferentes categorías para comprender de manera metódica el desarrollo de estas tareas. Por consiguiente de lo anterior y respondiendo a la cuarta pregunta de investigación se evidencia que los rasgos distintivos (Ver **a, b c. d, e, f**) de las producciones estudiantiles a lo largo de su fase de implementación de las sesiones de trabajo y prueba final y discutidas en las fases del análisis del EOS, denotan características muy cercanas y que refuerzan el pensamiento variacional (Mendoza 2016). Estos rasgos distintivos se evidencian en la siguientes categorías:

a) Identificación de elementos de pensamiento variacional como:

- **Identificación adecuada de variables, constantes y establecen relaciones entre ellas.**
- **Identificación de covariación.**
- **Identificación de reconocimiento de patrones.**

b) Identificación de los rasgos de la operatoria de sumas infinitas.

c) Comprensión adecuada de registros de representación

d) Tránsito adecuado entre los registros de representación.

e) Operación adecuada de tratamiento interno en un mismo registro de representación.

f) La visualización producto del dinamismo del software Geogebra que se reportó en las sesiones de trabajo del uno al seis y en la prueba final donde se hicieron construcciones sincrónicas.

Sobre las bases de lo antes expuesto y con los trabajos matemáticos implementadas en el estudio de la series geométrica a través del análisis de situaciones en las sesiones de trabajo de cambio y variación, se adecuó un soporte para estimular el desarrollo del pensamiento variacional. Según García y Benítez (2013) se conserva una articulación entre el razonamiento y esquemas mentales que los alumnos realizan al resolver las tareas que se les proponen y la forma en que esta se les presenta.

Se logró de acuerdo al análisis de las sesiones de trabajo y prueba final un nivel de desempeño de los estudiantes logrado mediante el desarrollo del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación, donde se tomó como referencia los tres niveles propuestos por Báez et al., (2017:97) (ver figura 5). Lo anterior, permitió reconocer e identificar que los estudiantes en su mayoría alcanzaron el nivel dos de Relación (ver figura 5); el cual es el nivel intermedio en el desarrollo del pensamiento variacional (Báez et al., 2017), ya que los estudiantes lograron en sus producciones establecer relaciones entre los diferentes elementos que distinguen la variación (Caballero y Cantoral, 2013:6), manipular relaciones, procesos algebraicos y geométricos, relacionar propiedades y reglas siguiendo argumentos deductivos informales, reflexionar matemáticamente y usar el lenguaje matemático (códigos variacionales) para argumentar la solución de problemas sin llegar a formalizar la definición de serie geométrica.

De igual manera los estudiantes pudieron identificar variables y constantes, plantear expresiones algebraicas y modelos correspondientes a diversas situaciones planteadas (Vasco, 2006). En el mismo orden de ideas, el uso del lenguaje y las correctas concepciones matemáticas que demuestran tener, son un aporte significativo para estimular el desarrollo

del pensamiento variacional de manera formal, el cual contribuye a la integración del pensamiento matemático y coadyuva a la aprehensión y adquisición de un conocimiento significativo (Posada et al., 2006:18).

Las producciones de los trabajos estudiantiles en esta investigación ofrecen una abundancia de diversas estrategias de resolución mediante visualización (Arcavi, 2003), así como articulaciones entre registros de representación por parte de los estudiantes y obtenidas de los instrumento aplicados, tanto individuales (prueba diagnóstico, prueba evaluativa final) como grupales (sesiones de estudio) que se les propusieron. Estos sistemas o registros semióticos (Duval, 2006) evidenciaron que son de gran importancia para que el estudiante pueda comprender y construir un significado holístico, teniendo en cuenta que enfrentarse a situaciones como el trabajo hecho por los estudiantes en las sesiones de trabajo demanda una adecuada coordinación de representaciones aritméticas, simbólicas, verbales y en mayor instancia representaciones algebraicas y geométricas.

Asimismo se evidenció que Geogebra como una herramienta de apoyo a la visualización (Garcia y Benitez, 2013), contribuye de manera positiva en el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior (análisis, síntesis, desarrollo lógico, visualización, entre otras), también al fortalecimiento del pensamiento variacional (MEN, 2006) en algunos casos y en otros al desarrollo de este pensamiento. Por tanto, es importante realizar actividades, sesiones de trabajo y uso de software en donde surja la mayor cantidad de recursos, ya que por medio de ellos, la captación y aprehensión de un objeto matemático puede ser más significativo para los estudiantes.

5.2 Recomendaciones

En base al resultado encontrado, se recomienda a la comunidad educativa en matemáticas seguir indagando en el pensamiento variacional y su potenciación en el nivel medio universitario, de modo que se promueva el desarrollo de pensamiento matemático desde niveles iniciales educativos.

Al desarrollar tareas y sesiones de trabajo antes, durante el proceso de enseñanza aprendizaje, se le debe exigir al docente de matemáticas que debe hacer una revisión pertinente y actualizada de literatura en Educación Matemática relativa al pensamiento matemático, al pensamiento matemático avanzado y al pensamiento variacional para poder tener los resultados esperados en dicho proceso.

La visualización es un proceso cognitivo que debe de ser desarrollado y practicado desde los niveles iniciales educativos con apoyo de los softwares tecnológicos, ya que ayuda al desarrollo del pensamiento matemático y genera habilidades que conducen a resolver problemas y lograr realizar diferentes tipos de representaciones al estar ante una situación problema.

Concienciar en los docentes de matemáticas que la tecnología es una excelente ayuda para construir conocimiento y a la misma vez genera ese conocimiento en otros más profundos para el proceso de enseñanza y aprendizaje de los educandos y focalizar su atención en reflexionar, razonar y resolver problemas.

Es importante en la medida de lo posible, incitar a los docentes a que reflexionen y promuevan las experiencias significativas que motiven, estimulen y fortalezcan la enseñanza de la matemática en sus estudiantes mediante la tecnología.

Realizar estudios que generen propuestas sobre el desarrollo del pensamiento varacional mediante softwares matemáticos, haciendo uso de tratamiento y conversión de registros para el aprendizaje de la serie geométrica en cursos de cálculo, utilizando la observación de clases, ya que esto permitirá ampliar y profundizar más sobre los caminos en la comprensión de las series y progresiones.

A la Dirección de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán se recomienda dar uso al tema de este trabajo de investigación, como base para futuros temas relacionados, y que se enriquezcan, ya que es un tema muy amplio y relevante para continuar estudiándolo con rigor científico.

6 Referencias

- Alemán J. (2009). La geometría con cabri: una visualización a las propiedades de los triángulos (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán Tegucigalpa, Honduras.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.doi: 10.1023/A:1024312321077, Educational Studies in Mathematics, (en línea), 52 (3), 215-241.
- Argueta, J. A. (2012). Uso de recursos multimedia para potenciar el aprendizaje de los estudiantes del noveno grado en la asignatura de electricidad en el Centro de Investigación e Innovación Educativas de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, M.D.C.
- Artigue, M. (1995). "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática". pp. 33-59. P. Gómez (ed.), Una Empresa Docente-Grupo, Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática", pp. 97-135. Grupo Iberoamérica. Bogotá. 1995. Una Empresa Docente. Pedro Gómez, editor.
- Artigue, M (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 1(1), 40-55.

- Arturo, S., y Fernando, L. (2013). *Características y elementos del pensamiento variacional y su correspondencia con la prueba saber 11 [recurso electrónico]* (Doctoral dissertation).
- Avecilla, F. B., Cárdenas, O. B., Barahona, B. V., & Ponce, B. H. (2015). Geogebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica-ESPOL*, 28(5).
- Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería. *Formación universitaria*, 10(3), 93-106.
- Barrera, C. (2006). Evaluación de los Niveles de Razonamiento geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación Integral. *Divulgaciones Matemáticas*. Vol. 14 N° 2. Pp. 141-151.
- Borba, M. y Villareal, M. (2005). *Humanos con medios y la reorganización del pensamiento matemático*. Nueva York: Springer.
- Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.
- Boyer, C. (1986/1994). *Historia de la matemática*. (Mariano Martínez Pérez, trad.). Madrid: Alianza.
- Breve, M. (19 de Enero de 2018). Matemáticas es el principal problema de aprendizaje en los niveles educativos. *La Noticia*. Recuperado de <http://www.lanoticia.hn/>.
- Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional.
- Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación universitaria*, 9(6), 13–26. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003>.

- Cantoral, R., Molina, J. G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014b). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático, *11*, 17–26.
- Cantoral, R., Reyes, D. y Montiel, G. (2014a). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.
- Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software Geogebra con alumnos de II de Magisterio de la ENMPN (Tesis inédita de maestría). *Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el, 7.*
- Codes, M. (2010). Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional. *Salamanca: University of Salamanca.*
- Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Ponencia (mesa redonda): Confrontación de marcos teóricos. XVIII Jornadas del SI-IDM. Castellón, 2002. Obtenido el 18 de abril de 2007 desde http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc.
- Corral. J. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos.
- Cornu, B. (1986). Los principales obstáculos para aprender el concepto de límite. *Boletín Dubinsky, E. (1997). Algunas reflexiones sobre el primer curso de álgebra lineal, en D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, R. D. Porter, A. Watkins y W. Watkins, (Eds). Recursos para la enseñanza del álgebra lineal, MAA Notes, 42, pp. 85 - 106.*

- Crisólogo, D., & Martínez, G. (2015). Matemática educativa: algunos aspectos de la socio epistemología y la visualización en el aula. Retrieved from <https://ebookcentral.proquest.com>
- D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista científica*, 11, 150–164.
- Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México D.F: Ediciones Días de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.
- Duval, R. (1999). Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2004a). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, 1999. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educacion y Pedagogia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME* (9) 1, 143-168. Obtenido el 10 de agosto de 2010 desde <http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME20069105.pdf>
- Duval, R. y Sáenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J (2013). La aparición de objetos de prácticas matemáticas *Estudios educativos en matemáticas*, 82, 97-124.
- Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en educación Matemática*, 3, 11-44.

- García, D. (2018). Tratamiento y conversión de representaciones semióticas presentes en la resolución de problemas sobre las progresiones aritméticas y geométricas propuestos por los libros escolares. (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma, Manizales, Colombia.
- García, M, y Benítez, A. (2013). Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas, doi: 10.4067/S0718-50062013000100003, Formación Universitaria, 6(1), 13-20.
- García, M y Benítez, A. (2015). Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE, doi: 10.4067/S0718-50062011000300005, Form. Univ., (en línea), 4(3), 31-42.
- Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. Uno: Revista de didáctica en matemáticas. 25, 77-87.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10, 7-37.
- Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Publicaciones, 38, 25-48.

- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47-78.
- Gómez, O. (2015). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Recuperado de <http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/2363/1/G%C3%B3mezOspinaOscarMauricio2015.pdf>
- González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN. México D.F. México.
- Gordillo, W. (2015). Análisis de la comprensión sobre la noción anti derivada de estudiantes universitarios. Universidad de los Lagos, Chile. Director: Dr. Luis R. Pino-Fan.
- Gutiérrez R. (2009). Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior. (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, D. F.
- Gutierrez, N. (2013). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior* (Doctoral dissertation).
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista P. (2008) Metodología de la Investigación. (Cuarta ed.). México: Mc Graw Hill.
- Hernández, S. R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010) Metodología de la Investigación. Perú: Mc Graw Hill.
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Education.

- Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, 10, 23–45.
- Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 123–134.
- Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, 165–178.
- Holton, D. (2003). The Teaching and learning of Math's of University level: an ICMI study. Kluwer Dordrecht.
- Hohenwarter, M., y Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with Geogebra. *The Journal of Online Mathematics and its Applications*, Volume 7. Article ID: 1448
- Hohenwarter, M. (2012). Geogebra (Versión 4.2). Austria: Johannes Kepler University. Recuperado de <http://www.geogebra.org/cms/>. (Visitado 2012 – 12 – 11)
- Horta, C. (2018). Tratamiento y conversión de representaciones semióticas presentes en la resolución de problemas sobre las progresiones aritméticas y geométricas propuestos por los libros escolares (tesis de postgrado). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.
- Lupiañez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Universidad de Granada.

- Márquez, L. I. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *Nivel Superior, Innovación Educativa*, 5(5), 107-124.
- Mejía, M. (2007). Visualización que los estudiantes del Bachillerato Técnico en Electricidad tienen acerca de la Variación (Doctoral dissertation).
- MEN, C. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Documento: Vol. 3*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mendoza, M. (2013) Significando el Paso al Límite en Estudiantes que Inician Cálculo. *Tesis de Maestría publicada*. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.
- Mendoza, M. R. (2016). Pensamiento variacional emergente: una experiencia en cálculo inicial desde una primera categoría de análisis del enfoque ontosemiótico (Tesis). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.
- Murillo, M. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(2), 241-254.
- Neira, G. I. (2017). Dificultades, conflictos y obstáculos en las prácticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial —PEUC— en estudiantes de ingeniería. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Doctorado Interinstitucional en Educación -DIE- Énfasis Educación Matemática. Director: Dr. Rodolfo Vergel y Dr. Carlos E. Vasco.
- Javier, N., Colombia, S., Evelyn, S., & Enrique, J. (2015). Habilidades inherentes al pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México.

Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Madrid: Alianza.

Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Primera Edición.

Pérez O. (2012). *Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas. Master de Educación Secundaria -Especialidad Matemáticas.* Universidad de Granada, España. Recuperado de <https://www.google.com/search?q=Unidad+did%C3%A1ctica.+Sucesiones+matem%C3%A1ticas.+Progresiones+aritm%C3%A9ticas+y+geom%C3%A9tricas&ie=utf-8&oe=utf-8&client=firefox-b>.

Posada, F., Obando, G., MUNERA, J., & VILLA, J. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico. *Medellín: Gobernación de Antioquia.*

Posada, O., y Jaramillo, C. (2003). *El placer de doblar el papel.* Educación y Pedagogía, 19-23.

Rivera J. (2009). Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta “Pedro Nuño” (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán Tegucigalpa, Honduras.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49.

Ruiz, M.; Ávila, P.; Villa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En Córdoba, Francisco; Cardeño, Jorge (Eds.), *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII*

- Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454). Medellín: Fondo Editorial ITM.
- Salinas, C. (2003). Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios del cálculo (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México).
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 5-68.
- Secretaria de educación. (2017). Informe Nacional de Desempeño Académico 2016 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.
- Stewart J., Redlin L. y Watson S. (2012). Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. México, D.F: Cengage Learning.
- Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid, España: Síntesis S.A.
- Tall, D. (1992). La Transición al Pensamiento Matemático Avanzado: Funciones, Límites, Infinito y Prueba. En Grouws D.A. (ed.) *Manual de investigación sobre Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas*. Nueva York: Macmillan, pp. 495-511.
- Tall, D. (2009). Matemáticas dinámicas y la combinación de estructuras de conocimiento en el cálculo. *ZDM. Mathematics Education*, 41 (4), 481-492.
- UNESCO (2013). Enfoques estratégicos sobre las Tics en Educación en América Latina y el Caribe. Santiago: OREALC/UNESCO. Obtenido de UNESCO.
- UPNFM (2017). *Sistema de Líneas Institucionales de Investigación 2017-2018*. Recuperado

de <http://www.upnfm.edu.hn/phocadownload/Noticias/Líneas de Investigación>.

- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos (págs. 134 - 148). Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Bogotá, Colombia
- Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de nociones variacionales. Educação Matemática Pesquisa, 10(3), 514 - 528.

7 Anexos

Anexo #1. Cartas de Validación

Osorno-Chile, 8 mayo de 2019

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, CARLOS CABEZAS MANRIQUEZ, ejerciendo actualmente como Académico invitado de Postgrado e Investigador de la Universidad de Los Lagos provincia de Osorno, Chile; con el Grado Académico de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Estadual de Campinas (Unicamp), Brasil, hago constar por medio de la presente, que he revisado con fines de validación por medio de experto en el área, los instrumentos de recolección del anteproyecto titulado “Series Geométricas desde una perspectiva variacional mediante Geo Gebra en estudiantes universitarios”, propuesto por el Señor FRANKLIN ALBERTO MEJIA OCHOA, estudiante del programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán –Honduras.

Instrumentos Validados:

- Instrumento Prueba Diagnóstica (Cuatro preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 3 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 1 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 3 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 1 (Dos Preguntas)

- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Prueba Final (Doce Preguntas)

Usando la siguiente tabla de criterios para validación para cada instrumento, me permito emitir concepto general

	Deficiente	Aceptable	Bueno	Excelente
Congruencia de los objetivos del proyecto con las sesiones de estudio propuestas				X
Articulación de cada pregunta de las sesiones con el programa Geo Gebra y el conocimiento Matemático (Series Geométricas)			X	
Redacción			X	
Claridad y Precisión				X

Cordialmente,

UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS



Dr. CARLOS CABEZAS MANRÍQUEZ

Doctor en Ciencias Matemáticas
ccabezasman@gmail.com
Celular: (+56 9) 9599 7458

Casa Central Lord Cochrane 1046 Teléfono 56 642333000, Osorno-Chile

Bogotá, D.C., Colombia, Enero 6 de 2019

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, WILSON GORDILLO THIRIAT, ejerciendo actualmente como Profesor Titular en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia y con el Grado Académico de Doctor en Educación Matemática otorgado por la Universidad de Los Lagos – Chile.

Hago constar por medio de la presente, que he revisado con fines de validación por medio de experto en el área, los instrumentos de recolección del anteproyecto titulado “Construcción de Series Geométricas desde una perspectiva variacional mediante GeoGebra en estudiantes universitarios”. Propuesto por: FRANKLIN ALBERTO MEJIA OCHOA, estudiante del programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán – Honduras.

Instrumentos Validados:

- Instrumento Prueba Diagnóstica (Cuatro preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 2 (Tres Preguntas)

- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 3 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Prueba Final (Doce Preguntas)

Usando la siguiente tabla de criterios para validación para cada instrumento, me permito emitir concepto general

	Deficiente	Aceptable	Bueno	Excelente
Congruencia de los objetivos del proyecto con las sesiones de estudio propuestas			X	
Articulación de cada pregunta de las sesiones con el programa GeoGebra y el conocimiento Matemático (Series Geométricas)			X	
Redacción			X	
Claridad y Precisión			X	

Cordialmente



Wilson Gordillo Thiriat, Ph.D.

Doctor en Educación Matemática

wgordillot@udisrital.edu.co

Celular: (+057)3057918528

Tegucigalpa, M.D.C., Honduras, Enero 18 de 2019

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, MARVIN ROBERTO MENDOZA VALENCIA, ejerciendo actualmente como Profesor Titular en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras– (UNAH-Tec Danlí); Profesor de Postgrado de la Maestría en Matemática Educativa en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y con el Grado Académico de Doctor en Educación Matemática otorgado por la Universidad de Los Lagos – Chile.

Hago constar por medio de la presente, que he revisado con fines de validación por medio de experto en el área, los instrumentos de recolección del anteproyecto titulado “Series Geométricas desde una perspectiva variacional mediante GeoGebra en estudiantes universitarios”. Propuesto por: FRANKLIN ALBERTO MEJIA OCHOA, estudiante del programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán – Honduras.

Instrumentos Validados:

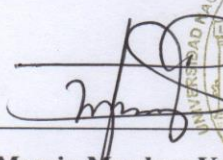
- Instrumento Prueba Diagnóstica (Cuatro preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 1- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 3 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 2- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 1 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 3- Nivel 3 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 4- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 1 (Tres Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 2 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 3 (Cinco Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 5- Nivel 4 (Seis Preguntas)
- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 1 (Dos Preguntas)

- Instrumento Sesión de estudio # 6- Nivel 2 (Cuatro Preguntas)
- Instrumento Prueba Final (Doce Preguntas)

Usando la siguiente tabla de criterios para validación para cada instrumento, me permito emitir concepto general

	Deficiente	Aceptable	Bueno	Excelente
Congruencia de los objetivos del proyecto con las sesiones de estudio propuestas				X
Articulación de cada pregunta de las sesiones con el programa GeoGebra y el conocimiento Matemático (Series Geométricas)				X
Redacción				X
Claridad y Precisión				X

Cordialmente,




Marvin Mendoza Valencia, Ph.D.
Doctor en Educación Matemática

Celular: (+504)96950035

Anexo #2. Prueba Diagnóstica



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

I período 2019

Prueba Diagnóstica

Nombre: _____ Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

1. Encontrar el valor de las siguientes sumas.

a) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 =$

b) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 400 =$

c) $1 + 8 + 27 + 64 + \dots + 729 =$

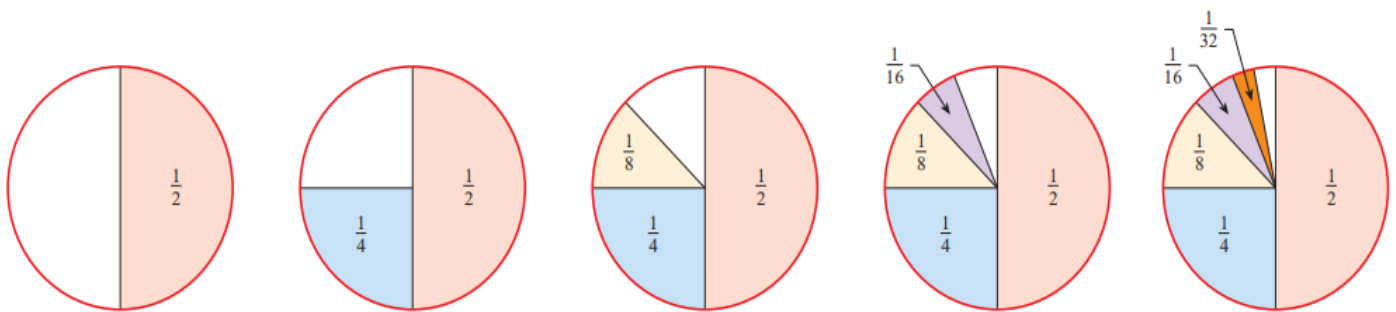
2. Encontrar el valor de las siguientes sumas.

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots =$

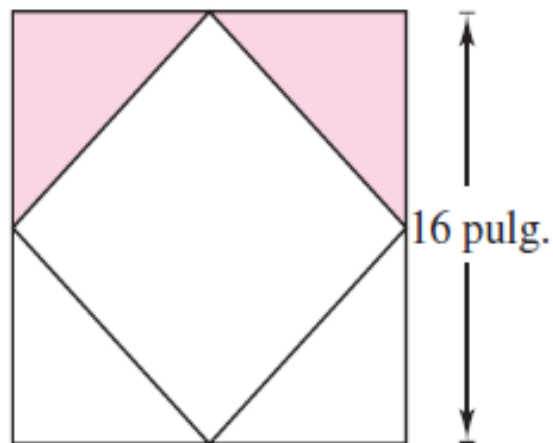
b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots =$

c) $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} + \dots =$

3. Usted tiene un pastel, y quiere comer primero la mitad del pastel, luego comerá la mitad de lo que reste, luego comerá otra vez la mitad de lo que reste. Este proceso se repite de manera indefinida. ¿Cuál es el área total del pastel que podría comerse? ¿Es posible comerse todo el pastel?



4. Los lados de un cuadrado son de 16 pulgadas de longitud. Un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original. Dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados (ver la figura). Determinar el área de las regiones sombreadas a) si este proceso se repite cinco veces más y b) si este patrón de sombreado se repite infinitamente.



Anexo #3. Sesiones de trabajo



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 1- Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

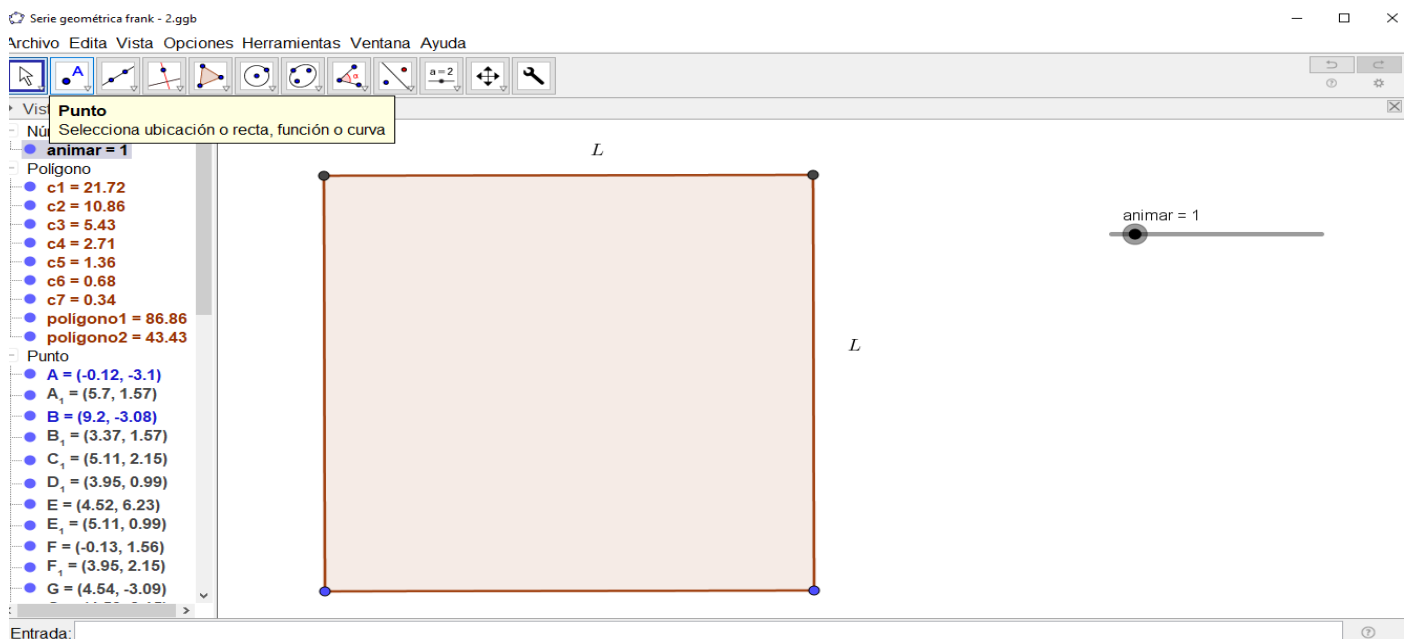


Figura 1.

- 1) ¿Qué figura observas?
- 2) Señala las características de esta figura, que puedas observar.
- 3) Señala algunas magnitudes de los elementos de la figura.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 1- Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

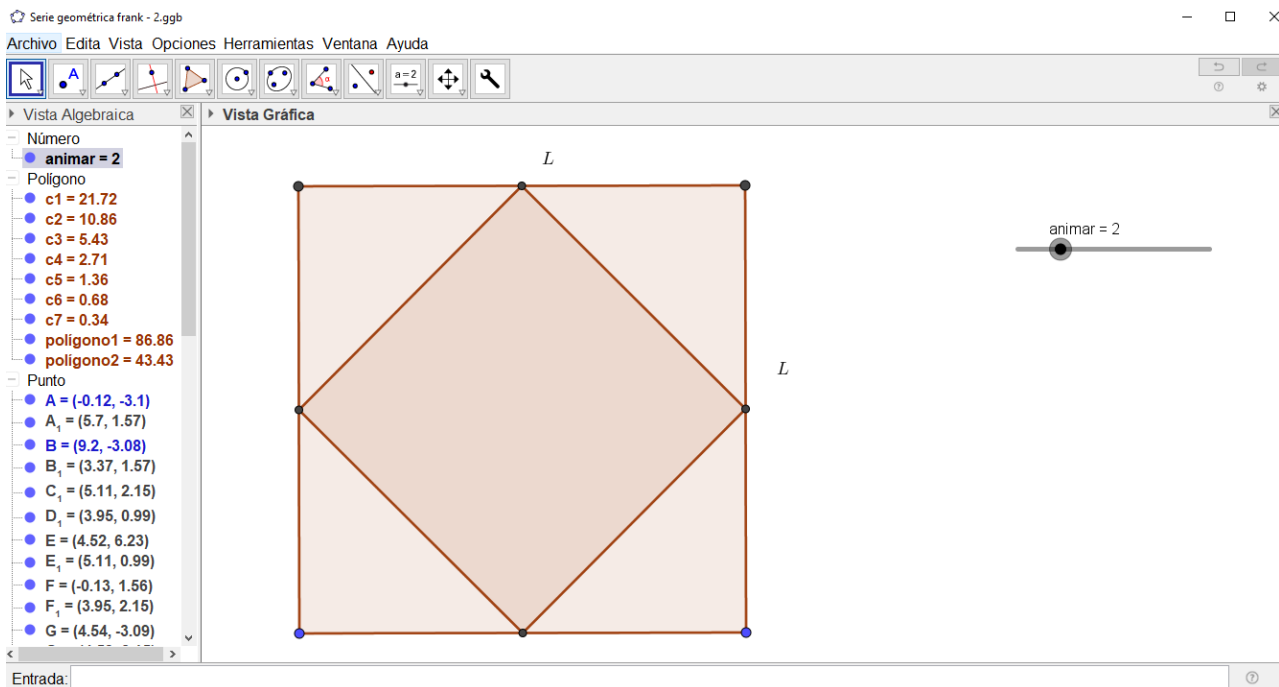


Figura 2.

- ❖ Suponga que en la figura anterior (Figura 1), se inscribe otra en la forma que muestra la Figura 2, siendo sus vértices los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. Precisa las magnitudes de esta figura inscrita y, compáralas con aquellas correspondientes en la primera ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cuál es el valor de la longitud del lado de la figura inscrita?
4. ¿Cómo es su perímetro comparado con el perímetro de la primera?
5. ¿Cómo es su área (comparando con la de la figura inicial)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 1- Nivel 3

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase

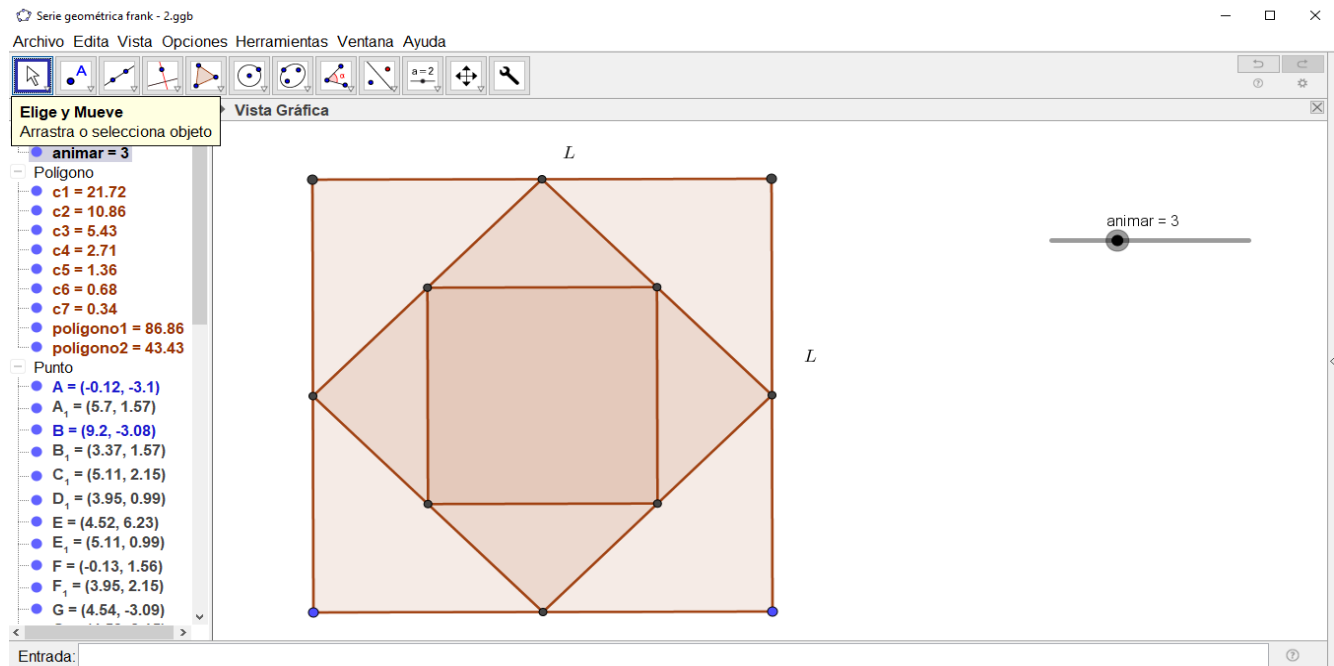


Figura 3.

- ❖ Suponga que se construyó una tercera figura (inscrita en la figura 2) cuyos vértices son los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. ¿Podrías precisar y comparar las magnitudes de esta figura inscrita en relación a la segunda? ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cuál es el valor de la longitud del lado de la tercera figura inscrita?
4. ¿Cómo es su perímetro? ¿Se ha modificado comparado con el de la figura anterior?
5. ¿Cómo es su área (comparada con la de la segunda figura)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 1 - Nivel 4

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase

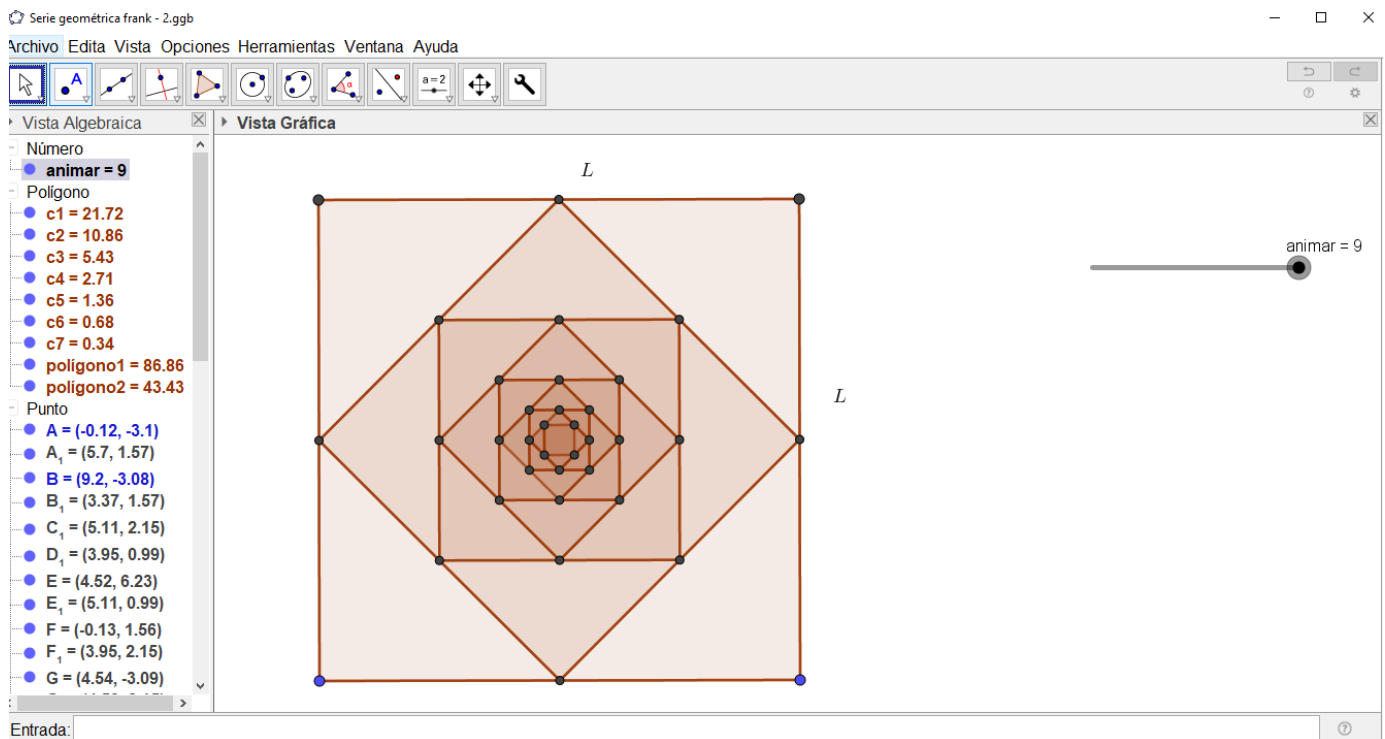


Figura 4.

1. Con base a tus conocimientos de geometría plana, establece justificadamente si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse cualesquiera sea n .
2. Si la construcción es posible, ¿cuál es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima figura inscrita?
3. ¿Cuáles serían sus perímetros?
4. ¿Que podrías argumentar respecto a sus áreas?
5. Elabora un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.
6. ¿Observas alguna relación entre las figuras construidas? , ¿Entre los perímetros?, ¿Entre las áreas?

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)**

Sesión de estudio # 2 - Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

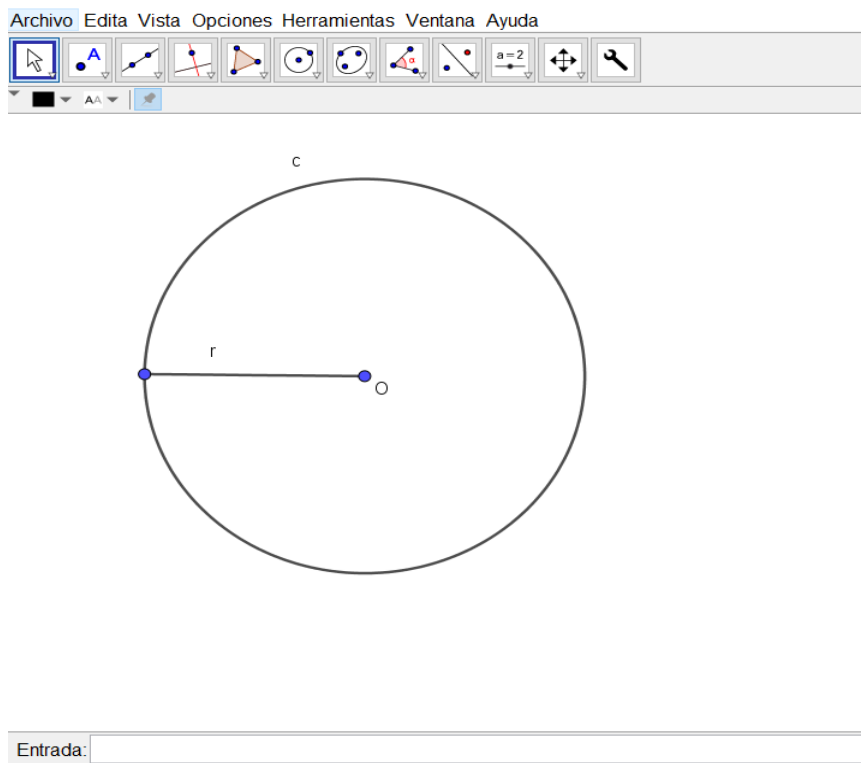


Figura 1.

1. ¿Qué figura observas?

2. Señala las características de esta figura, que puedas observar.

3. Señala algunas magnitudes de los elementos de la figura.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 2 - Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

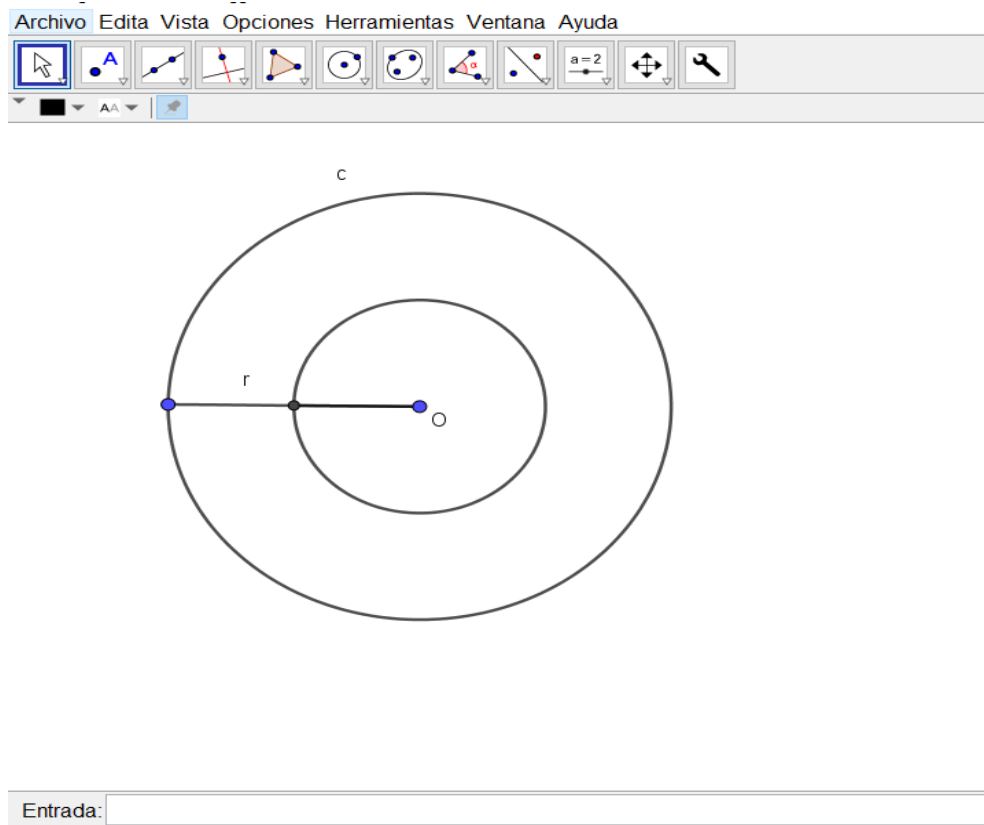


Figura 2.

- ❖ Suponga que sobre en el interior de una circunferencia de radio r , se dibuje otra circunferencia concéntrica de la mitad del radio antes mencionada.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. Precisa las magnitudes de esta figura concéntrica y, compáralas con aquellas correspondientes en la primera ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cómo es su perímetro comparado con el perímetro de la primera circunferencia?
4. ¿Cómo es su área (comparando con la de la figura inicial)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 2 - Nivel 3

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

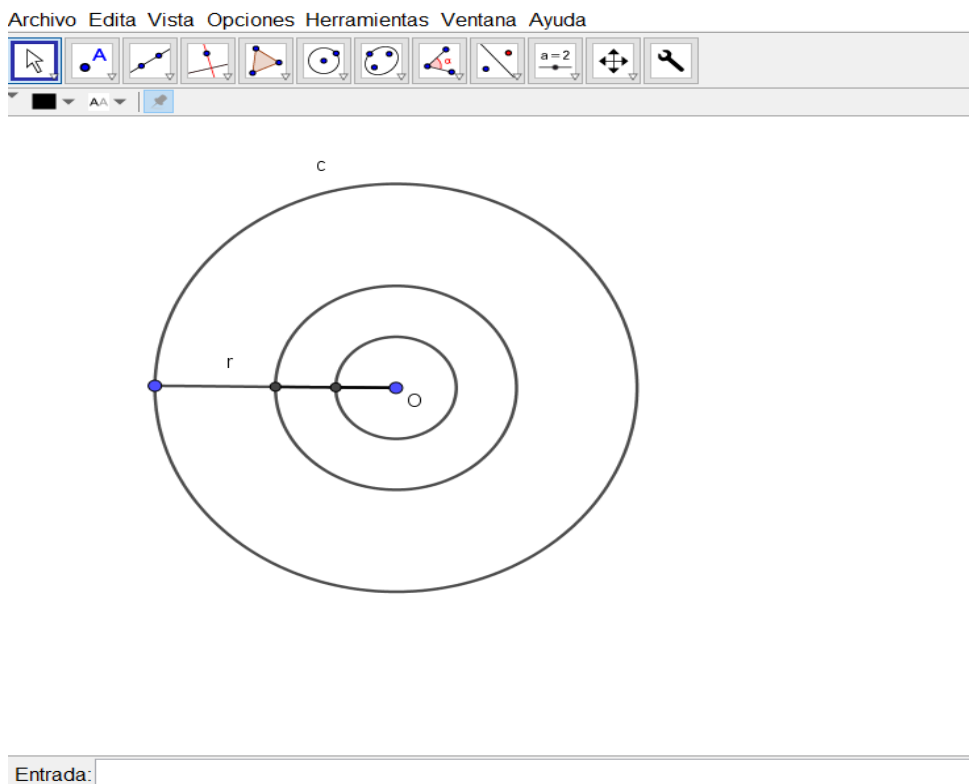


Figura 3.

❖ Suponga que sobre en el interior de la figura anterior (figura 2), se dibuje otra circunferencia concéntrica de la mitad del radio antes mencionado.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. ¿Podrías precisar y comparar las magnitudes de esta figura concéntrica en relación a la segunda? ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cómo es su perímetro? ¿Se ha modificado comparado con el de la segunda figura?
4. ¿Cómo es su área (comparada con la de la segunda figura)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 2- Nivel 4

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

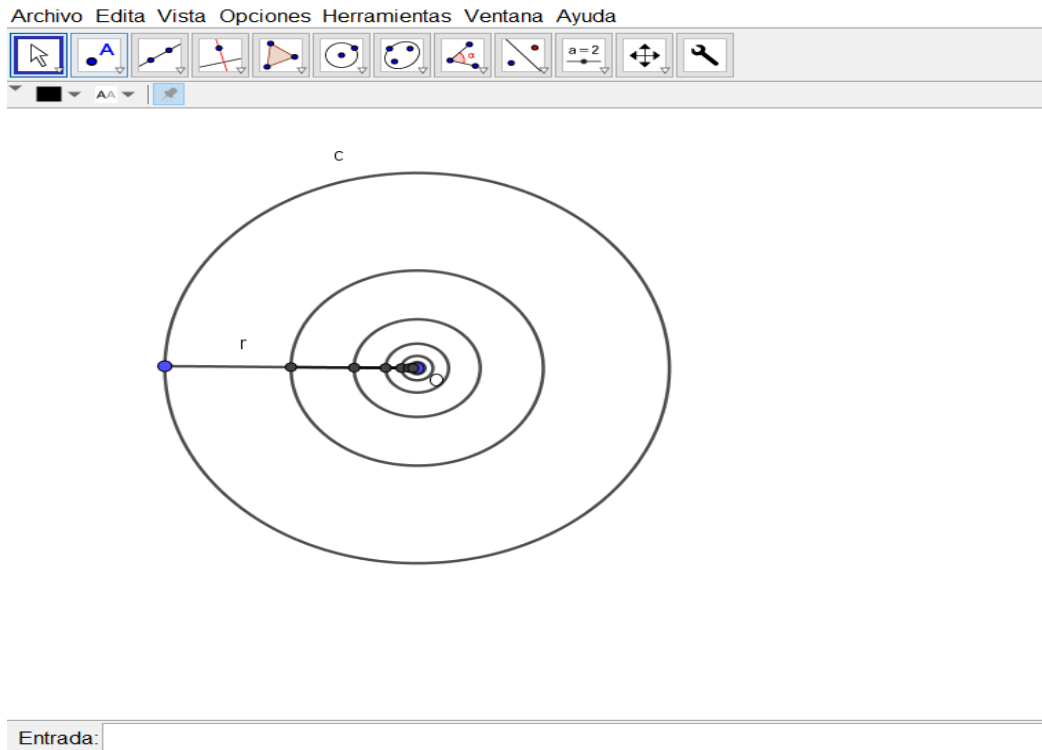


Figura 4.

1. Con base a tus conocimientos de geometría plana, establece justificadamente si la construcción de n circunferencias concéntricas puede realizarse cualesquiera sea n .
2. Si la construcción es posible, ¿cuál es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima circunferencia concéntrica?
3. ¿Cuáles serían sus perímetros?
4. ¿Qué puedes afirmar respecto a sus áreas?
5. Elabora un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras concéntricas construidas
6. ¿Observas alguna relación entre las circunferencias concéntricas? , ¿Entre los perímetros?, ¿Entre las áreas?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

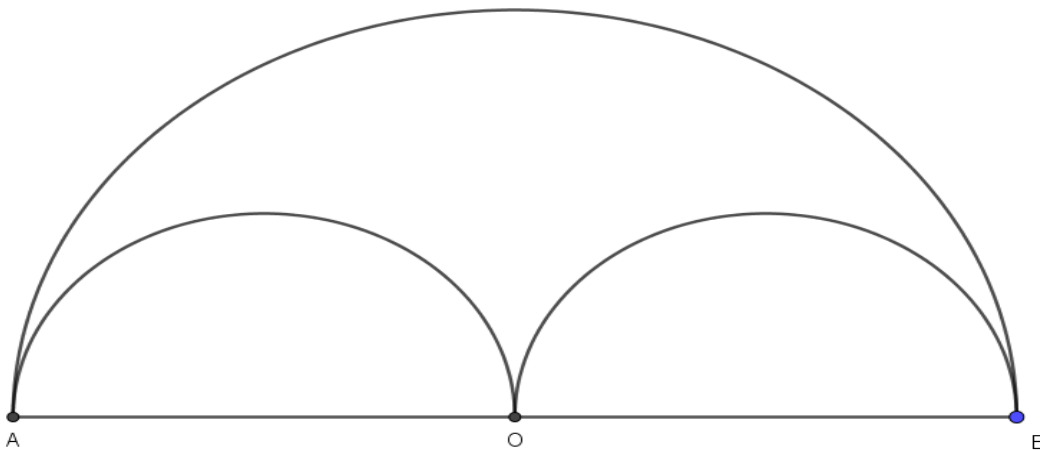
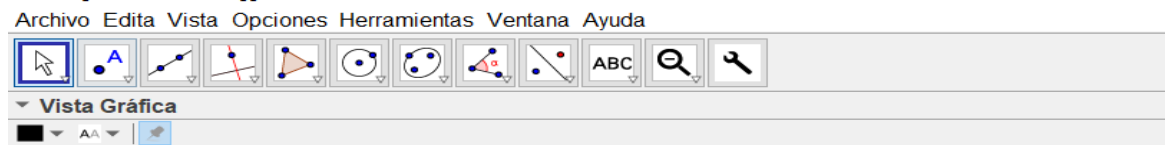
Sesión de estudio # 3 - Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.



Entrada: _____

Figura 1.

- ❖ Suponga que se construye una semicircunferencia con diámetro AB . Luego, se divide AB en dos partes iguales AO y OB , y se construyen dos semicircunferencias como lo indica la figura.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. Precisa las magnitudes de estas semicircunferencias y, compáralas con aquellas correspondientes en la primera Semicircunferencia ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cómo es su perímetro comparado con el perímetro de la primera semicircunferencia?
4. ¿Cómo es su área (comparando con la de la figura inicial)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

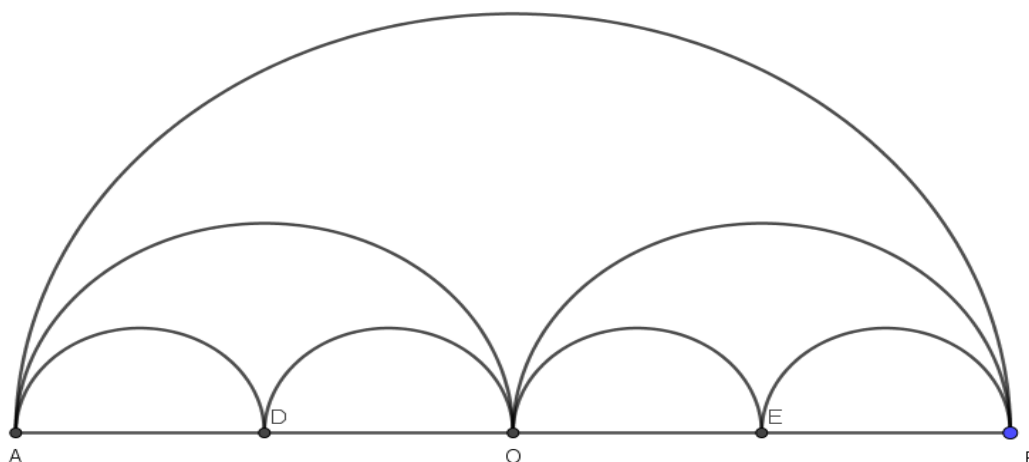
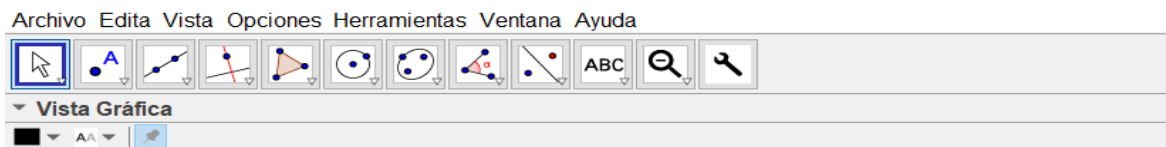
Sesión de estudio # 3 - Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.



Entrada: _____

Figura 2.

- ❖ Suponga que se construye una semicircunferencia con diámetro AB. Luego, se divide AB en dos partes iguales y se construyen dos semicircunferencias. Luego se continúa dividiendo y se construyen 4 semicircunferencias como lo indica la figura.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?

2. ¿Podrías precisar y comparar las magnitudes de estas semicircunferencias en relación a la segunda? ¿Han cambiado estas?

3. ¿Cómo es su perímetro? ¿Se ha modificado comparado con el de la figura 1?

4. ¿Cómo es su área (comparada con la de la figura 1)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 3 - Nivel 3

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

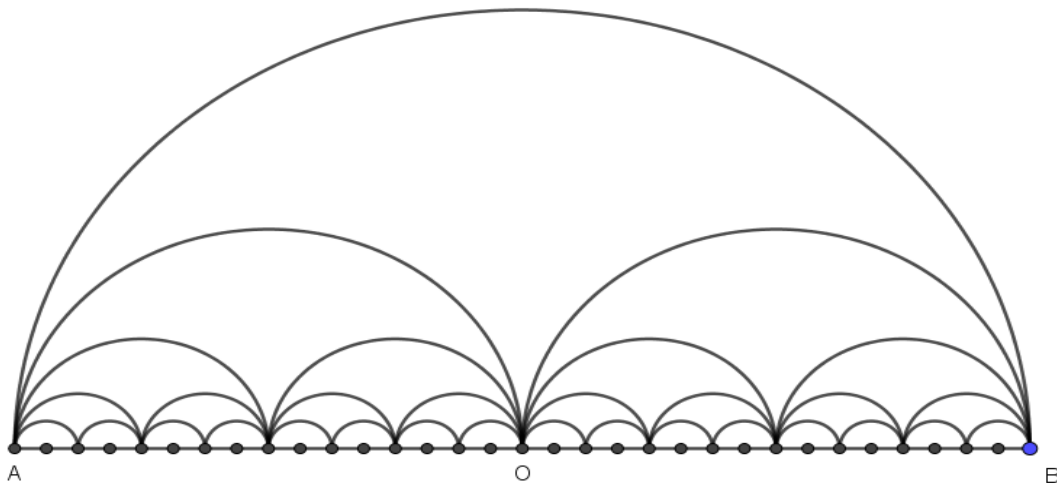
Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda



▼ Vista Gráfica



Entrada: _____

Figura 3.

1. Con base a tus conocimientos de geometría plana, establece justificadamente si la construcción de n semicircunferencias puede realizarse cualesquiera sea n .
2. Si la construcción es posible, ¿cuál es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima semicircunferencias?
3. ¿Cuáles serían sus perímetros?
4. ¿Qué puedes afirmar respecto a sus áreas?
5. Elabora un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras concéntricas construidas
6. ¿Observas alguna relación entre las semicircunferencias? , ¿Entre los perímetros?, ¿Entre las áreas?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)



Sesión de estudio # 4 - Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

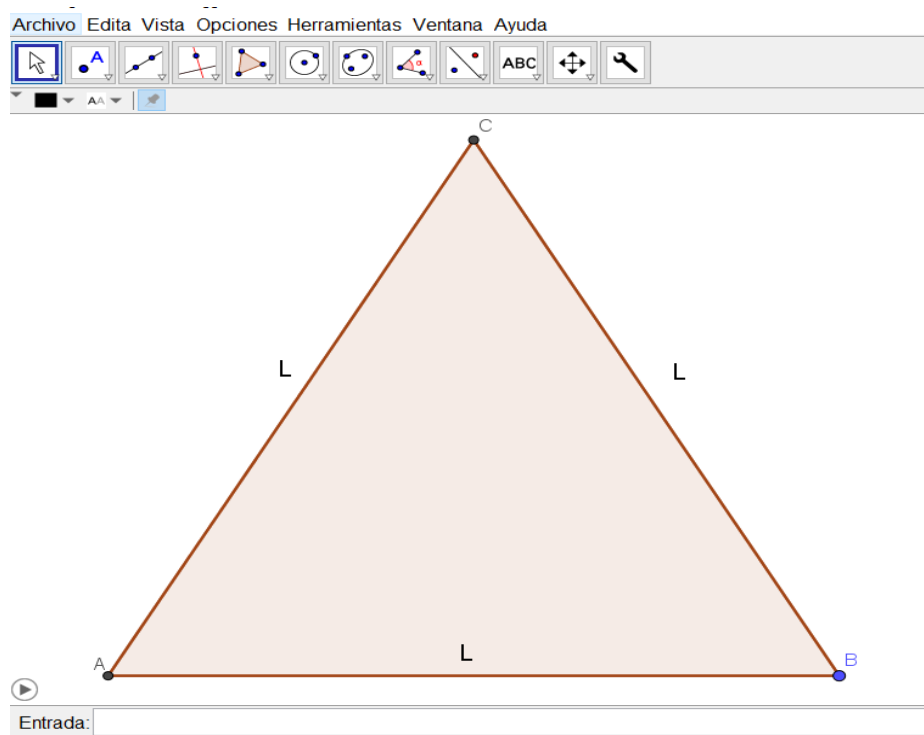


Figura 1.

1) ¿Qué figura observas?

2) Señala las características de esta figura, que puedas observar.

3) Señala algunas magnitudes de los elementos de la figura.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 4 - Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

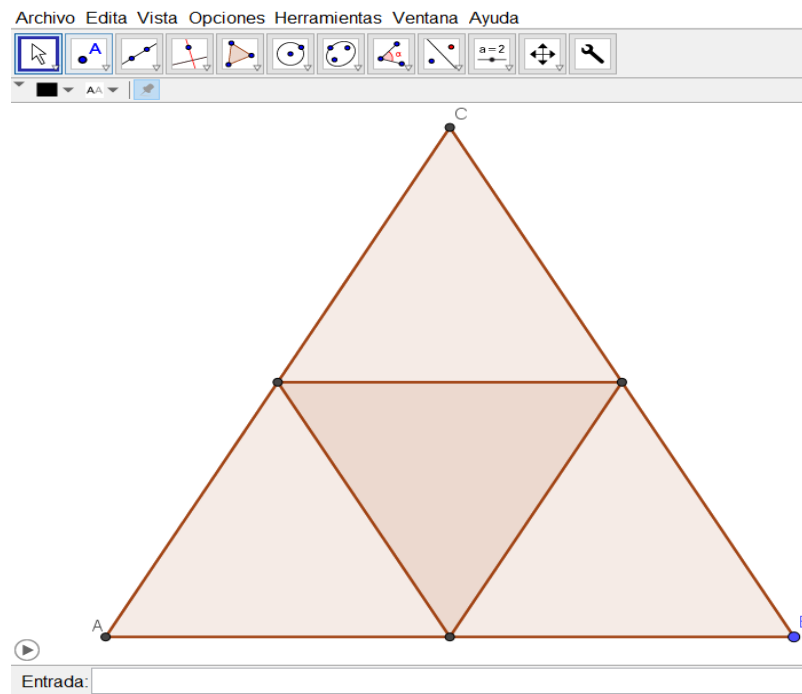


Figura 2.

- ❖ Suponga que en la figura anterior (Figura 1), se inscribe otra en la forma que muestra la Figura 2, siendo sus vértices los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior.

- 1) ¿Qué aprecias en esa figura?

- 2) Precisa las magnitudes de esta figura inscrita y, compáralas con aquellas correspondientes en la primera ¿Han cambiado estas?

- 3) ¿Cuál es el valor de la longitud del lado de la figura inscrita?

- 4) ¿Cómo es su perímetro comparado con el perímetro de la primera?

- 5) ¿Cómo es su área (comparando con la de la figura inicial)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 4 - Nivel 3

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

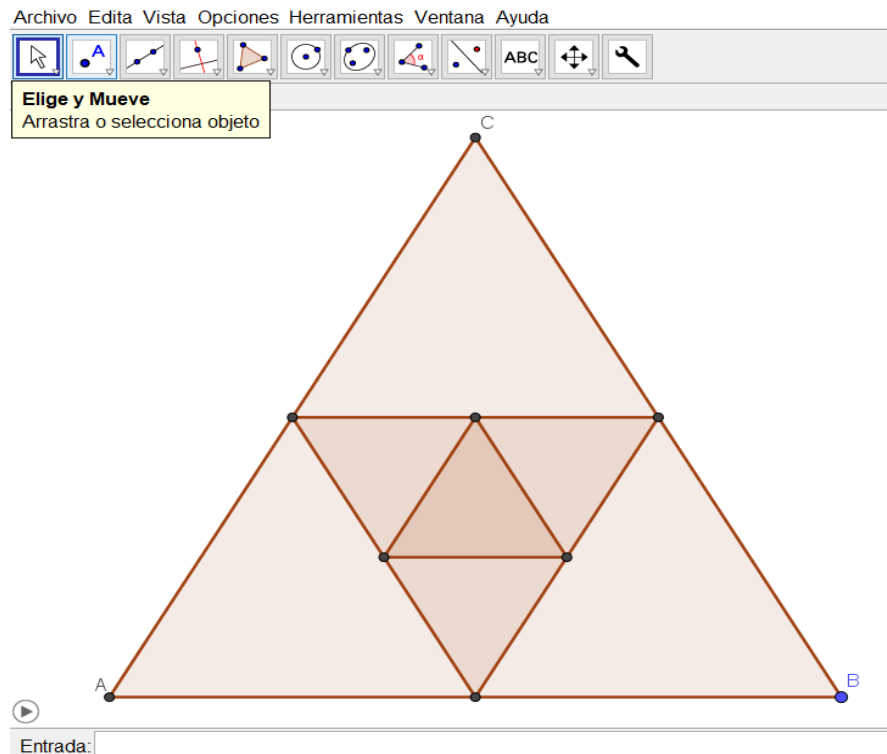


Figura 3.

- ❖ Suponga que se construyó una tercera figura (inscrita en la figura 2) cuyos vértices son los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?
2. ¿Podrías precisar y comparar las magnitudes de esta figura inscrita en relación a la segunda? ¿Han cambiado estas?
3. ¿Cuánto es el valor de la longitud del lado de la tercera figura inscrita?
4. ¿Cómo es su perímetro? ¿Se ha modificado comparado con el de la figura anterior?
5. ¿Cómo es su área (comparada con la de la segunda figura)?

P ROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 4 - Nivel 4

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

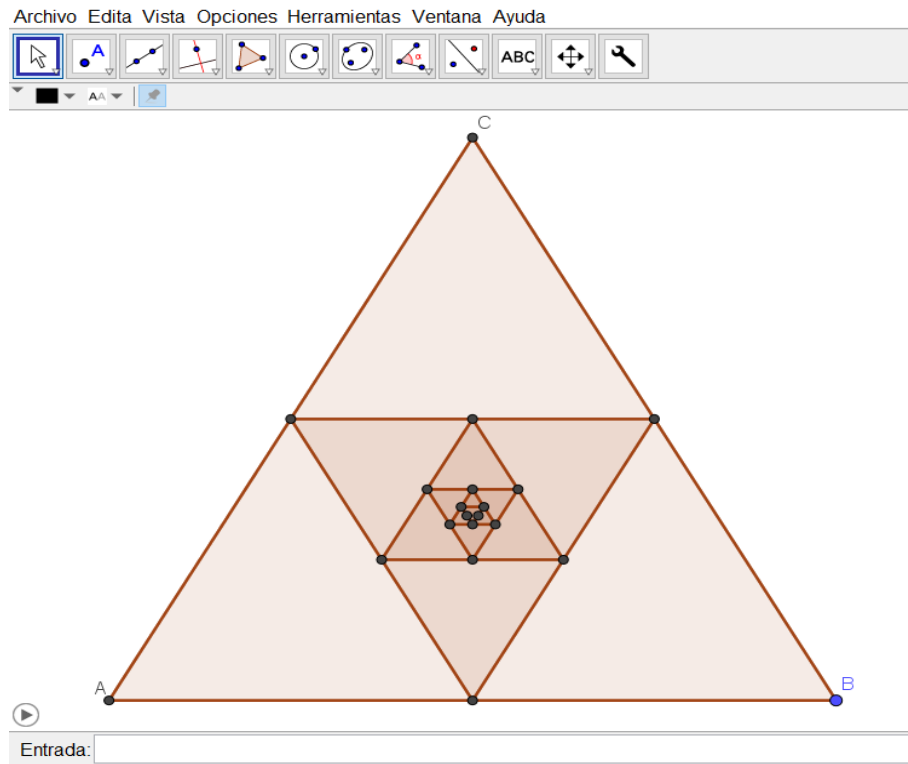


Figura 4.

1. Con base a tus conocimientos de geometría plana, establece justificadamente si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse cualesquiera sea n .
2. Si la construcción es posible, ¿cuál es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima figura inscrita?
3. ¿Cuáles serían sus perímetros?
4. ¿Que podrías argumentar respecto a sus áreas?
5. Elabora un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.
6. ¿Observas alguna relación entre las figuras construidas? , ¿Entre los perímetros?, ¿Entre las áreas?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 5 - Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

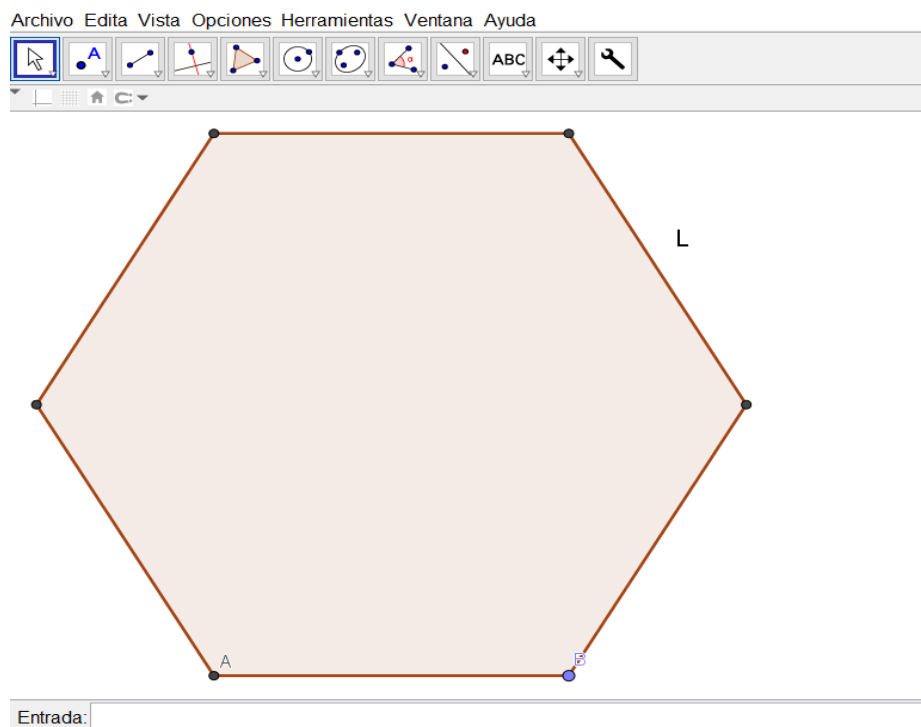


Figura 1.

1) ¿Qué figura observas?

2) Señala las características de esta figura, que puedas observar.

3) Señala algunas magnitudes de los elementos de la figura.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 5 - Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejía Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

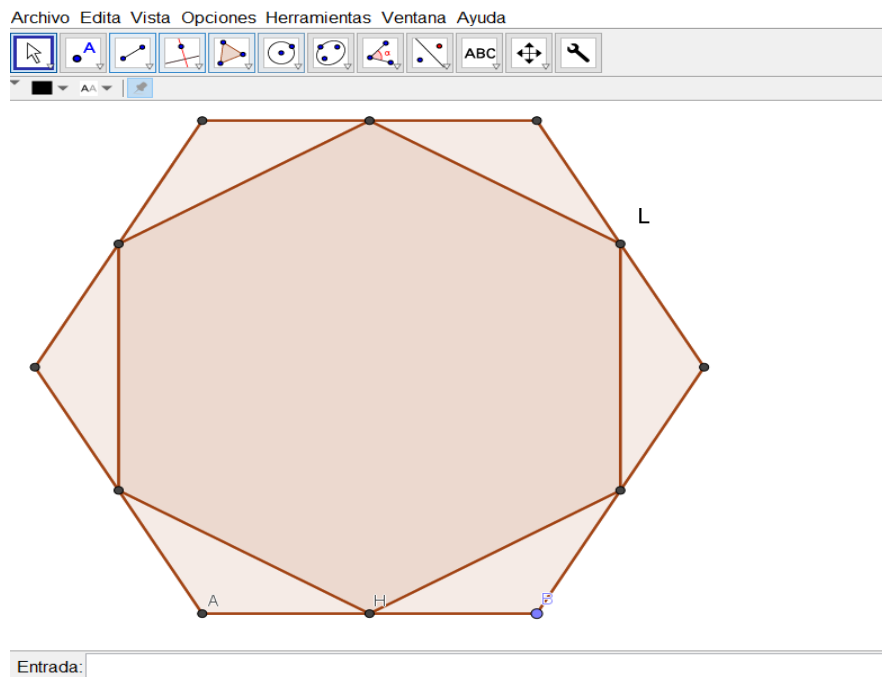


Figura 2.

- ❖ Suponga que en la figura anterior (Figura 1), se inscribe otra en la forma que muestra la Figura 2, siendo sus vértices los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior.

- 1) ¿Qué aprecias en esa figura?
- 2) Precisa las magnitudes de esta figura inscrita y, compáralas con aquellas correspondientes en la primera ¿Han cambiado estas?
- 3) ¿Cuál es el valor de la longitud del lado de la figura inscrita?
- 4) ¿Cómo es su perímetro comparado con el perímetro de la primera?
- 5) ¿Cómo es su área (comparando con la de la figura inicial)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 5 - Nivel 3

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

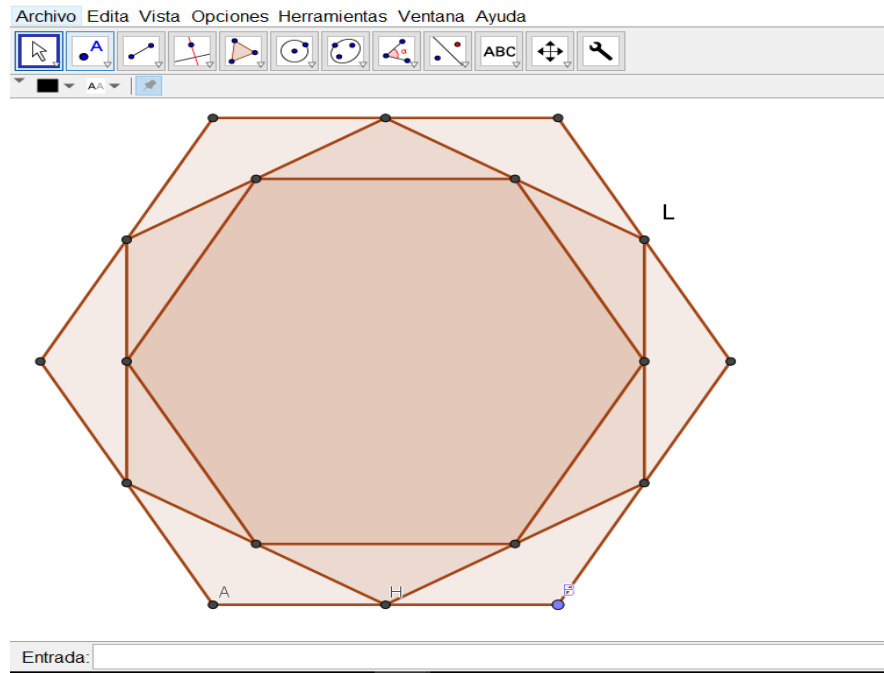


Figura 3.

- ❖ Suponga que sobre los puntos medios de cada uno de los lados de la figura anterior, se construyó una tercera figura inscrita.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?

2. ¿Podrías precisar y comparar las magnitudes de esta figura inscrita en relación a la segunda? ¿Han cambiado estas?

3. ¿Cuánto es el valor de la longitud del lado de la tercera figura inscrita?

4. ¿Cómo es su perímetro? ¿Se ha modificado este?

5. ¿Cómo es su área (comparándola respecto a la segunda figura)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 5 - Nivel 4

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

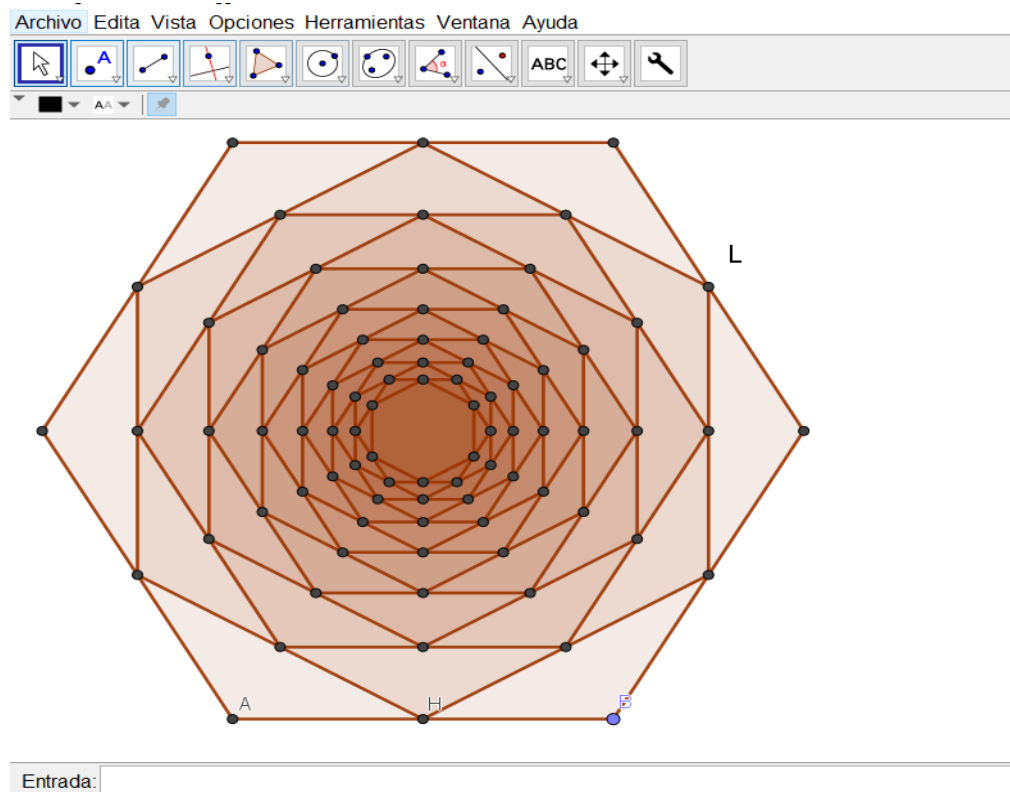


Figura 4.

1. Con base a tus conocimientos de geometría plana, establece justificadamente si la construcción de n figuras inscritas puede realizarse cualesquiera sea n .
2. Si la construcción es posible, ¿cuál es la longitud de la primera, segunda, tercera, cuarta y n -ésima figura inscrita?
3. ¿Cuáles serían sus perímetros?
4. ¿Que podrías argumentar respecto a sus áreas?
5. Elabora un listado de las longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas.
6. ¿Observas alguna relación entre las figuras construidas? , ¿Entre los perímetros?, ¿Entre las áreas?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)



Sesión de estudio # 6 - Nivel 1

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

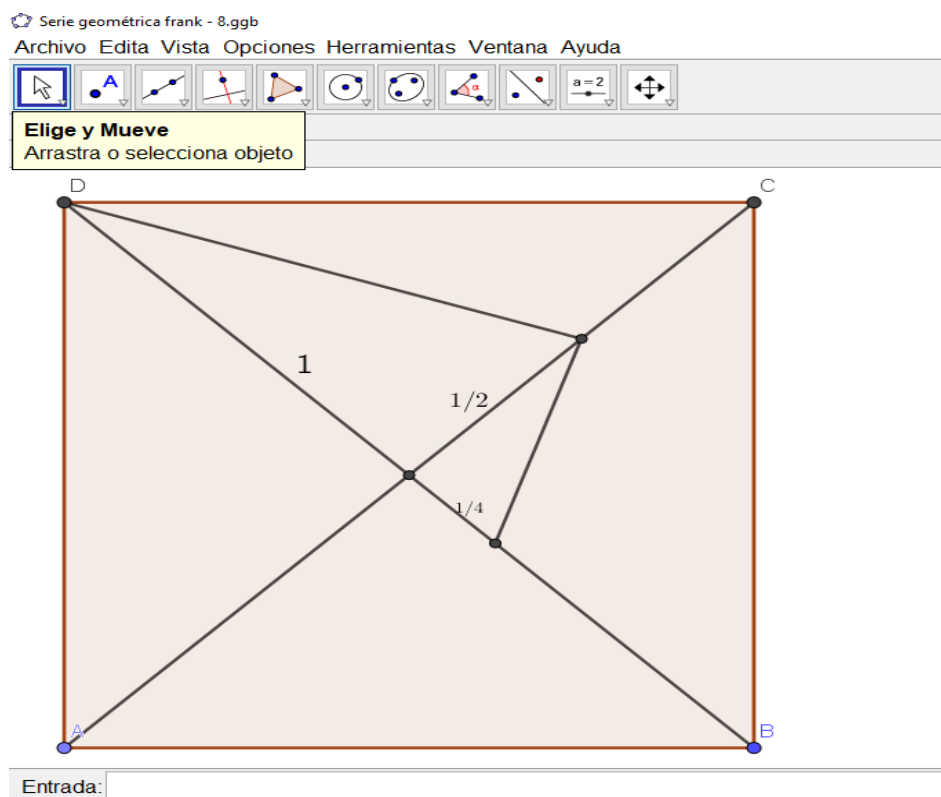


Figura 1.

- ❖ Suponga que en el interior de un cuadrado cuya diagonal mide 2 unidades, se dibuja una espiral como se indica en la figura. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral, al centro del cuadrado son, respectivamente, 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; y así sucesivamente.

1. ¿Qué aprecias en esa figura?

2. ¿Cuál es la longitud de los segmentos que componen la espiral?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)

Sesión de estudio # 6 - Nivel 2

Nombre: _____ N° de cuenta: _____

Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal. Considerando que en la investigación, el análisis de los errores es parte importante del proceso, se le pide que, por favor, no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

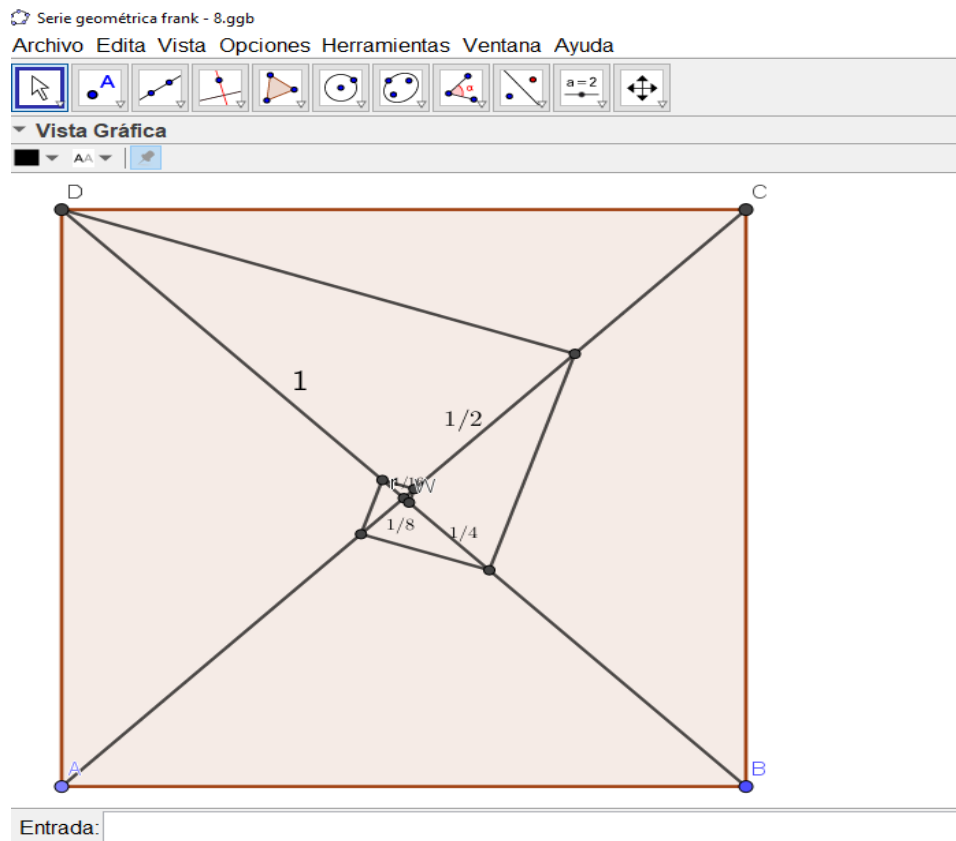


Figura 2.

- ❖ Ahora Suponga que en el mismo cuadrado de la sesión anterior se sigue con espiral como se indica en la figura. Las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

1. ¿Qué aprecias en la figura 2?
2. ¿Podrías precisar y comparar la longitud de cada uno de los segmentos que componen la espiral de esta figura en relación a la figura 1? ¿Han cambiado estas?
3. ¿Se puede continuar con la construcción de cada una los segmentos que componen la espiral de manera indefinida?
4. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los segmentos que componen la espiral de esta figura en relación a la figura 1? ¿Han cambiado estas? ¿Cuántas puedes calcular? Justifique su respuesta.

Anexo #4. Prueba Final



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA CENTROAMERICANA - (UNITEC)



I período Académico 2019

Prueba Final

Nombre: _____ Fecha: _____

Estimados estudiantes, la presente hoja es parte de un proyecto de investigación cuyos resultados serán parte del contenido de la Tesis de Maestría en Educación Matemática, que está realizando el Profesor Franklin A. Mejia Ochoa, estudiante del programa de post grado en la especialidad, en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, sede Tegucigalpa, bajo la tutoría del Dr. Marvin R. Mendoza Valencia.

Instrucciones: En este trabajo se le pide que registre por escrito todo lo que sirva a la reflexión individual y grupal, considerando que los errores son parte importante en este proceso. Por favor no borre nada y entregue su trabajo al final de la clase.

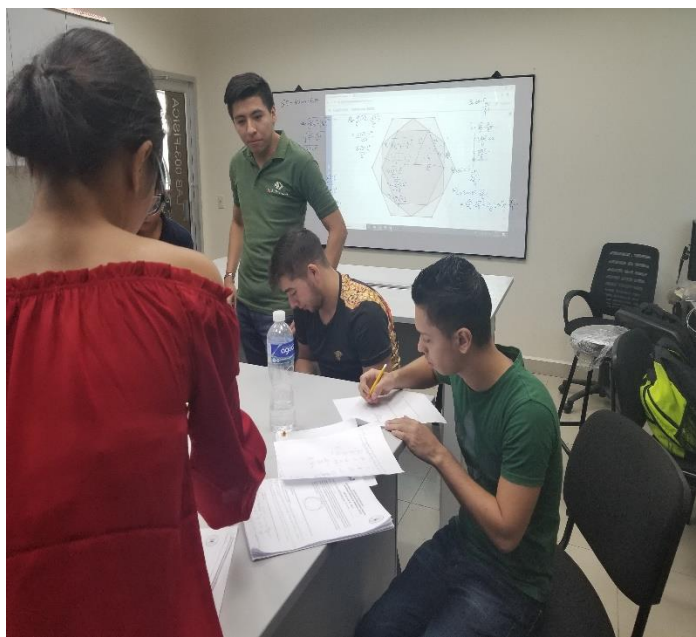
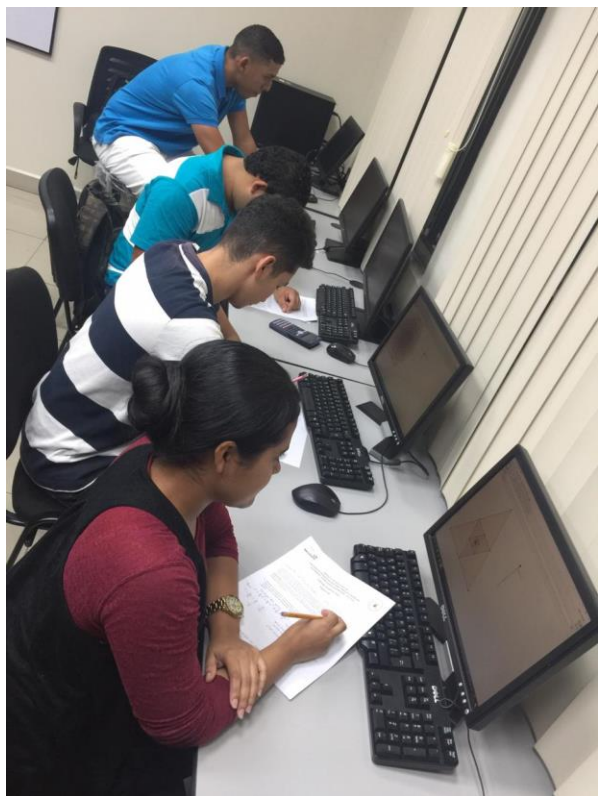
1. Recuerda el instrumento #1 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los cuadrados contruidos?, ¿Puedes sumar las áreas de todos de los cuadrados contruidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

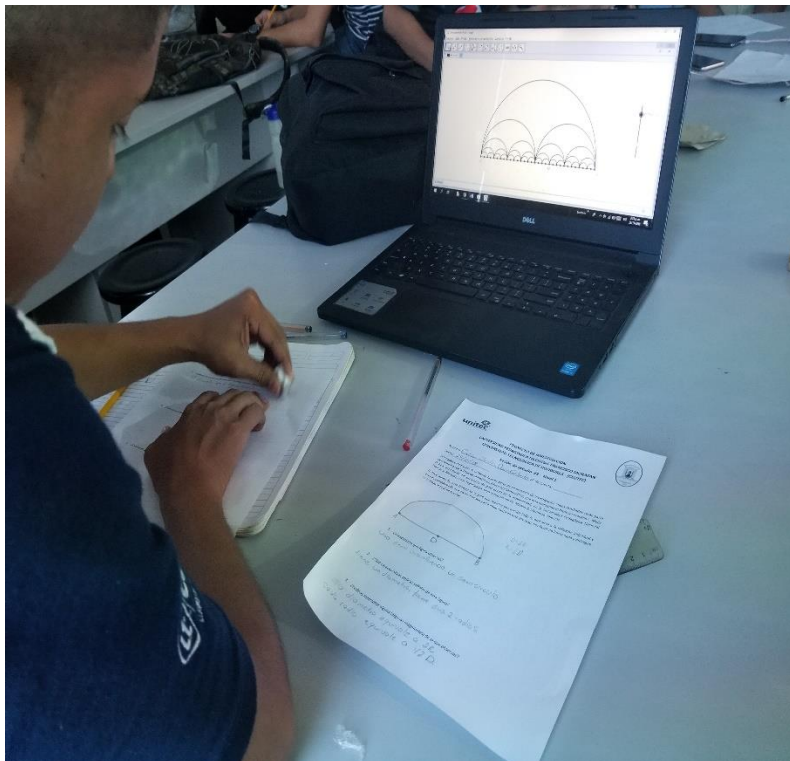
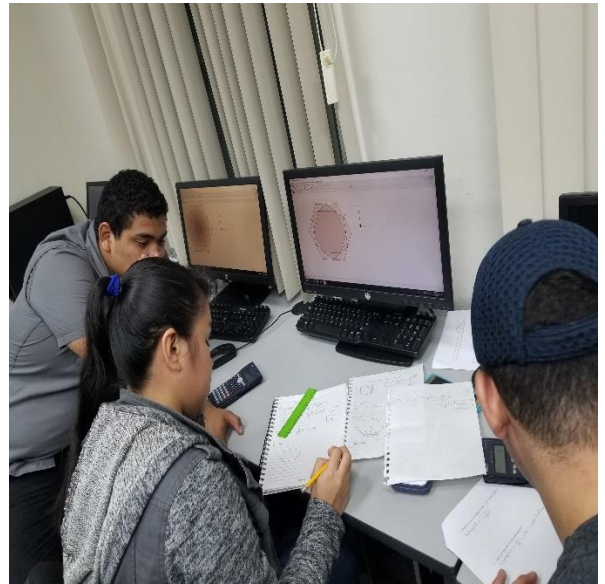
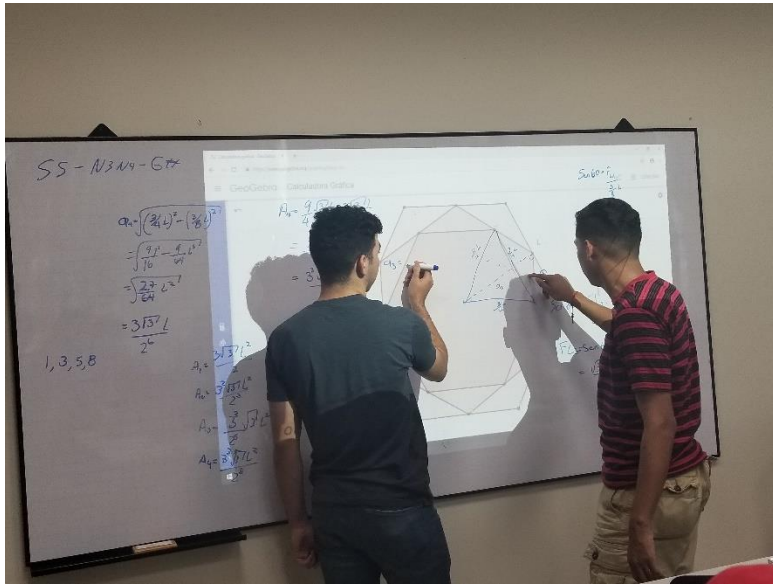
2. Recuerda el instrumento #2 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los círculos concéntricos contruidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los círculos concéntricos contruidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

3. Recuerda el instrumento #3 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los semicírculos construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los semicírculos construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?
4. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 1, número 2, número 3? ¿A Cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?
5. ¿Observas algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos #1, #2 y #3?
6. ¿Qué diferencias encuentras el instrumentó #1 y en el instrumentó #2, o en el instrumentó #2 y en el instrumentó #3, hay algún patrón parecido? ¿en que se parecen y cuáles son las similitudes?
7. Recuerda el instrumento #4 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los triángulos equiláteros inscritos construidos? , ¿Puedes sumar las áreas de todos de los triángulos equiláteros construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?
8. Recuerda el instrumento #5 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las áreas de cada uno de los hexágonos inscritos construidos? ¿Puedes sumar las áreas de todos los hexágonos inscritos construidos? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?

9. Recuerda el instrumento #6 donde calculaste y contestaste que efectivamente la construcción se puede hacer de manera indefinida, ¿Serías capaz de sumar las distancias de los extremos de los segmentos que componen la espiral al centro del cuadrado que construiste? , ¿Puedes sumar las distancias de los extremos de los segmentos de la espiral que construiste? ¿A cuánto equivale y equivalen esos valores?
10. ¿Sería posible sumar todos los perímetros de las figuras construidas en los instrumentos número 4, número 5 y número 6? ¿A Cuánto equivale el valor en cada uno de los instrumentos aplicados?
11. ¿Observas algún patrón en los perímetros y áreas de las figuras en los instrumentos #4, #5 y #6?
12. ¿Qué diferencias encuentras el instrumentó #4, en el instrumentó #5 y en el instrumento #6, hay algún patrón parecido? ¿en que se parecen y cuáles son las similitudes?

Anexo #5. Fotos de las sesiones de trabajo.





The main window displays a geometric construction in the 'Vista Gráfica' (Graphics View). It features a series of concentric, semi-transparent orange polygons. A line segment labeled 'L' is drawn on the right side. A slider for 'animar = 14' is visible on the right. The bottom left has an 'Entrada:' (Input) field.

The 'Propiedades de Número animar' (Properties of Number animar) window is open on the right, showing the 'Programa de guion (scripting)' (Scripting program) tab. The script contains the following code:

```

196
197 Visibilidad[O_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
198 Visibilidad[P_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
199 Visibilidad[Q_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
200 Visibilidad[R_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
201 Visibilidad[S_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
202 Visibilidad[M_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
203 Visibilidad[T_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
204 Visibilidad[N_3, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
205 Visibilidad[r_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
206 Visibilidad[s_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
207 Visibilidad[q_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
208 Visibilidad[n_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
209 Visibilidad[p_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
210 Visibilidad[t_4, 1, Si[15 ≤ animar, true]]
211 Visibilidad[poligono14, 1, Si[15 ≤ animar, t
212
213

```

At the bottom of the script editor, there are buttons for 'Guion (script) de GeoGebra' and 'OK'.