UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN

VICE RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRIA:

APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS UNA “EXPERIENCIA SIGNIFICATIVA” EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NACIONAL DE MÚSICA

TESISTA:

Lic. DANIA YULISA BORJAS FRANCO

ASESOR DE TESIS:

Dr. FERNANDO HITT ESPINOZA

TEGUCIGALPA, M.D.C Junio de 2009

APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS UNA "EXPERIENCIA SIGNIFICATIVA" EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NACIONAL DE MÚSICA

* *

* * * * * * * * * *

* * *

*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FRANCISCO MORAZÁN

VICE RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS UNA "EXPERIENCIA SIGNIFICATIVA" EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NACIONAL DE MÚSICA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE MASTER EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESISTA:
Lic. DANIA YULISA BORJAS FRANCO

ASESOR DE TESIS:
Dr. FERNANDO HITT ESPINOZA

TEGUCIGALPA, M.D.C Junio de 2009

RECTORA

M.Sc. Lea Azucena Cruz

VICERRECTOR ACADÉMICO

M.Sc. Luis Orlando Marín

VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

Dr. Truman Bitelio Membreño

VICERRECTOR DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

M.Sc. Gustavo Cerrato

VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

M.Sc. Hermes Alduvin Díaz Luna

SECRETARIA GENERAL

M.Sc Iris Milagro Erazo

DIRECTORA DE POSTGRADO

Dra. Jenny Margoth Zelaya

Tegucigalpa, M.D.C 2009

DEDICATORIA

A mí hija Natalie Dayana

A mi esposo Carlos Omar

A mis padres Carlos y Lilian Nohemí

A mis hermanos

A mi asesor Dr. Fernando Hitt

AGRADECIMIENTOS

A Dios, *Todopoderoso.*

Al Doctor Fernando Hitt*, por su acertada dirección e incondicional ayuda en la realización de esta tesis, por su amistad, consejos y sobre todo por su paciencia.*

A todos los profesores *de la Maestría en Matemática Educativa que de una u otra forma han colaborado.*

A los alumnos *que participaron en las experiencias de campo y que pusieron a la disposición parte de su tiempo y su conocimiento.*

A todos mis compañeros de estudio y en especial a Jessy Marisol Alemán, *por su amistad.*

A mi Esposo, *por brindarme su amor y darme el apoyo necesario para terminar mis estudios de doctorado.*

Y, todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron con un granito de arena para que este trabajo llegara a finalizarse.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

Objetivos

Preguntas

Metodología

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

INTRODUCCIÓN

> “Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata.” (Pólya en García Cruz, 2002).

A lo largo de toda la Enseñanza Básica, los números han conformado un tema central en la Educación Matemática.

En estos últimos años, el interés de la enseñanza se ha centrado principalmente en el aprendizaje significativo, de tal forma que se logre en los estudiantes un avance para el conocimiento de nuevos objetos matemáticos.

El fuerte empuje que se ha venido dando en el mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin duda tiene que ver en la forma de cómo mostrar los objetos matemáticos y conceptos, o tal vez diríamos en cómo los alumnos pueden lograr por sí mismos construir su propio concepto o imagen del objeto matemático en juego, sin duda, hoy en día existe una oportunidad incomparable para comunicar mejor la matemática escolar.

Un aspecto muy importante del desarrollo de este tópico ha sido el trabajo permanente en relación con los diferentes aspectos y usos de los números en la vida cotidiana.

Al mismo tiempo, también ha sido fundamental promover el desarrollo de habilidades asociadas a los números y las operaciones que vayan más allá de la simple memorización y/o aplicación de reglas y definiciones.

Durante la experiencia como profesora de aula observé que los alumnos(as) del primer ciclo básico (7º grado) presentaban dificultades con la adición y sustracción de números enteros; en particular cuando tenían que realizar operaciones con números negativos.

La mayoría de los profesores de matemáticas, de ciclo y de bachillerato, se quejan a menudo de que los alumnos les llegan con graves deficiencias en las operaciones elementales que se realizan con enteros, lo que se traduce en frecuentes errores en la resolución de problemas y ejercicios.

Esto, que la mayor parte de los alumnos califican una y otra vez de despistes o errores debidos a los nervios, es en realidad una manifestación de las deficiencias que mencionábamos antes.

Todos los alumnos terminarán utilizando dichas operaciones en el futuro tanto si acceden a la universidad como si no, e incluso aunque no cursen el bachillerato. Por eso es especialmente importante que este pilar de las matemáticas quede bien asentado, ya que es junto con la expresión oral y escrita el 90% de los procedimientos con los que se van a manejar en la vida y que les permitirán acceder a otros conocimientos.

Dado que muchos alumnos, especialmente los que tienen dificultades con las matemáticas, sienten rechazo hacia las operaciones con números, trataremos de introducir y reforzar estas operaciones apoyándonos en actividades lúdicas y en el trabajo en equipo.

Los estudios acerca de la enseñanza de los números enteros han sido poco frecuentes; sin embargo, tal y como lo reseñan las investigaciones y nuestra propia experiencia como profesores, los números enteros representan una gran dificultad en la mayoría de nuestros alumnos.

El interés por investigar el conjunto de los números enteros, según Gallardo (1996), se había centrado hasta la década pasada, fundamentalmente en tres direcciones; una de ellas, como investigaciones desde una perspectiva teórica, entre las cuales destacaron los trabajos de Piaget (1960).

Otro tipo de investigaciones presentaban estudios de carácter experimental, entre los cuales se pueden mencionar los trabajos de Vergnaud (1989) y, un tercer tipo, los referidos a la enseñanza, como, por ejemplo, los trabajos de Bruno & Martinón (1996) y Ribeiro (1996).

El trabajo estará enfocado inicialmente en buscar de una u otra forma, de cómo hacer que el aprendizaje de las matemáticas sea mucho más agradable y, ante todo, más fácil para los estudiantes.

El objeto matemático que se tratará es la adición y sustracción de números enteros. Se mostrará la importancia que tiene el aprendizaje de los números enteros y las dificultades que tienen los alumnos para su aprendizaje.

Lo esencial de este proyecto es lograr en los estudiantes la comprensión de los conceptos teóricos, procedimientos, relaciones y operaciones en el caso de los números enteros (negativos y positivos), para así poder tener una buena base a la hora de llevarlos al campo práctico.

CAPÍTULO 1

1. 1 PROBLEMA

Los antecedentes analizados muestran que efectivamente hay problemas con estas operaciones en el conjunto de los números enteros, se puede citar a Eva Cid (2003) quien en su reporte de investigación llamado “la investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión” menciona algunos estudios como los siguientes: “Küchemann (1980,1981) propone a los alumnos de 14 años un cuestionario sobre suma, resta y multiplicación de número enteros.

Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que con las restas resultan ser las operaciones peor resueltas.”

Este escrito, muestra que la resta de números enteros cuando el primer término de la sustracción es positivo, alcanza un “77% y 70 % de éxito respectivamente”, y en resta cuyo primer término de la sustracción es negativo, los porcentajes de éxito son “44% y 36% respectivamente”.

“Bell (1982) en entrevistas realizadas a alumnos de 15 años, comprueba que así como el 80% suman correctamente dos números enteros, solamente el 40% es capaz de restar sin errores” “Murray (1985) examina también a alumnos de secundaria que han recibido enseñanza sobre los números enteros y obtiene que los mayores porcentajes de éxito se dan en el producto de dos números enteros (alrededor del 75% de aciertos), mientras que las restas de enteros tiene porcentaje de éxito que varían entre el 46% (8 – 3) y el 69%
(3 – 8)”. Tanto los resultados de Bell y Murray confirman, aunque parcialmente lo dicho, por Küchemann.
Con lo expuesto anteriormente se puede asegurar que efectivamente se está frente a un fenómeno didáctico y se tienen evidencias de los errores de los alumnos(as).

1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el ámbito de la educación matemática, ha resultado difícil que los estudiantes tengan habilidad para operar con números enteros. Es posible que esta dificultad surja, porque los conocimientos adquiridos en matemática en los primeros años escolares son referidos a los números naturales y en este conjunto, las palabras agregar y aumentar están relacionadas con la adición; quitar y disminuir con la sustracción.

Sin embargo, en el conjunto de los números enteros, se observa que estas palabras, aumentar o quitar, no siempre se relacionan en forma natural con la adición y sustracción respectivamente.

En ocasiones, el cálculo de una adición con números de distintos signos puede dar como resultado un número negativo, del mismo modo ocurre en la sustracción, en donde al restar dos números positivos el resultado puede ser un número negativo.

Esto se puede observar en los siguientes ejemplos de cálculo de adición y sustracción, según un estudio realizado por María Montoya Gonzales (Op.Cit) los cuales están errados, realizados por alumnos de octavo básico, quienes han estudiado previamente los números enteros y su operatoria.

a) $(-8) + (+7) = +15$

b) $(-7) - (+6) = -1$

c) $(-25) - (+21) = 4$

Si analizamos estos cálculos errados, una de las interrogantes que nos podemos formular es ¿continúan los alumnos(as) con las operaciones de los números naturales, al realizar cálculos con números enteros?

En el ejemplo (a) al parecer ignoran los signos de los números y realizan la suma de los números involucrados, en el ejemplo (b) restan los valores absolutos de los números y también a simple vista no toman en cuenta los signos de los números, lo mismo ocurre en el ejemplo (c).

CAPÍTULO 2

ASPECTOS TEÓRICOS

Cuando se comienza a enseñar matemáticas, quizás no se enfatiza la importancia del cero y de la negatividad, como elementos fundamentales en la construcción del concepto de número signado, siendo que éste es uno de los más difíciles de adquirir por los alumnos.

En este caso, señalaremos que para entender las operaciones de suma y de resta en términos de *adición* y *sustracción* de cantidades (cantidades cualesquiera), la historia de la matemática occidental se ha visto abocada a bloqueos en los mecanismos de cómputo.

Por ejemplo, si tenemos 5 podemos restar o sustraer 1, también 2, o incluso 3 ó 4. Pero al sustraer o extraer 5 ya empiezan los problemas, porque 5 el *resto* es nulo, no queda nada… pero “lo que no es, no es”, según sabemos todos y ya lo enseñaba el sabio Parménides. ¿Qué hacer entonces?

El problema se complica aún más si tenemos 5 y pretendemos seguir extrayendo aún más, por ejemplo: tengo 5 y le quiero quitar 6, ya no hay modo: la operación hace cortocircuito.

Todavía muchos matemáticos del Siglo de las Luces (XVIII), cuando un problema se traduce en una ecuación que conduce a una solución de este tipo, optaban por decidir que se trataba de un problema mal planteado, porque así planteado no tiene solución.

Siguiendo las ideas de Lizcano (1993), basta con cambiar la metáfora y el problema deja de serlo. Es lo que hicieron los primeros matemáticos chinos (muy anteriores a los que en Grecia “inventaron” las matemáticas), cuyo imaginario tradicional les llevó a situar los problemas del más y del menos bajo metáforas muy diferentes a las de *adición* y *sustracción*.

Para ese imaginario, el *yin* y el *yang* son principios opuestos y complementarios que permean todo cuanto hay, ¿por qué no iban a permear también el reino de los números?

También hay números *yin* y números *yang*, números negativos y números positivos (como lo decimos hoy nosotros).

Y estos números así entendidos, sean del color que sean los palillos con que se cuentan (los unos son negros; los otros, rojos) no se *sustraen* o *extraen* unos de otros, como si fueran piedras en un saco, sino que se *oponen* o *enfrentan* como lo harían entre sí los soldados de dos ejércitos.

Enfrentados, se van aniquilando mutuamente, cada combatiente rojo se aniquila con uno negro.

2.1 Concepto de Número

Si bien puede pensar que el concepto de número es un aprendizaje relegado a los primeros años de la educación básica, es necesario reconocer en esta idea un planteamiento equivocado.

El aprendizaje del concepto de número está presente, por lo menos, a lo largo de toda la educación básica. El aprendizaje del concepto de número está ligado al desarrollo de habilidades, destrezas y conceptualizaciones en aspectos tales como:

El conteo y las estrategias para operar a través del conteo.
Conocimiento de los múltiples usos de los números.
Comprensión del sistema de numeración decimal.
Sentido de número y estimación.

2.1.1 El conteo y las estrategias para operar a través del conteo.

Durante mucho tiempo las actividades de enseñanza del número centraron la atención en tareas sobre conservación, seriación y clasificación. Hoy en día se ha demostrado que estas actividades no mejoran la comprensión numérica de los niños, y que por el contrario, centrar el trabajo sobre el conteo y las estrategias del conteo a través de la solución de problemas sencillos, trae grandes desarrollos en los procesos de conceptualización de los alumnos.

2.1.2 Conocimiento de los múltiples usos de los números.

Los números en la vida cotidiana pueden ser usados de muchas maneras: como secuencia verbal, para contar, para cuantificar (aspecto cardinal), para medir, para marcar una posición (aspecto ordinal), para etiquetar (por ejemplo un número de teléfono o el número en la camiseta de un jugador), para marcar una locación (por ejemplo la dirección de una casa), o simplemente como una tecla para pulsar (en el caso de las calculadoras), (Lieven y Decorte, 1996).

Se trata de que la escuela genere experiencias que permitan a los alumnos conceptualizar esos aspectos, si se quiere, más cotidianos del número y que no presentan relación tan directa con los aspectos formales del número.

2.1.3 El sistema de numeración decimal.

La comprensión del sistema de numeración decimal no termina cuando el alumno, en los primeros grados de su escolaridad básica, comprende conceptualmente todos los aspectos relacionados con el valor de posición de las cifras, sino que ésta continúa cuando en los grados superiores debe entrar en el proceso de formalización de los algoritmos convencionales para las cuatro operaciones básicas (es importante recordar que no se trata de mecanizar estos algoritmos, sino de comprenderlos), pues estos no sólo se fundamentan en una muy buena

comprensión del sistema de numeración decimal, sino que permiten ampliar los niveles de conceptualización del mismo.
Pero además, cuando se trabaja sobre el cálculo mental, no como el cálculo ágil que se realiza de memoria y casi sin pensar, sino como una herramienta para desarrollar habilidades y destrezas numéricas, se continúa profundizando
en la comprensión del sistema de numeración decimal.

2.1.4 El sentido numérico

Con respecto al desarrollo del sentido numérico (o mejor aún, del pensamiento numérico), es innegable que su aprendizaje se inicia con los primeros años de la escolaridad, pues desde esos inicios el niño se ve enfrentado a actividades que le generarán sus primeras intuiciones formales sobre el número
(primeras intuiciones formales por que, en su vida extraescolar el niño se ve enfrentado a múltiples situaciones a través de las cuales genera intuiciones sobre el número de manera informal).

Estas intuiciones se transformarán en los aprendizajes básicos sobre este: el contar, el calcular, la numeración escrita, el sentido, significado y uso de los números, la solución de problemas, etc.
Pero con estos aprendizajes básicos de sus primeros años de escolaridad no termina el desarrollo del sentido numérico. Este se hará más profundo en la medida que se disponga de nuevas herramientas matemáticas para pensar y representarse más significativamente los números.

2.1.4 Trascender los números naturales

La comprensión del número no termina con un buen dominio de los números naturales. Ésta se amplía a medida que se realizan conceptualizaciones sobre los demás sistemas de numeración.

Pero en contraste, es una realidad, no sólo de nuestro sistema educativo sino de muchas partes del mundo, que a pesar de la gran cantidad de tiempo que se dedica en la escuela a la enseñanza de las reglas y algoritmos para operar con

los números naturales, enteros, con las fracciones, con decimales, etc., al finalizar el período escolar la gran mayoría de los alumnos demuestran un bajo nivel de conceptualización a propósito de estos temas.
Pero además, y mucho más complejo aún, es que muchos de los aprendizajes realizados a propósito de un determinado sistema numérico, como por ejemplo, los números naturales, pueden llegar a ser obstáculo para el aprendizaje de cuestiones relativas, a otros sistemas numéricos, como por ejemplo, los números enteros.

Así pues, el aprendizaje del número no sólo se realiza a lo largo de toda la educación básica, sino que debe sufrir profundas transformaciones a fin de lograr que estos aprendizajes puedan realizarse en un cuerpo coherente de conocimientos, que permita alcanzar aprendizajes duraderos, y hacer explícitos los obstáculos conceptuales que se dan al pasar de un sistema de numeración a otro.

2.2 Pensamiento numérico

Tal como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional en su documento sobre los lineamientos curriculares en el área de matemáticas, el desarrollo de Pensamiento Numérico es el nuevo énfasis sobre el cual debe realizarse el estudio de los Sistemas Numéricos.

La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de las propiedades numéricas.

Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante cuando se reflexiona sobre las respuestas.
Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si

los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables.

> *El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático, María Gonzales (2006).*

En particular, es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos.

Según McIntosh, (1992), el pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones

2.3 Sentido y significado de las cuatro operaciones básicas

Tradicionalmente al aprendizaje de las cuatro operaciones básicas se destina una buena parte de los cuatro primeros años de la educación básica.

Pero además, este aprendizaje prácticamente está reducido al aprendizaje de los algoritmos convencionales y a la aplicación de estos algoritmos a la solución de problemas típicos, clasificados según la operación que se esté estudiando en el momento.

El trabajo así realizado, no permite a los alumnos desarrollar habilidades y destrezas en el cálculo mental, en la comprensión y la solución de problemas, en la comprensión misma del sentido y significado de las operaciones.
Por ejemplo, los alumnos ante la solución de un problema, generalmente le preguntan al maestro(a) '¿la operación que hay que hacer es una suma o una resta?'.

Una vez que el alumno obtiene la respuesta resuelve correctamente el problema. Este tipo de situaciones pone en evidencia que los alumnos no comprenden el sentido y significado de las operaciones sumar y restar, quizás tan sólo saben los algoritmos convencionales para calcular los resultados.

Es más, situándose en una posición extrema se podría decir que estos alumnos, no saben las operaciones sumar o restar, tan solo saben un método para calcular los resultados de hacer estas operaciones: los algoritmos convencionales.

Se hace necesaria la distinción entre la operación y el cálculo. La operación comporta ante todo el aspecto conceptual ligado a la comprensión del sentido y significado matemático y práctico de las operaciones; mientras que por su parte el cálculo está ligado a las distintas maneras que pueden existir para encontrar un resultado, entre las cuales se pueden destacar:

Los algoritmos convencionales y los no convencionales, el cálculo mental, la utilización de una calculadora, de un ábaco, etc.

Además los aspectos básicos que según varios investigadores (por ejemplo, NTCM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntoh, 1992) se pueden tener en cuenta para construir el significado de las operaciones y que pueden dar pautas para orientar el aprendizaje de cada operación tiene que ver con el reconocimiento del significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen:

1. Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones;
2. Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;
3. Reconocer el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellos que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio.
Por ejemplo, las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que trabajan simultáneamente con la idea de número.

Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones en donde el niño describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, en una segunda etapa está abstrayendo las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos haciendo uso de diversos esquemas o ilustraciones con los cuales se está dando un paso hacia la expresión de las operaciones a través de modelos. (Gallardo, 2006).

En consonancia con lo anterior, la teoría de los campos conceptuales del profesor Gerard Vergnaud (1993), permite ver de manera coherente y organizada la compleja estructura conceptual que se teje detrás de las estructuras aditivas (situaciones relacionadas con la adición o la resta) y de las estructuras multiplicativas (situaciones relacionadas con la multiplicación o la división).

2.4 Las dualidades de la negatividad y el cero en la transición de la aritmética al algebra

Actualmente el cero y los números negativos son temas del currículo escolar, generalmente tratados sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros y alcanzar una competencia en el manejo del lenguaje algebraico.

Piaget (1960), afirma que constituye uno de los grandes descubrimientos de la historia de las matemáticas, el hecho de haber convertido al cero y a los negativos, en números.

Entre los investigadores que han estudiado los números negativos y el cero en el campo de la Educación Matemática se encuentran los siguientes: Freudenthal (1973); Glaeser (1981), Bell (1982, 1986), Janvier (1985), Fischbein (1987), Resnick (1989), Vergnaud (1989) entre otros.

Estos trabajos, mostraron las dificultades extremas presentadas por los estudiantes en la conceptualización y la operatividad de los números negativos en el ámbito pre-algebraico y algebraico.

Es relevante manifestar que estas dificultades continúan a niveles superiores de escolaridad (Gallardo, Torres, 2005). El análisis de este tema, fundamental para la educación matemática, continua vigente hasta nuestros días.

Una investigación previa al estudio aquí presentado es el trabajo de Gallardo (2002), donde se mostró que en el proceso de transición de la aritmética al álgebra en los estudiantes de secundaria, cobra una importancia fundamental el análisis de la construcción de los números negativos, cuando los estudiantes se enfrentan con ecuaciones y problemas que tienen números negativos como coeficientes, en constantes o soluciones.

Gallardo (2002) encontró cinco niveles de aceptación de números negativos, evidenciados y abstraídos de un análisis histórico – epistemológico y a la vez de un estudio empírico con 35 alumnos de 12-13 años de edad.

Estos niveles son lo siguientes: <u>Sustraendo</u>, donde la noción de número se subordina a la magnitud (en a-b, a siempre es mayor que b donde a y b son números naturales); <u>Número signado,</u> donde un signo menos es asociado a una cantidad y no tiene significado adicional a otras condiciones; <u>El número relativo,</u> dónde la idea de cantidades opuestas está en el dominio discreto y la idea de simetría se pone evidente en el dominio continuo; <u>El número aislado,</u> es el resultado de una operación o la solución a un problema o ecuación;
<u>El número negativo formal,</u> noción matemática de número negativo, dentro del cual hay concepto general de número que contempla los números positivos y

negativos (los enteros de hoy). Este nivel normalmente no se alcanza por el estudiante 12-13 años de edad.

En Gallardo y Hernández (2005), se encontró que durante la transición de la aritmética al álgebra, estudiantes de secundaria, identificaban la dualidad del cero (nulidad – totalidad) y la dualidad del signo menos (unario – binario) en las tareas planteadas.

En Gallardo y Hernández (2006), emergen cinco significados del cero en la resolución de tareas aritmético – algebraicas. Estos son: el cero nulo, el cero implícito, el cero total, el cero aritmético y el cero algebraico.

En Gallardo y Hernández (2007), se encontró que los estudiantes de secundaria manifiestan otros significados del cero cuando resuelven adiciones y sustracciones de negativos haciendo uso de la recta numérica. El significado del cero origen surgió en tres situaciones:

1) Como punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica.
2) Como punto móvil arbitrario que cambia de ubicación.
3) Como punto fijo inamovible, esto es, el punto medio de la recta numérica.

Así mismo, surgió el evitamiento del cero origen cuando: 4) fue simbolizado pero ignorado al llevar a cabo las operaciones y 5) no fue simbolizado siquiera.

Estos significados surgieron en forma simultánea a los niveles de conceptualización de los negativos encontrados por Gallardo (2002).

Gallardo (opcit.), identifica en entrevista videograbadas realizadas a estudiantes, los distintos significados e interpretaciones que le dan al cero continuación.

Cero nulo: es aquel que “no tiene valor”, “es como si no estuviera” afirmó el estudiante. El cero nulo convive con el número negativo como sustraendo. Solamente el signo binario es reconocido.

Cero implícito: es aquel que no aparece escrito, pero que es utilizado durante el proceso de resolución de la tarea. El cero implícito convive con la dualidad del signo menos: unario y binario.

Cero total: es aquel que está formado por números opuestos (+n, –n). El cero convive con el número relativo y la dualidad del signo menos.

Cero aritmético: es aquel que surge como el resultado de una operación aritmética. Este cero surge simultáneamente al número negativo como sustraendo.

Cero algebraico: es aquel que emerge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación. Este cero convive con el número negativo como sustraendo, como número relativo y con el doble significado del signo menos.

2.5 Los números enteros, su enseñanza y aprendizaje

En el sistema de los números naturales ecuaciones del tipo X + 1 = 0, no tienen solución, así como otras situaciones de la vida real como, deudas, depresiones del terreno, nivel bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, que no es posible representarlas con tales números.

Surge así la necesidad de extender el sistema de los números naturales a un nuevo sistema en el que tales ecuaciones y situaciones sean posibles. Surge así, un nuevo conjunto que se denomina los números enteros.

A pesar de esta realidad, se considera que las investigaciones a los procesos de enseñanza, aprendizaje y conceptualización de los números enteros resultan necesarias.

Los griegos utilizaron reglas parecidas a las que usamos actualmente para realizar operaciones aritméticas con magnitudes negativas en sus demostraciones geométricas.

Sin embargo, corresponde a los hindúes el mérito de transformar esas pautas en reglas numéricas aplicables a los números positivos, negativos y cero, hacia el año 650 d. C.

Los árabes no usaron los números negativos y los consideraban como restas indicadas. A partir del siglo XV, algunos matemáticos muy conocidos comenzaron a utilizarlos en sus trabajos.

Michael Stifel (1485-1567), popularizó los signos + y **-** y llamaba a los números negativos, números absurdos, hasta entonces se utilizaba la palabra latina minus que significa menos, o su abreviatura m.

Entre los trabajos que hablan sobre **las dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos,** tenemos los siguientes:

Tanto Brooks (1969) como Cable (1971), señalan el hecho de que en el modelo de la recta numérica, los números enteros tan pronto se representan por puntos, como por desplazamientos, como por factores escalares, dando lugar a que la suma y el producto de enteros se interpreten en términos de operaciones externas.

Más recientemente, diversos autores (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1994; Car y Maternas, 1984; Ernesto, 1985; Küchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta numérica.

Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de la operación como puntos aislados en la recta, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

Bruno (1996) en su artículo "**Procedimiento de Resolución Problemas aditivo con Números Negativos"** pone de manifiesto que los alumnos usan dos estrategias básicas para resolver problemas, la recta y las operaciones, pero no se emplean siempre de la misma forma. Hay una cierta desconexión entre la resolución de problemas utilizando las operaciones y la recta.

Hay mayor facilidad y seguridad para resolver los problemas utilizando la recta que con operaciones. Además, en la parte contextual, los alumnos tienen fuertemente arraigada la idea de que un problema de sumar es «añadir», «ganar», mientras que restar significa lo contrario: «quitar», «perder». Ahora ambas ideas confunden a los alumnos, parece así una doble forma de expresar las situaciones numéricas y resulta básica la integración de las dos ideas contrapuestas de sumar y restar, propias de los números positivos, en una única idea de adición de números (Bruno y Martinón, 1996).

Lytle (1994) dice que en el modelo de fichas de dos colores surgen dificultades de interpretación de la resta de números enteros; Gallardo (1994) refleja esa misma dificultad al hacer experiencias de enseñanza con dicho modelo y añade que se producen confusiones entre las estructuras aditiva y multiplicativa de Z.

Además, Bell (1982) analiza las estrategias utilizadas por los alumnos para efectuar las operaciones de enteros, comprobando que, sobre todo, usan razonamientos basados en la recta numérica o la idea de "cantidades menos que cero".

En el caso de la suma, un procedimiento bastante utilizado consiste en determinar, en la recta numérica, el punto que corresponde al primer sumando y a partir de ahí contar tantas unidades como indica el segundo sumando, hacia la derecha o la izquierda según que éste sea positivo o negativo.

Además Bell (Op.Cit,), considera que los alumnos no están acostumbrados a interpretar la resta entre números positivos como diferencia (resultados de una comparación) sino, más bien, como la acción de quitar al sustraendo al minuendo.

2.6 La investigación sobre la epistemología de los números negativos

La epistemología de los números negativos fue tomado del artículo "Diseño de un modelo Epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico" (Eva Cid).

Dicho artículo nos muestra que la epistemología de los números negativos, su razón de ser, no proviene de unas supuestas magnitudes opuestas o relativas definidas en el ámbito de la aritmética, sino del ámbito del álgebra, hecho que ya fue reseñado en su momento por Chevallard (1988,1989).

La razón por la cual Diofanto se ve precisado a enunciar la regla de los signos tiene que ver con las peculiaridades del cálculo algebraico.

En aritmética toda operación correctamente planteada puede efectuarse, cosa que no sucede en álgebra desde el momento en que intervienen cantidades desconocidas.

Esto tiene como consecuencia que los términos de las operaciones no son sólo números, como sucede en aritmética, sino también operaciones indicadas. Por ejemplo, la gestión de la expresión algebraica (a – 5) – (b – 3) exige conocer las propiedades de las diferencias de diferencias.

Es decir, el cálculo algebraico obliga a definir y manejar operaciones entre operaciones lo que conduce rápidamente, por razones de economía de justificación, a la gestión de las operaciones entre sumandos y sustraendos.

Además, la descontextualización propia de dicho cálculo impone una sintaxis exhaustiva y minuciosa que tenga en cuenta todos los aspectos formales.
Esto plantea dudas respecto a la oportunidad de introducir los números negativos en el ámbito aritmético.
La resolución aritmética de un problema se caracteriza por ser un procedimiento fuertemente contextualizado y en el que todas las operaciones que se proponen son efectuables.

En todo momento se trabaja con números a los que se atribuye un significado como medidas y las decisiones sobre la secuencia de operaciones aritméticas que resuelve el problema se toma en función de esos significados, lo que hace innecesario simbolizar algebraicamente el “sentido” de las cantidades de magnitud.

Los problemas que se presentan a los alumnos para justificar la necesidad de usar los números negativos suelen tener una resolución perfectamente válida en el campo de los números positivos, incluso mucho más sencilla.

La razón de ser de los números con signo no puede encontrarse en un ámbito, con el aritmético, donde la permanente contextualización numérica y la fragmentación de la secuencia de operaciones a realizar hacen innecesario todo simbolismo más allá de la representación numérica y de sus algoritmos de cálculo.

Por otro lado, el que se definan reglas de cálculo para sumandos y sustraendos no significa que estos objetos tengan que ser considerados números.

Desde la época de Diofanto hasta principios del siglo XIX, la comunidad matemática no tuvo inconveniente en aceptar los sustraendos como elementos intermedios de cálculo, pero sí tuvo grandes dificultades para asumirlos como soluciones de las ecuaciones, a pesar de que el desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas y, más adelante, la geometría analítica, hicieron casi indispensable su aceptación.

Estos hechos han llevado a diversos autores (Glaeser, 1981; Brousseau; 1983; Schubring, 1986; Cid, 2000, entre otros) a plantearse que la concepción del número como medida, propia de la matemática anterior al siglo XIX, fue un obstáculo epistemológico que impidió durante muchos siglos la consideración como números de los sumandos y sustraendos.

Es decir, fue la creencia en que el concepto de número tiene su fundamento en la medida de las cantidades de magnitud y, por consiguiente, un objeto matemático sólo puede adquirir el estatuto de número si admite una interpretación en términos de medida, la que, al parecer, obstaculizó históricamente la aceptación de los números negativos.

En este proceso histórico parece posible delimitar dos etapas (Brousseau, 1983; Cid, 2000): en una primera etapa, la imposibilidad de dar una interpretación de los sustraendos como medidas impidió que pudiesen ser considerados números; en una segunda etapa, la consideración de las magnitudes opuestas y relativas permitió interpretar los sustraendos como medidas, lo que favoreció su aceptación como números, pero obstaculizó la justificación de su estructura multiplicativa y ordinal.

2.7 Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números negativos

La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938), fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en términos de la teoría de situaciones didácticas.

En dicha teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación.

El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución.
La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada.

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1980, 1981, 1983, 1988, 1989a, 1989b).

Entre ellas figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se sitúe en uno u otro de los polos del sistema didáctico -alumno, profesor y saber o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural.
En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo.

En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. Por otro lado, Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción.

Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente:

Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor.

No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

2.7.1 La aportación de Glaeser

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser publicado en 1981.

En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos.

Para ello, y haciéndose eco de la "sorprendente lentitud" del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo, busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado, analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas dijeron sobre dichos números.

Ahora bien, aun cuando Glaeser empieza su artículo refiriéndose a la noción de obstáculo en Bachelard y Brousseau, enseguida aclara que considera prematuro precisar demasiado el término 'obstáculo' y que lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a 'dificultad', 'umbral', 'síntoma', etc.

En estas condiciones, el autor considera que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.*
Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de lossignos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.*
En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.*
En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta.
Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto.

Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

La ambigüedad de los dos ceros*.* Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente.

Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada".

-*El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.*
La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa.

El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de R+ a R respetando un principio de permanencia que conservará determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema:

-Deseo de un modelo unificador.
Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos.

Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales.
Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

2.7.2 Obstáculos epistemológicos en los números negativos, otras aportaciones

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstáculos epistemológicos en los números negativos.

Entre ellos, Duroux (1982) hace hincapié en que la definición de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento.

Teniendo esto en cuenta, Duroux considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser: la “falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas” y la “dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas”, no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento.

Sin embargo, la “dificultad para unificar la recta real”, puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos.

Añade, además, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción trasmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideración de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida “a la inversa”, como un objeto compuesto de dos partes:
el signo − y una medida, mientras que el positivo representa, sin más, una medida.

Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un “obstáculo” y una “dificultad”, sugiriendo que lo que propone Glaeser son “dificultades” que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos “obstáculos”:

Muy a menudo, es entre las “dificultades” donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un **obstáculo es un conocimiento**, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la “dificultad” que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto...). (Brousseau, 1983, p. 190)

Pero además es necesario establecer, no sólo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz: Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus éxitos. (Brousseau, 1983, p. 192)

En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de esas dificultades, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de "positivo" o "negativo" a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación.

Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente.

Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción.

Así pues, el carácter "relativo" de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retoma la propuesta de Duroux, respecto a que la concepción de los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos pudo ser un obstáculo a la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusión en una única clase: la de los enteros, pero advierte de que, tanto la "relatividad de positivos y negativos" como "la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales", son sólo candidatos a obstáculo y que su aceptación como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron.

Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstáculo todavía más antiguo: "la concepción del número como medida", es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

Schubring (1986, 1988) realiza un trabajo parecido al de Glaeser, pero analizando, sobre todo, textos escritos por matemáticos alemanes.

A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, recurre también al término ‘obstáculo’, pero con un sentido distinto al usado por los autores anteriores.

Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

2.7.3 Obstáculos internos a las matemáticas

Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de cantidad, pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de número.
A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de textos matemáticos franceses.

Según él, se trata de un fenómeno localizado que no puede extenderse a otros países como, por ejemplo, Alemania, donde un desarrollo temprano del concepto de número, separado de los de cantidad y magnitud, evitó parte de las dificultades observadas en el país vecino.

2.7.3.1 Obstáculos epistemológicos

Considera como tales, los que se refieren a: Las epistemologías subyacentes a la trasmisión del saber científico a la sociedad en general.

Por “epistemología” se puede entender las concepciones sobre las condiciones de “existencia” de las entidades matemáticas.

Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:

Una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
Una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos.

Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de ‘obstáculo epistemológico’, mientras que el segundo le llama ‘estancamiento en el periodo de las operaciones concretas.

Arquitectura de las matemáticas*.* Se refiere con esto a una tercera categoría de obstáculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría.

El hecho de que las dos tengan igual importancia favorece a nociones, como la de cantidad, integradoras de los dos ámbitos, lo que perjudica el proceso de diferenciación entre número y cantidad; si se considera a la geometría como la rama más importante de las matemáticas, la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas y la de número es una noción subsidiaria; por último, si es el álgebra la disciplina fundamental y la geometría un campo de aplicación del álgebra, se tiene entonces la concepción que sostuvo el proceso llamado de ‘aritmetización de las matemáticas’ con el número como noción básica.

Schubring (Op.Cit.) considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la arquitectura de las matemáticas.

Es evidente que la concepción de obstáculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau.

Parece que Schubring entiende por obstáculos ciertos conocimientos meta-matemáticos que son, según él, las causas últimas de las rupturas observadas en el proceso de evolución del estatuto matemático de ciertas nociones; rupturas que, por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen.

Únicamente en la primera categoría de obstáculos que propone, los “obstáculos internos”, hace referencia a conocimientos propiamente matemáticos y no de epistemología de las matemáticas, pero enseguida añade que esta categoría no parece haber sido la causa principal de las rupturas e, incluso, parece haber contribuido al lento progreso del estatuto matemático del número negativo, dejando en manos de las otras dos categorías: los “obstáculos epistemológicos” y la “arquitectura de las matemáticas”, la responsabilidad de las tales rupturas.

Por otro lado, Brousseau califica de “epistemológicos” a los obstáculos encontrados en la enseñanza de las matemáticas si se constata que en alguna época histórica la comunidad matemática tuvo que franquear ese mismo obstáculo y las huellas de ese hecho pueden encontrarse en el discurso matemático actual.

Sin embargo, Schubring utiliza dicho calificativo para referirse, como ya hemos dicho, a ciertas concepciones filosóficas sobre las condiciones de existencia de los objetos matemáticos que, a su juicio, impregnan los procesos de transmisión del saber matemático a la sociedad.

Todo esto nos permite constatar que la discusión sobre los obstáculos epistemológicos en los números negativos tiene una dimensión más profunda: la discrepancia sobre la naturaleza y utilidad de la noción de obstáculo epistemológico en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

En conclusión aun cuando la polémica de la que hemos dado cuenta en los apartados anteriores se produjo hace ya muchos años, no ha habido desde entonces ninguna contribución importante al tema. De hecho, la situación en el momento actual podría resumirse en los siguientes términos:

La noción de obstáculo epistemológico ha seguido recibiendo interpretaciones diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau (Sierpinska, 1989; Artigue, 1990; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), mientras que en otros casos se ha sustituido por nociones consideradas más apropiadas (Léonard y Sackur, 1990).

Sin embargo, el obstáculo epistemológico tal como lo concibe Brousseau no ha sido contrastado experimentalmente la mayor parte de los investigadores que lo han utilizado lo han hecho dándole un significado distinto del propuesto por él, ni tampoco se han hecho objeciones que justifiquen su abandono o sustitución por otro concepto.

La propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los Números negativos a tener en cuenta en la enseñanza actual, al margen de las críticas ya comentadas, no ha vuelto a discutirse.

Los trabajos posteriores sobre epistemología del número negativo, o bien no se expresan en términos de obstáculos, o bien hacen una utilización ambigua del término en la que caben sinónimos como ‘dificultad’, ‘ruptura’, etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring, pero sin aportar pruebas que justifiquen su postura.

Por consiguiente, en estos momentos no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstáculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son estos, supuesto que existan.

Únicamente Coquin-Viennot (1985) e Iriarte et al. (1991) analizan los errores de los alumnos en términos de obstáculos: la primera usando el concepto propuesto por Brousseau y las segundas dándole un sentido parecido al de Glaeser.
Pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior.

Otros investigadores como Peled (1991) o Gallardo (1996) intentan también encontrar una coherencia en los errores de los alumnos que los acerca a la búsqueda de concepciones, pero sin tener en cuenta la posibilidad de los obstáculos.

Las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que una introducción de los mismos o, más en particular, de los números enteros, por medio de modelos concretos, que es la opción más elegida hoy en día, puede resultar poco conveniente.

Para empezar, no sólo es evidente que, aun cuando dichos modelos justifican satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto, sino que hay que afrontar la posibilidad, comentada entre otros, por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) y Gobin et al. (1996), de que dichos modelos sean incluso un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros.

Sin embargo, la posibilidad de que los modelos concretos resulten ser un obstáculo didáctico o contribuyan a reforzar un obstáculo epistemológico tampoco ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos concretos, se olvida o desconoce dicha posibilidad.

2.8 Representación

El reconocimiento del papel fundamental que la representación juega en la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas ha sido objeto de estudio y reflexión intensa en los últimos 40 años. Esto ha hecho que en los últimos tiempos se incrementen las publicaciones e investigaciones sobre representación en matemáticas. Esto lo podemos evidenciar con los trabajos de: Carpenter y Hiebert (1992), Castro Enc. (1995), Cifarelli (1998), Duval (1998), Fernánde z (1997), Filloy y Rubio (1999), Goldin (1998), Hitt (2001), Hitt (2003), Hitt (2006), Hitt (2008), Janvier (1987), Kaput (1989, 1992), Rico (2000), Ruiz (2000), Stacey y Mac Gregor (2000).

2.8.1 Concepto de representación

Entenderemos por **representación** el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, (Espinosa, 2005).

Hay que destacar, también, la idea de que las representaciones no están aisladas, sino que se articulan en sistemas estructurados (Rico, 2000). Además, sabemos que el uso de la representación facilita el proceso de aprendizaje (Boulton, 1998). Las representaciones mentales han sido usadas por Cifarelli (1998), **"para describir el proceso de resolución de problemas en matemáticas, ya que la investigación sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática"** (p. 239*).* Duval considera, que la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es a través de las representaciones.

Fernando Hitt (1998) menciona al respecto; "El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de lograr articular sin condición alguna diferentes representaciones del mismo objeto, así como el de recurrir a ellas, las representaciones, en forma espontánea durante la resolución de problemas".

La investigación estará enmarcada en los aportes de Hitt, (2003, 2006, 2008), realizando especial énfasis en el carácter **funcional de las representaciones** con el fin de comprender su papel en el proceso de aprendizaje, considerando la representación mental “totalmente articulada” a la representación semiótica producida por el individuo en la construcción de un concepto o en la resolución de un problema.

Hitt realiza la siguiente clasificación de las representaciones:
Representación funcional definiéndola como la espontánea representación que un estudiante usa en una situación matemática.

Por otro lado, el nombre de representación institucional, las cuales se encuentran en libros o en las pantallas de ordenador, o son utilizadas por los profesores cuando explican a los estudiantes en la pizarra.

1. En el pasado, los investigadores implícitamente dieron mayor importancia a la representación institucional (las que se encuentran en los libros de texto, las dadas por el profesor, etc.).

2. Recientemente, desde 2005 en relación con situaciones matemáticas en la escuela secundaria, se ha encontrado que los estudiantes pueden producir las representaciones espontáneas ayudándoles a resolver problemas.

2.9 Modelos de Enseñanza

Abraham Hernández y Aurora Gallardo citan en su artículo “La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía el modelo concreto de bloques” (2002), a los Investigadores H. Freudenthal (1973); G. Glaeser (1981); A. Bell (1982); C. Janvier (1985); E. Fischbein (1987); G. Vergnaud (1989);

A. Bruno y A. Martinón (1994); A. Gallardo (2002), y J. Vlassis (2001 y 2002), entre otros, han propuesto y utilizado modelos de enseñanza para la introducción de los números negativos en el aula. Algunos de ellos han preferido los modelos puramente sintácticos y otros han recurrido primero a los modelos concretos.
Las investigaciones mencionadas nos permiten afirmar que, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los enteros de nivel escolar elemental, es necesario recurrir a modelos.

La enseñanza prosigue la búsqueda del buen modelo, ya que los autores de libros de texto continúan introduciendo nuevas versiones, pues se ha visto que el dominio del tema en un nivel sintáctico no asegura necesariamente que el maestro podrá diseñar una introducción a una problemática que sea comprensible para los estudiantes; la explicación formal no es suficiente para ellos.

De la misma manera que les encontraron sentido a los números naturales, los estudiantes desearían vincular cosas de la realidad al nuevo concepto de número signado y modelar las nuevas operaciones de algún modo concreto.

Las propuestas que hablan sobre el uso de modelos concretos para enseñar los números enteros es inagotable. Janvier (1983), propone una clasificación en la que distingue tres tipos de modelo: el del equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido.

Esta clasificación ha sido parcialmente modificada por Cid (2002) que no tiene en cuenta el modelo híbrido por considerar que los ejemplos existentes pueden también incluirse en una de las otras dos clases y prefiere llamar “modelo de neutralización” al modelo del equilibrio definido por Janvier porque entiende que dicho nombre refleja mejor la idea central de este tipo de modelos.

Si embargo Bell (1982), sigue convencido de que a través de dichos modelos es como debe introducirse los números enteros.
Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto estatus familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucho más

experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran. Bell (1986, Pág. 199)

Entre los trabajos que hablan sobre **las dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos,** tenemos los siguientes:

Tanto Brooks (1969) como Cable (1971), señalan el hecho de que en el modelo de la recta numérica, los números enteros tan pronto se representan por puntos, como por desplazamientos, como por factores escalares, dando lugar a que la suma y el producto de enteros se interpreten en términos de operaciones externas.

Más recientemente, diversos autores (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1994; Car y Maternas, 1984; Ernesto, 1985; Küchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta numérica. Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de la operación como puntos aislados en la recta, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

2.9.1 Crítica a los Modelos de Enseñanza

Existen dos tipos de críticas: las de los que creen que no deberían utilizarse modelos concretos en la introducción escolar de los números enteros y las de los que critican algún modelo sin poner en duda la necesidad de usarlos.

Respecto a estas últimas, uno de los modelos más criticados es el de la **recta numérica**, a pesar de que es el más utilizado en la enseñanza.

Tanto Brookes (1969) como Cable (1971) ya señalan el hecho de que en ese modelo los números enteros tan pronto se representan por puntos, como por desplazamientos, como por factores escalares, dando lugar a que la suma y el producto de enteros se interpreten en términos de operaciones externas.

Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de la operación como puntos aislados en la recta, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

También existen referencias a las dificultades de los alumnos en el uso de otros **modelos concretos**: Lytle (1994) dice que en el modelo de fichas de dos colores surgen dificultades de interpretación de la resta de números enteros; Gallardo (1994) refleja esa misma dificultad al hacer experiencias de enseñanza con dicho modelo y añade que se producen confusiones entre las estructuras aditiva y multiplicativa de **Z**.

También Bell (1986) muestra que hay niños que no saben dibujar correctamente la escala de un **termómetro**, que cuando tienen que calcular la diferencia entre dos temperaturas efectúan siempre una resta independientemente de los signos de las mismas, que no interpretan adecuadamente la expresión “más abajo” o “más arriba” para calcular la posición de un disco en la “lista de los cuarenta principales” a partir de una primera posición, etc.

Freudenthal, (1993, pp. 279 -289), comenta que, en los inicios de la enseñanza de los conceptos numéricos, es pertinente la utilización de estos modelos (‘método intuitivo’), pero que este tipo de enseñanza no se puede prolongar indefinidamente, pues a la larga la intuición puede convertirse en un obstáculo para el alumno.

También Brown (1969) se muestra contrario al uso de modelos en general, diciendo que normalmente éstos no son isomorfos al sistema numérico que modelizán lo que implica que determinados teoremas que se cumplen en el modelo pueden no ser válidos en el sistema, creando la consiguiente confusión en los alumnos.

Últimamente, en Cid (2002) se discute también la pertinencia de una introducción de los números enteros por medio de modelos concretos por dos razones.

La primera es que en la enseñanza de la aritmética elemental el proceso de modelización matemática se invierte: mientras en el ámbito científico lo habitual es que el objeto de estudio sea un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible modelizado por medio de un sistema matemático, en el ámbito de la enseñanza el objeto de estudio es una noción aritmética que se modeliza por medio de un sistema físico o social con el que los alumnos se supone que están familiarizados.

Además, el modelo funciona por analogía, es decir, permite obtener conocimiento sobre la noción matemática porque “se parece a ella” o “funciona como ella”.

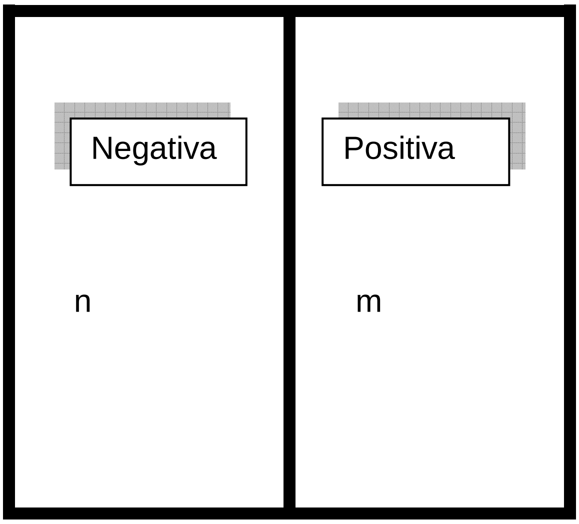
2.9.2 Modelo Operatorio de Fichas en el Plano

El modelo que se presenta es propuesto por Francisco Rivero Mendoza del Departamento de matemáticas Facultad de Ciencias Universidad de Los Andes en su artículo “Una Representación Semiótica para construir los Números Enteros”. Para su implementación se requiere de un pedazo de cartulina de forma rectangular, para construir un tablero, y unas fichas o monedas. En este modelo se considera a un número entero, como una resta de dos números naturales (minuendo y sustraendo).

$$\mathbf{m- n}$$

donde la diferencia carece de sentido, en el contexto de los números naturales si **n** es mayor o igual a **m**. En tal sentido, un número entero se puede considerar como un par de números naturales: una positiva y otra negativa, dadas por **m** y **n** respectivamente.

Para dar una representación de dicho número, comenzamos por dividir el tablero en dos partes iguales, por medio de una línea vertical. Obtendremos así dos zonas de igual tamaño. La del lado derecho será llamada positiva y la del izquierdo será llamada negativa. Ver la figura



En vez de escribir los números sobre el tablero, usaremos fichas del mismo color e igual tamaño, para representarlos.

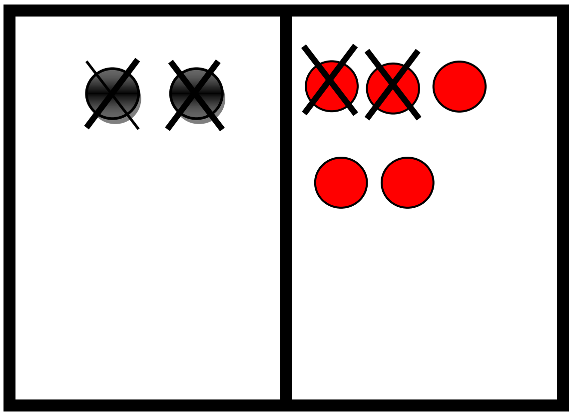
Reglas para el uso del modelo

A continuación damos una serie de reglas que permiten utilizar este modelo para las operaciones de suma y resta de números enteros, y la resolución de ecuaciones lineales.

Es recomendable en una primera etapa, trabajar con pocas fichas, para que el estudiante se familiarice con el uso del modelo.

Principio de cancelación

Ya hemos visto que todo número entero se representa mediante un conjunto de fichas en ambos lados del tablero. Pues bien, de ahora en adelante se pueden cancelar fichas del lado positivo con las del lado negativo, una a una. De esta manera tendremos al final fichas en un solo lado, o bien ausencia de fichas.



Representación de los números enteros

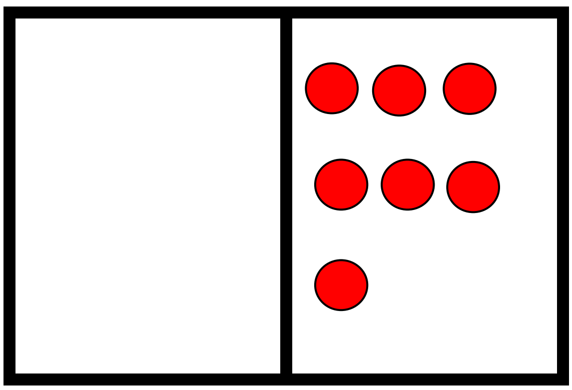
Una vez establecido el principio de cancelación entre las fichas, podemos hacer la identificación entre números enteros y fichas. De acuerdo a la disposición de las fichas en el tablero, se tienen tres tipos de números enteros:

a) ***Enteros positivos****,* que se representan con fichas del lado derecho

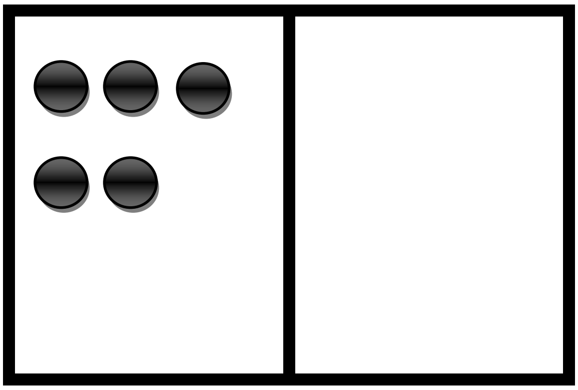
b) ***Enteros negativos***, que se representan con fichas del lado izquierdo

c) ***El cero*** que se representa mediante la ausencia de fichas.

Por ejemplo el número entero 7 se puede representar como



El entero -5 se representa



Suma de números enteros

La suma de enteros se hace por medio de un simple algoritmo de acumulación de fichas, teniendo en cuenta la posición de las mismas, a la derecha o izquierda de la raya central.

I) Sumandos con el mismo signo.
Se debe realizar usando el siguiente algoritmo:

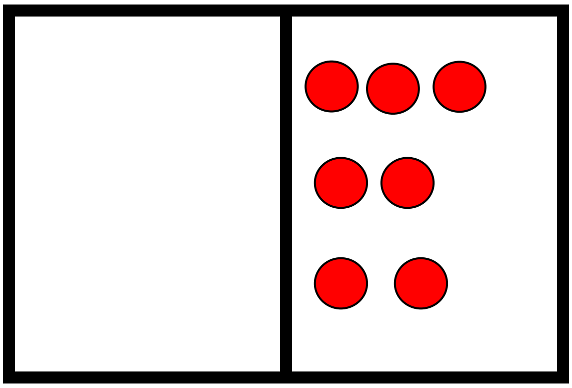
Cuando se suman enteros del mismo signo, se acumulan las fichas en cada lado correspondiente a dichos números.
Por ejemplo si se quiere sumar 3 + 4 entonces se deben realizar los pasos siguientes:

1) Se colocan 3 fichas del lado derecho.

2) Se colocan 4 fichas del lado derecho.

3) Se acumulan las fichas, para obtener 7 fichas en total en el lado derecho y ninguna en el lado izquierdo.

4) El resultado es 7.



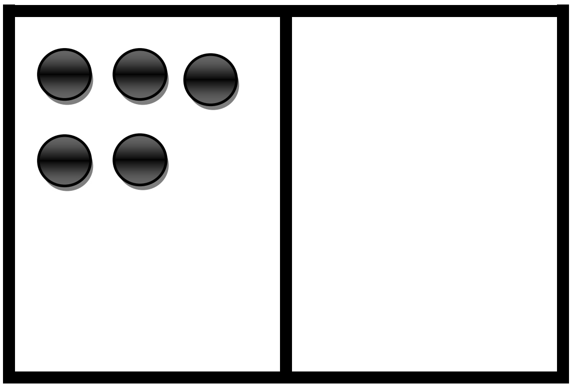
Se quiere sumar -3 + (-2) se procede de la manera siguiente:

1) Se colocan 3 fichas del lado izquierdo.

2) Se colocan 2 fichas del lado izquierdo.

3) Se acumulan las fichas, para tener 5 del lado izquierdo y ninguna del lado derecho.

4) El resultado es -5.



II) Sumandos con signos opuestos

La suma de dos números enteros de distinto signo, se hace repitiendo los mismos pasos que en el caso anterior, pero posteriormente se debe aplicar el principio de cancelación.

Cuando se suman enteros de distinto signo se colocan fichas a ambos lados del tablero

Por ejemplo, si queremos sumar 3 + (-4), procedemos de la siguiente forma:

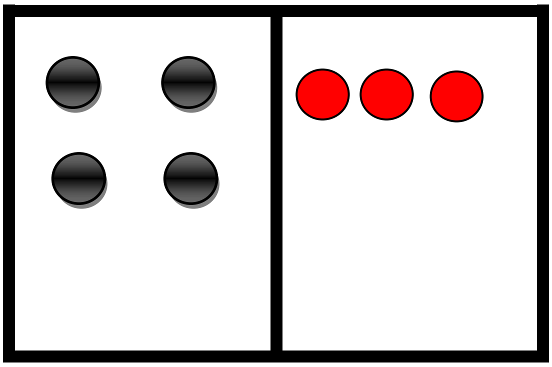
1) Se colocan 3 fichas del lado derecho.

2) Se colocan 4 fichas del lado izquierdo.

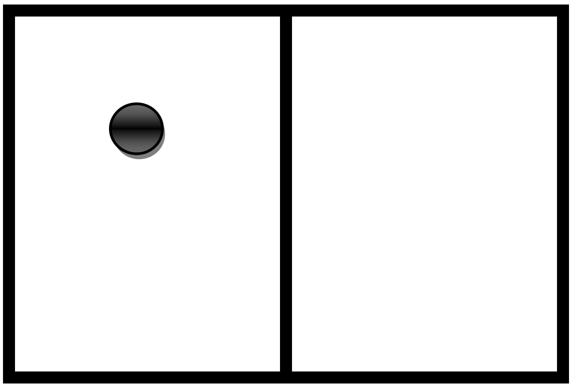
3) Se cancelan fichas en ambos lados (Principio de cancelación).

4) Al final quedará sólo una ficha del lado izquierdo y por lo tanto el resultado es -1.

El tablero antes de cancelar luce de la siguiente forma.



Unas ves que se ha realizado la cancelación de fichas, se obtiene el número entero



El Opuesto de un número entero

Si **n** es un Número Entero cualquiera, representado por n fichas en alguno de los lados del tablero, entonces el **Opuesto de n,** denotado en símbolos algebraicos por -n, se halla representado por n fichas colocadas en el lado opuesto. Es decir, el opuesto o negativo se halla mediante una inversión de fichas. Si a n se le suma su opuesto, siguiendo las reglas de suma, obtenemos cero fichas en el tablero. Como conclusión de esto se deduce la regla algebraica
$n + (-n) = 0$

Resta de números enteros

La operación de resta es bastante sencilla de ejecutar en el tablero. El algoritmo de resta es el siguiente:

Si se quiere restar un entero positivo n a un entero z, entonces colocamos en el tablero n fichas en el lado izquierdo del tablero.

Para demostrarle al estudiante la consistencia de este método con su idea intuitiva de restar, quitando cosas, se recomienda hacer unas cuantas restas, en donde el resultado sea positivo. Por ejemplo, hacer las diferencias en el tablero 7-4, 10-8,..., etc. y comparar estos resultados con los obtenidos usando simple sustracción.

Con esta manera de hacer la resta, el estudiante se puede dar cuenta inmediatamente de la siguiente propiedad de los números enteros ya que ésta parte se trabaja al inicio del modelo:

$X – n= X + (-n)$

Es decir, la operación de restarle **n** a **X**, es equivalente a la suma de **X** y **-n**.
También se puede deducir fácilmente que el negativo de -n es n. Con esto podemos ahora restar un número negativo a un entero cualquiera, usando la relación
$x - (-n) = x + n$

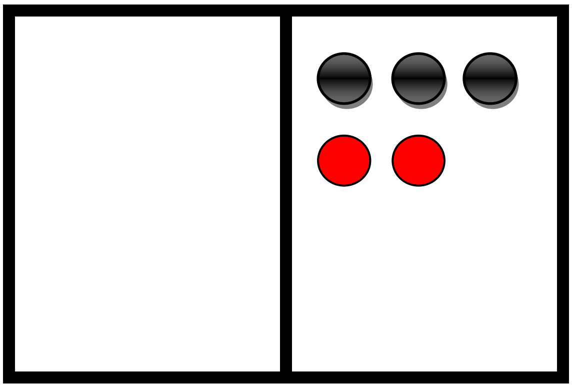
Es decir, cuando a un entero **x** se le resta otro entero negativo **-n**, entonces colocamos n fichas en el lado derecho, es decir en la resta el sustraendo cambia de lado en el tablero siempre y cuando sea negativo.

Por ejemplo si queremos restar 2 – (-3), procedemos de la siguiente forma:
Se colocan 3 fichas en el lado derecho.

Se colocan 2 fichas en el lado derecho porque 2 es positivo.

Se acumulan las fichas, para obtener 5 fichas en total en el lado derecho y ninguna en el lado izquierdo.

El resultado es 5.



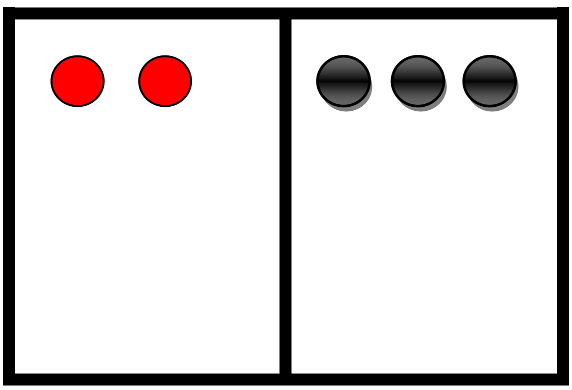
Si el ejemplo fuese -2 – (- 3) procedemos de la siguiente forma:

Se colocan 3 fichas en el lado derecho.

Se colocan 2 fichas en el lado izquierdo porque 2 es negativo.

Se cancelan fichas en ambos lados (Principio de cancelación).

El resultado es 1.



Para dar una idea de la capacidad operatoria de este modelo, veamos como se pueden realizar varias sumas y diferencias de números enteros, dentro de una misma expresión.

Por ejemplo hallar el valor del número entero **3 + (-5) + 8 -2** usando fichas y el tablero.
El procedimiento consiste en colocar las fichas en el siguiente orden

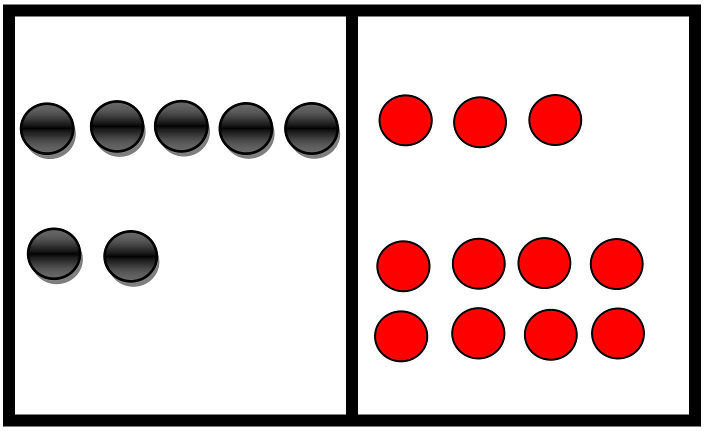
1) Tres en lado derecho

2) Cinco en el lado izquierdo

3) Ocho en lado derecho

4) Dos en el lado izquierdo

Después de hacer esto, nuestro tablero luce de la forma siguiente:



Seguidamente aplicamos el principio de cancelación y eliminamos fichas a ambos lados de la raya, una negativa con una positiva, hasta quitar, toda de un lado del tablero.

De esta forma obtenemos sólo cuatro fichas del lado derecho. Con esto se llega a calcular el valor de **x,** el cual es igual a cuatro.

CAPÍTULO 3

3.1 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el estudio planteado se consideraron como objetivos los siguientes:

OBJETIVO GENERAL:

Explorar el conocimiento matemático relativo a la adición y sustracción de números enteros en alumnos de séptimo grado de educación secundaria.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Identificar las dificultades en la apropiación de los números enteros, en especial con la adición y sustracción de números enteros.

2. Analizar la estructura **Conceptual** relativa al conocimiento en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

3. Analizar los sistemas de **Representación** relativos al conocimiento matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

4. Identificar las dificultades **Operativas** presentados por los alumnos en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

5. Analizar las dificultades **Sintácticas** del contenido relativo al conocimiento didáctico matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

3.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La primera pregunta fue tomada del artículo “La Dualidad de la Negatividad y el Cero en la Transición de la Aritmética y el Algebra de Abraham Hernández y Aurora Gallardo. (CINVESTAV, México)

1. ¿Qué estrategias conocen los estudiantes con respecto al dominio de operatividad de los enteros?

2. ¿Qué significado le dan los alumnos a las operaciones?

3. ¿Cuáles son las dificultades operativas en el dominio de los enteros que presentan los estudiantes?

4. ¿Cuáles son las dificultades sintácticas en la operatividad con números negativos?

3.3 METODOLOGÍA UTILIZADA

3.3.1 Tipo de Investigación

La metodología de investigación es cualitativa, de corte exploratorio ya que ésta nos permite acercarnos de una manera más efectiva a los procesos afectivos y cognitivos que experimentan los estudiantes durante su aprendizaje.

3.3.2 Participantes en Estudio

La población es un grupo de 27 estudiantes de séptimo grado de la “Escuela Nacional de Música.

3.3.3 Plan para la Recolección de la Información

Para la recolección de información se aplicó una prueba diagnóstica, se desarrollaron una serie de actividades de aprendizaje y se registraron varias observaciones del desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de dichas actividades.

Prueba Diagnóstica.

El objetivo de la prueba fue la de tener un estudio acerca de la comprensión que los alumnos tenían del tema, la identificación de los fallos y de los errores conceptuales que están tras esos fallos.

La prueba diagnóstica consistió en siete problemas que involucraban la conceptualización acerca de los números enteros su representación y operatividad.

En cada problema se pretendía alcanzar un objetivo en particular, en caso del **Problema N° 1** su objeto de estudio era **"**Determinar que tanto podían los estudiantes corresponder a determinadas situaciones de la vida diaria los números enteros**"**.

Problema N°2 " Que significado le dan los estudiantes a los números con signo**".**

Problema N°3 " Como identifican las representaciones con números enteros".

Problema N° 4 " Identificar las estrategias que utilizan los estudiantes para dar sentido y significado a las operaciones de adición y sustracción**".**

Problema N° 5 " Capacidad de los estudiantes para ordenar y colocar números en la recta numérica, determinando a la ves cuando un número era mayor ó menor que otro pensando en todos los números, tanto positivos como negativos **".**

Problema N°6 " Averiguar que conceptualización tienen los estudiantes sobre los números negativos**"** y

Problema N° 7 " Como interpretan y resuelven operaciones de adición y sustracción con números enteros**"**

En cada problema se incluye además una tabla con los resultados obtenidos.

Experiencias de Aprendizaje

Luego de aplicada la prueba diagnóstica se procedió al desarrollo experiencias de aprendizaje con el grupo seleccionado, a fin de utilizar como estrategia el Modelo Operatorio de Fichas.

Se debe aclarar que nuestro objetivo de investigación no es determinar si el Modelo Operatorio de Fichas funciona o no; ya que sólo será utilizado como un medio para lograr los objetivos propuesto.

Elaboración y aplicación de guías de trabajo las cuales tenían como objetivo, que los alumnos y alumnas entre 13 y 14 años se apropiaran de la adición y sustracción de números enteros.

El trabajo se realizó a partir del 4 de Agosto al 13 de octubre, realizando las siguientes actividades:

Aplicación de prueba diagnóstica el 4 de Agosto.

En las siguientes fechas se trabajó de la siguiente manera:

Elaboración y aplicación de guías de trabajo las cuales tenía como objetivo, que los alumnos y alumnas entre 13 y 14 años se apropiaran de la adición y sustracción de números enteros.

3.3.5.1 Actividades de Aprendizaje

Enseñanza del **Modelo Operatorio de Fichas en el Plano** iniciando con la suma de enteros con igual signo.

Aplicación de La guía denominada **“Fichas de Colores”,** utilizando el **Modelo Operatorio de Fichas** la cual tenía por objetivo introducir la adición de números enteros con igual signo la cual constaba de dos guías:
La guía n°1 llamada “ **Números y Fichas”** se les propuso actividades en donde se le planteaba a los estudiante problemas que asemejen situaciones de la vida real y en donde utilizaban el modelo.

La guía n°2 **“Calculo Mental con Números”** cuyo objetivo era reforzar el calculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo, sin utilizar el modelo.

La guía llamada “**Más Fichas de Colores”**, la cual tenía por objetivo introducir la suma de números enteros con signo diferente utilizando el **Modelo Operatorio de Fichas** la cual constaba de dos guía:

La guía n° 3 **“Sumando Números Enteros”** su objetivo principal era reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas y restas de números enteros con signos diferentes.

La guía n°4, llamada **“Restando Números Enteros”** cuyo objetivo era reforzar en la realización de las operaciones de sustracción.

3.3.5 2 Procedimiento de Análisis

Se realizó un análisis de tipo cualitativo de la prueba diagnóstica y de las actividades de aprendizaje, buscando evidencias de cómo los estudiantes se apropian de la operaciones con números enteros.
Para encontrar tales evidencias, se centró la atención en los siguientes aspectos:

Dificultades en la conceptualización con números enteros, representación relativa al conocimiento matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos, el significado que le dan a las operaciones con números enteros y las dificultades sintácticas en la operatividad con números enteros.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El presente capítulo se presenta un análisis de la información recolectada a lo largo del proceso de la investigación. Se divide en dos apartados. En el primero exponemos el estudio de la información obtenida a través del cuestionario diagnóstico. En el segundo, el análisis de las actividades por separado.

En la etapa de ejecución se realizó un análisis de tipo cualitativo del desempeño de los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo, con el objeto de explorar el conocimiento matemático relativo a la adición y sustracción de números enteros.

Se utilizó como estrategia el Modelo Operatorio de Fichas como medio por el cual se les permitía a los estudiantes justificar bien la estructura de adición y sustracción de los números enteros.

A continuación se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, así como el de cada una de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los alumnos.

4.1 ETAPA DIAGNÓSTICA

La prueba diagnóstica, es el conjunto de técnicas y procedimientos que se aplican antes y durante el desarrollo del proceso de instrucción, a través de ella se logra determinar, describir, explicar y valorar aquellos aspectos de la conducta inicial del estudiante.

La prueba diagnóstica se aplicó a 27 estudiantes de Séptimo Grado; con ella se pretendía conocer las habilidades, aptitudes y destrezas que poseen lo estudiantes con respecto a la operatividad con números enteros.

La prueba contenía 7 problemas con varios incisos cada uno conformando un total de 15 reactivos que involucraban estructura sintáctica, sentido y significado de las operaciones y pensamiento numérico.

A continuación se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica, aplicada a los estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música.

Problema 1

Con el número +30 indicamos la posición de un globo con respecto al mar. ¿Qué números asignarías a la avioneta, al barco y al submarino?

Los resultados obtenidos en este primer problema se presentan en el siguiente cuadro**:**

Cuadro N°1

Resultados del Problema 1

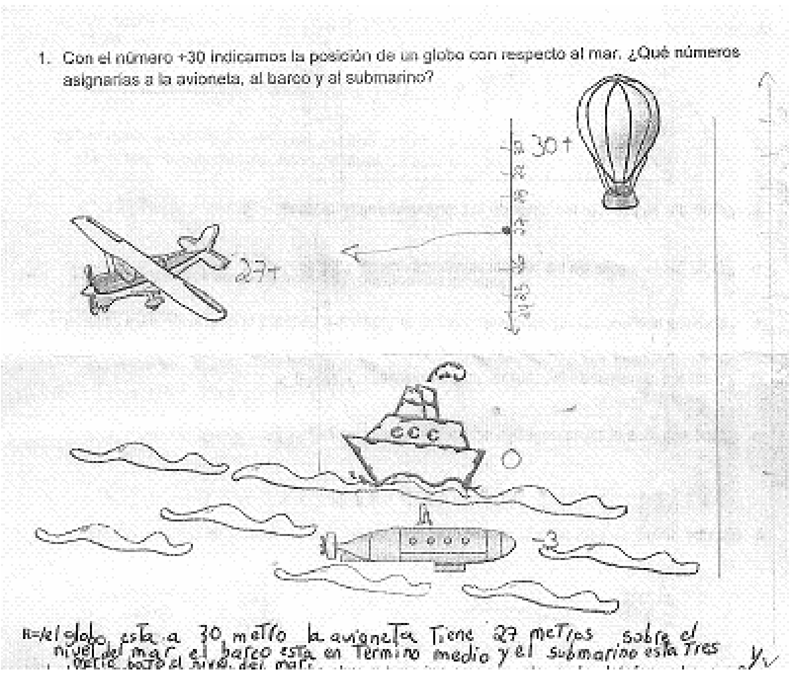
Respuestas a los Reactivos			
Correctas	**Incorrectas**	**Incompletas**	**En blanco**
5	15	1	6

Éste problema tenía como objetivo determinar que tanto podían los estudiantes interpretar números enteros, haciendo corresponder a determinadas situaciones de la vida cotidiana los números enteros positivos cuando tenga el signo (+) y los enteros negativos cuando tenga el signo (-).

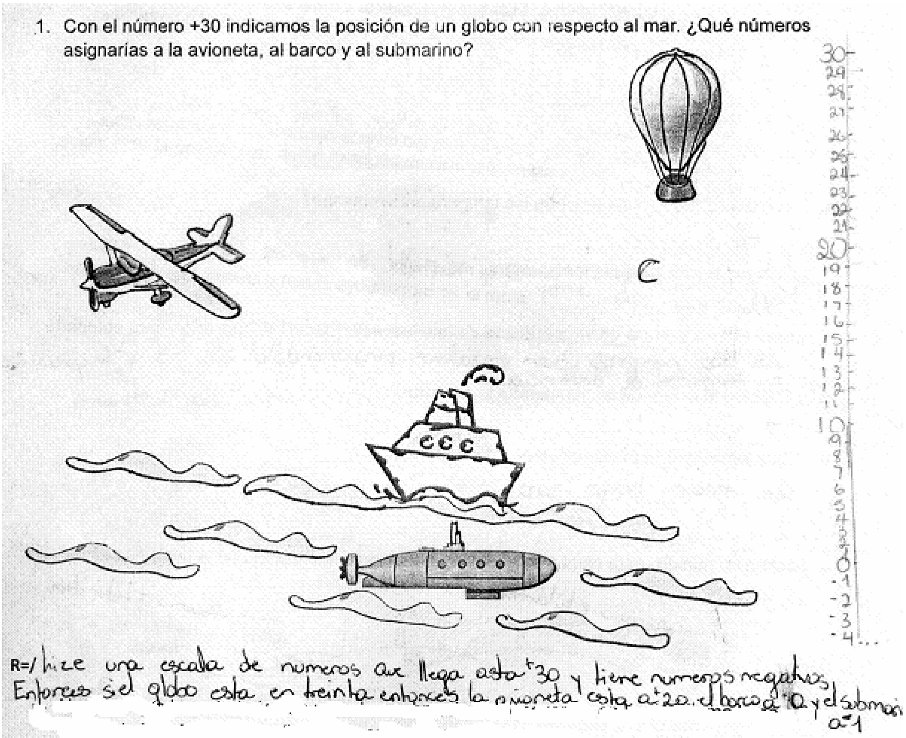
En éste problema los 15 estudiantes que contestaron incorrectamente, no tomaron en cuenta que la posición del globo y la avioneta por estar ubicados sobre el nivel del mar se representa con números positivos y que el submarino por estar debajo del nivel del mar se representan con números negativos, al parecer los estudiantes no consideran que el barco está en la posición cero.

Estos estudiantes partieron desde el +30 y fueron aproximando un valor menos de +30 para asignarle a la avioneta al barco y al submarino. No están interpretando correctamente el problema y por la tanto la interpretación está siendo equivocada.

Uno de los estudiantes, **Ariel** que fue uno los 5 estudiantes que dieron la respuesta correcta, escribió:



También es el caso de **Arella** que utilizó como estrategia para resolver el problema la recta numérica, y lo realizó de la siguiente manera:



Como se puede observar , los estudiante **Ariel** y **Arella** tienen claro y comprenden que una vez que se llega a la posición que ocupa el barco y pasa a la posición del submarino los números dejan de ser positivos y pasan a ser negativos, se puede afirmar que estos estudiantes han logrado desarrollar su pensamiento numérico, como lo manifiesta Mclntosh, (1992).

"El pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación al usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles las manejar números y operaciones".

Problema 2

Un buzo que hace trabajos en una obra submarina se encuentra en la plataforma a 6 m sobre el nivel del mar y realiza los desplazamientos siguientes:

- Baja 20 metros para dejar material.
- Baja 12 metros más para hacer una soldadura.
- Sube 8 metros para reparar una tubería.
- Finalmente, vuelve a subir la plataforma.
- ¿Cuántos metros ha subido en su último desplazamiento hasta la plataforma?

Los resultados obtenidos en este segundo problema se presentan en el siguiente cuadro**:**

Cuadro N°2

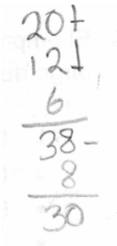
Resultados del Problema 2

Respuestas a los Reactivos			
Correctas	**Incorrectas**	**Incompletas**	**En blanco**
8	13	1	5

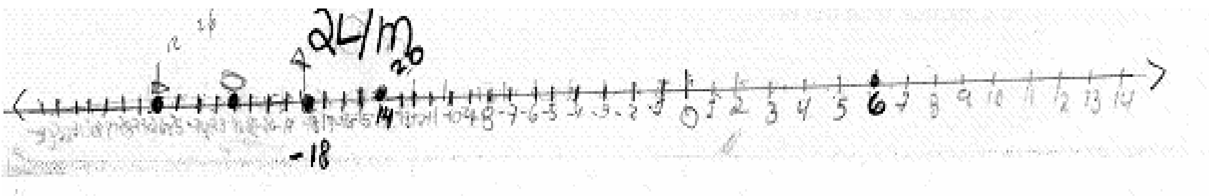
Con en éste problema se pretendía que los estudiantes entendieran el significado de los números con signo y que estos nos proporcionan un medio conveniente para indicar direcciones opuestas con un mínimo de palabras, observando que los signos más y menos tienen dos funciones separadas y distintas. Pueden indicar cuándo un número es positivo o negativo, y también señalan la operación de la adición o sustracción.

En este problema 13 de los 27 estudiantes contestaron incorrectamente debido a que no tomaron en cuenta los 6 m sobre el nivel del mar y además que una altitud de 20 por debajo del nivel del mar se designaría entonces como - 20 metros y cuando sube, una altitud de 8 metros puede ser designada como + 8 metros.

En este problema se obtuvieron un total de 13 respuestas incorrectas como es el caso de la estudiante **Lauren** quien justificó de la siguiente manera:

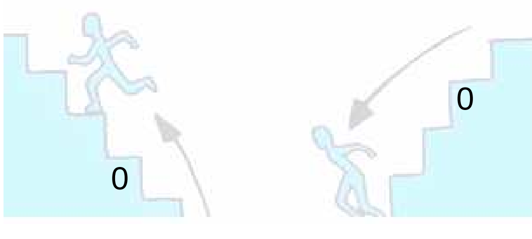


En cambio sólo un total de 8 estudiantes contestaron correctamente, siendo uno de ellos el estudiante **Ariel** quien utilizó como estrategia para resolver el problema la recta numérica.



Problema 3

Expresa con un número los desplazamientos que realizan Pedro y Juan en cada escalera.



Los resultados obtenidos en este tercer problema se presentan en el siguiente cuadro**:**

Cuadro N°3

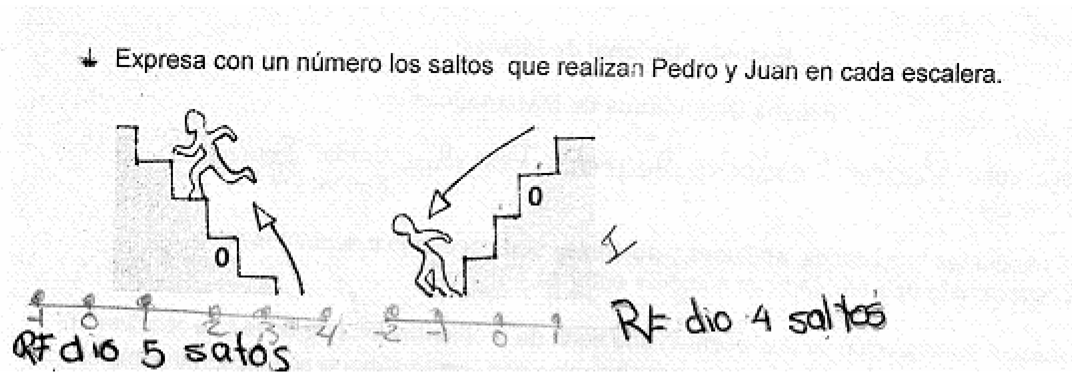
Resultados del Problema 3

Respuestas a los Reactivos			
Correctas	**Incorrectas**	**Incompletas**	**En blanco**
5	13	4	5

La esencia de éste problema era que los estudiantes entendieran que en el caso de Pedro se están subiendo gradas y habría que tomar en cuenta el numero cero de manera que los desplazamientos estarían indicados por los números +1, +2, +3 y -1 después del número cero.

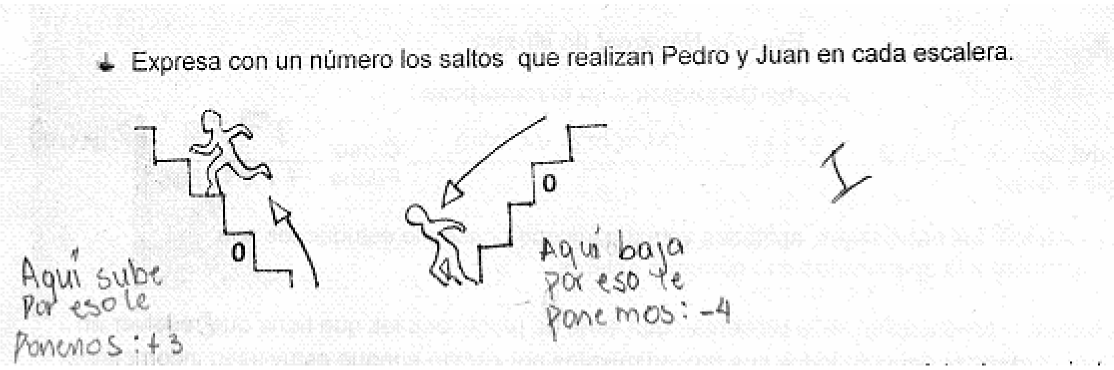
Caso contrario el de Juan sus desplazamientos son hacia abajo lo que significa que estarán representados por los números -1, -2, -3 y 1 después del número cero.

Una de las estudiantes que contestó incorrectamente fue **Carmen** la cual escribió lo siguiente:



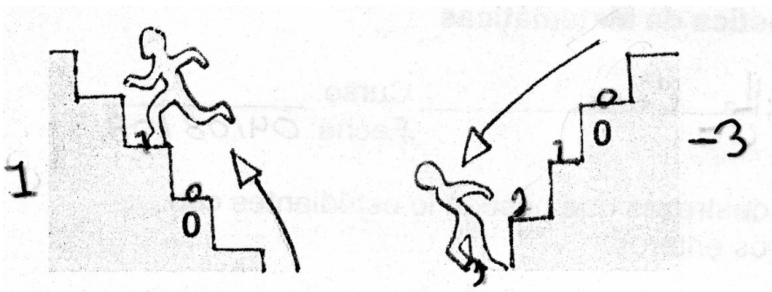
Carmen Estefanía no tomó en cuenta la posición que tenía el cero en las gradas y muchos menos entienden que desplazamientos hacia arriba indican números positivos y desplazamientos hacia abajo indican números negativos.

En el de caso de la estudiante **Lidia** respondió de la siguiente forma:



Lidia entiende el concepto de que los desplazamientos hacia arriba lo representamos con números positivos y desplazamientos hacia abajo con números negativos pero no tomó en cuenta la posición que ocupaba el cero en las gradas.

De los estudiantes que contestaron correctamente tenemos el caso de **Brayan** el cual escribió:



Brayan Omar Padilla entiende muy bien el concepto de desplazamientos hacia arriba y hacia abajo y además visualiza muy bien como representar números enteros antes y después del cero.

Problema 4

El empresario de un parque acuático hace este resumen de la evolución de sus finanzas a lo largo del año.

- De enero-mayo pérdidas de Lps. 3,475 mensuales
- De junio-agosto ganancias de Lps. 8230 mensuales
- De septiembre ganancias de Lps. 1,800
- De octubre –diciembre pérdidas de Lps. 3,970 mensuales

¿Cuál fue el balance final del año?

Los resultados obtenidos en este cuarto problema se presentan en el siguiente cuadro**:**

Cuadro N°4

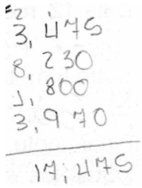
Resultados del Problema 4

Respuestas a los Reactivos			
Correctas	Incorrectas	Incompletas	En blanco
3	16	3	5

El propósito de este problema era identificar las estrategias que utilizan los estudiantes para dar sentido y significado a las operaciones de adición y sustracción.

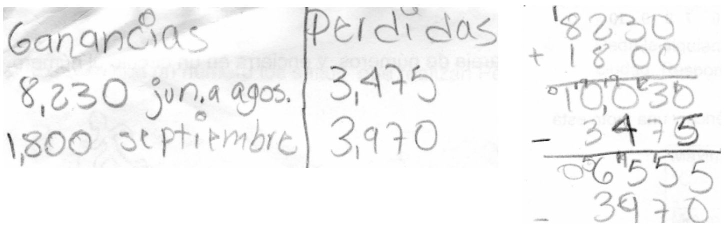
Los estudiantes que contestaron incorrectamente no entendieron bien el problema ya que no saben establecer que una ganancia representa una situación positiva y una pérdida una situación negativa lo que significaba que tenían que sumar las ganancias y restarle las pérdidas para obtener el balance general.

Así es caso de **Samuel** el cual escribió lo siguiente:



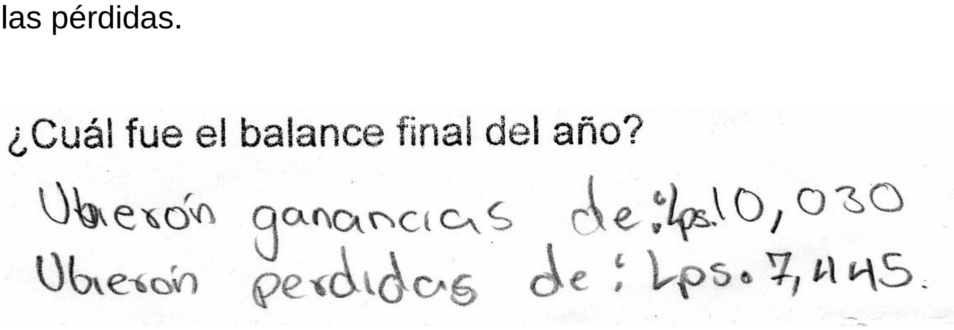
El estudiante **Samuel** sumó las pérdidas con las ganancias con esta situación pone en evidencia que no comprende el sentido y significado de las operaciones sumar y restar, quizás sólo sabe el algoritmo convencional de calcular resultados.

En el caso de la estudiante **Ángela** respondió lo siguiente:



Además de entender correctamente el problema, da sentido y significado a las operaciones como lo manifiestan algunos investigadores NTCM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntoh, 1992) ya que la estudiante reconoce el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones la cual se toma en cuenta para construir significado de las operaciones.

Ahora bien de los estudiantes que dejaron incompleto el problema es el caso de **Iris** quien realizó correctamente la separación de ganancias con ganancias y pérdidas con pérdidas pero no efectuaron la operación de restar de las ganancias las pérdidas.



La estudiante **Iris** entendió hasta cierto punto el problema desarrollándose en ella el sentido de las operaciones pero no su significado. (NTCM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntoh, 1992).

Problema 5

Representa en la recta numérica cada pareja de números y encierra en un círculo el número mayor de cada pareja.

3 y 1.

-7 Y -5

¿Quién es el mayor de las dos parejas? ¿Por qué?

- 12 11 -10 -9 -8 - 7 - 6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1

2 3 4 5 6 7 8 9 10

Los resultados obtenidos en este quinto problema se presentan en el siguiente cuadro:

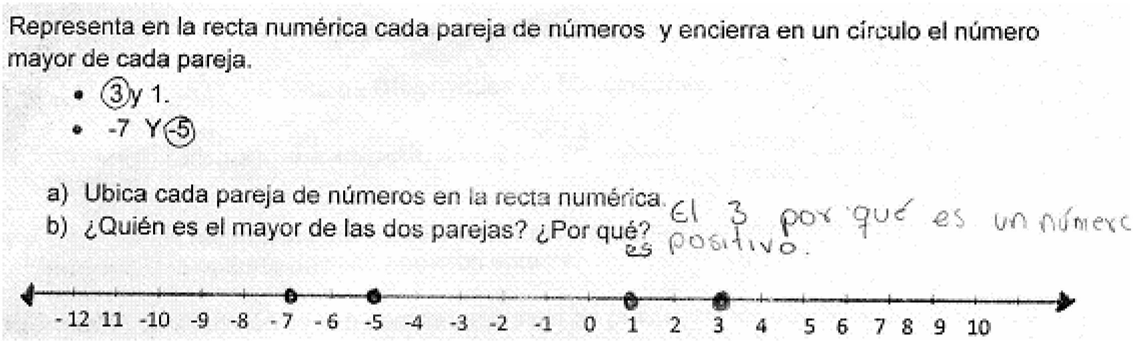
Cuadro N°5

Resultados del Problema 5

Respuestas a los Reactivos			
Correctas	Incorrectas	Incompletas	En blanco
20	3	1	3

El problema tenía como meta ordenar y colocar números a lo largo de una recta numérica, determinar cuándo un número particular es mayor o menor que otro pensando en todos los números, tanto positivos como negativos.

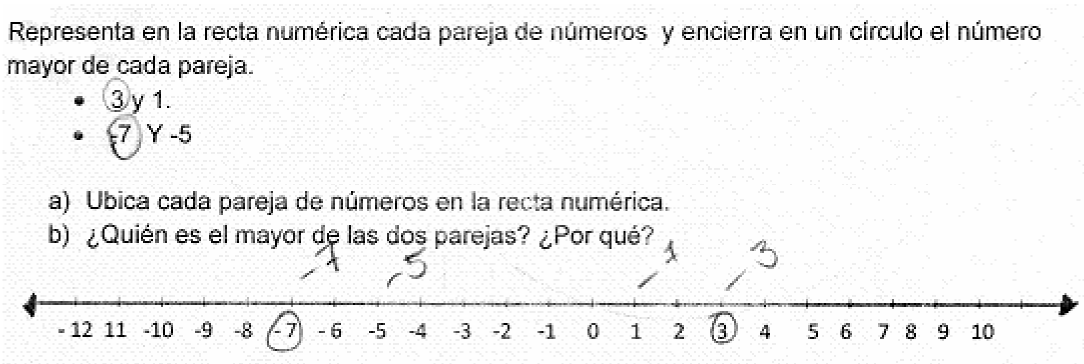
La mayoría del estudiante ubica correctamente números enteros en la recta numérica y saben distinguir entre una pareja de números positivos quien es mayor y quien es menor. Conviene resaltar el caso de **Diana** quien escribió lo siguiente:


Representa en la recta numérica cada pareja de números y encierra en un círculo el número mayor de cada pareja.

- 3 y 1.
- -7 Y -5

a) Ubica cada pareja de números en la recta numérica.
b) ¿Quién es el mayor de las dos parejas? ¿Por qué? El 3 por qué es un número es positivo.

Pero no ocurre lo mismo cuando tienen dos enteros negativos, como es el caso de la estudiante **Iris** quien respondió de la siguiente manera:


Representa en la recta numérica cada pareja de números y encierra en un círculo el número mayor de cada pareja.

- 3 y 1.
- -7 Y -5

a) Ubica cada pareja de números en la recta numérica.
b) ¿Quién es el mayor de las dos parejas? ¿Por qué?

No tiene claro el concepto de relación de orden con respecto a los números enteros.

Problema 6

Resuelva los siguientes problemas en forma clara y ordenada:

- "Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero en la recta numérica y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿En que kilómetro está la moto?".

- "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?".

Los resultados obtenidos en este sexto problema se presentan en el siguiente cuadro:

Cuadro N°6

Resultados del Problema 6

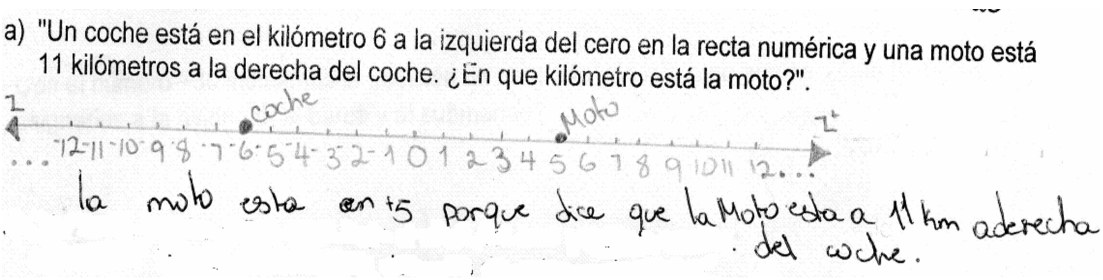
Reactivos / **Respuestas**	6a	6b
Correctas	8	9
Incorrectas	13	12
Incorrectas	0	0
En Blanco	6	6

Con este problema se pretendía averiguar los conocimientos que los estudiantes tienen sobre los números negativos, reflexionando los enunciados de los problemas sobre el orden y las operaciones con números negativos.

Aunque los estudiantes tienen mucho conocimiento sobre la resolución de problemas aditivos con números positivos, no se obtuvo tan buenos resultados al trasladarlos a los negativos, ya que en esta parte se tiene que tomar en cuenta las características específicas de los números negativos, en cuanto a los signos de los números, a las reglas operatorias, a los contextos y a la identificación de las dos operaciones.

Sin embargo algunos estudiantes si entendieron los problemas y además utilizaron como estrategia para darle solución al problema la recta numérica y lo manifestaron en sus repuestas, como es caso de:

Ariel en el inciso **a**



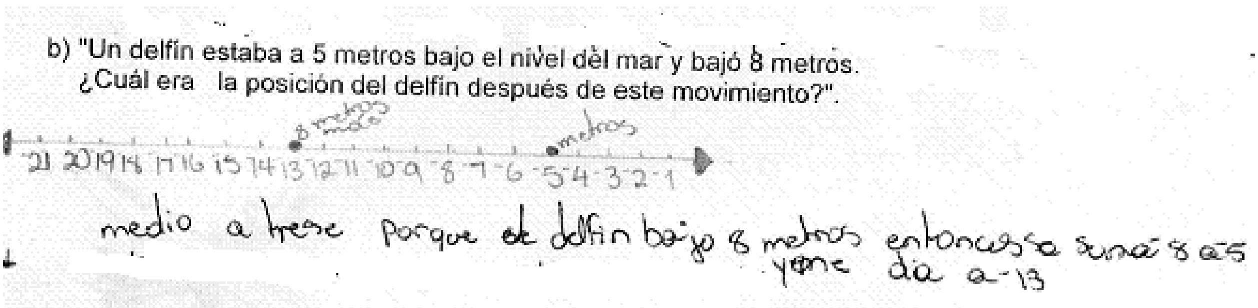
a) "Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero en la recta numérica y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿En que kilómetro está la moto?".

coche Moto

... -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

la moto esta en +5 porque dice que la Moto esta a 11 km a derecha del coche.

Arella en el inciso **b**



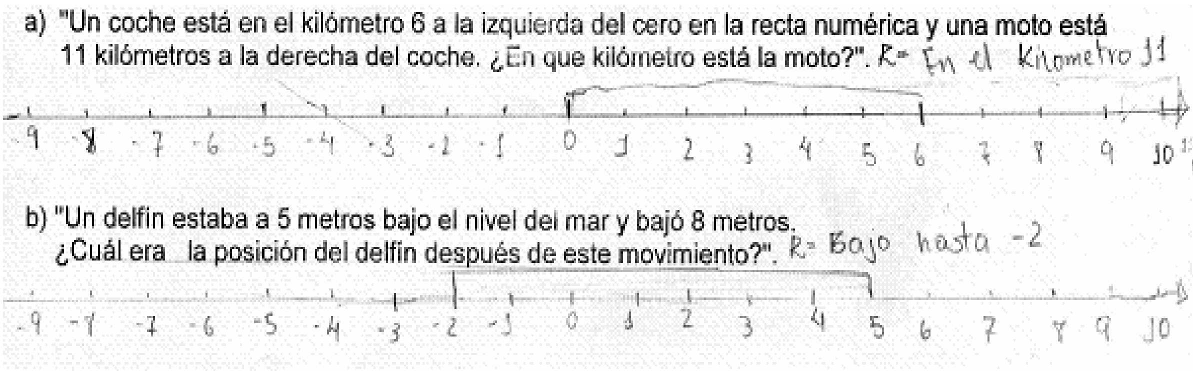
b) "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?".

8 metros mas · metros

-21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1

medio a trese porque el delfin bajo 8 metros entonces se suma 8 a 5 y me dio a -13

Entre los estudiantes que presentaron dificultad para resolver los problemas es el caso de **Lidia** la cual respondió:



a) "Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero en la recta numérica y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿En que kilómetro está la moto?". R= En el Kilometro 11

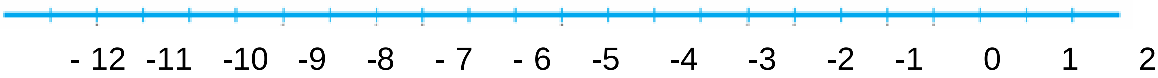
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

b) "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?". R= Bajo hasta -2

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Problema 7

Haz las siguientes sumas y restas ayudándote en la recta:



(10) – (5) =   d) (4) + (-5) =

(- 3) – (- 6) =   e) (2) +(0) =

(- 2) + (7) =   f) (4) + (-5) =

Con éste problema se pretendía investigar como los estudiantes interpretan y resuelven operaciones de adición y sustracción con números enteros.

Los resultados obtenidos en este sétimo problema se presentan en el siguiente cuadro:

Resultados del Problema 7

Cuadro N°7

Reactivos / Respuestas	8a	8b	8c	8d	8e
Correcta	19	3	8	6	19
Incorrecta	5	21	17	16	5
Incorrecta	0	0	0	3	0
En Blanco	3	3	2	2	3

En los incisos **a)** y **e)** lo estudiantes no presentan mayor dificultad ya que están familiarizados con la operación de resta de números naturales cuando el minuendo es mayor que el sustraendo.

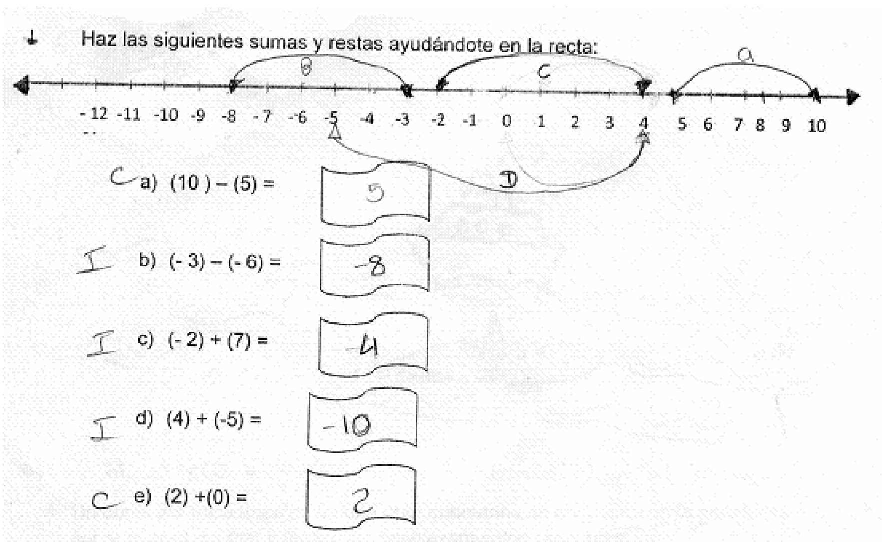
En cambio en los incisos **b)**, **c)**, **d)** se asumen las sumas y restas de números del mismo signo entendiendo que sumar significa añadir y restar significa quitar. No se manejan correctamente las restas de números negativos con minuendo mayor, ni las sumas y restas de distinto signo.

Interpretan la suma y la resta de números naturales como movimientos sobre la recta numérica a derecha o izquierda del primer término, respectivamente. Se asume que sumar números positivos significa avanzar en el sentido positivo y sumar negativos avanzar en el sentido negativo.

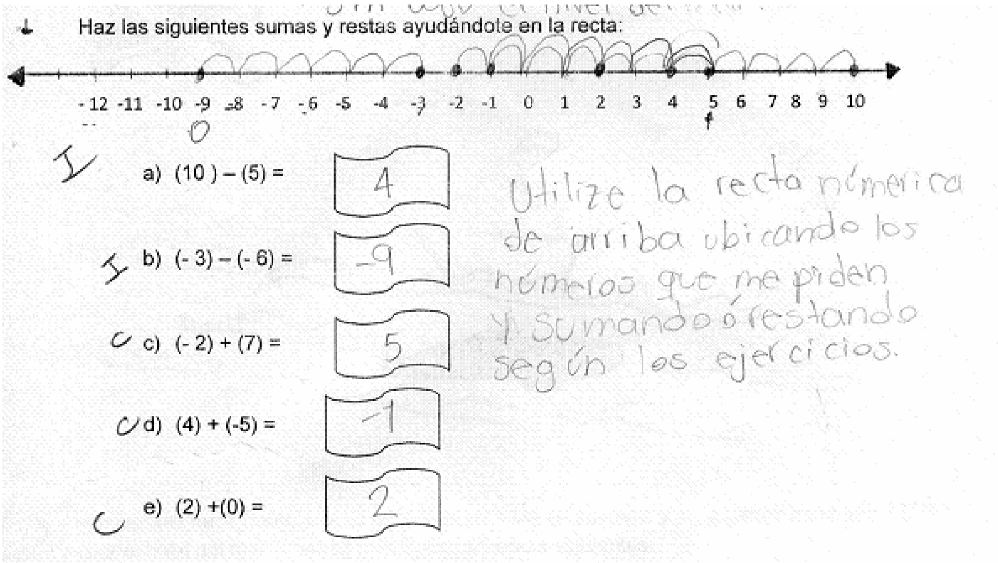
Argumentos similares usan para realizar la resta de números del mismo signo: restar positivos significa ir hacia los negativos y restar negativos ir hacia los positivos.

Por ejemplo algunos estudiantes respondieron lo siguiente:

Diana



Sofía



Haz las siguientes sumas y restas ayudándote en la recta:

-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

I a) (10) – (5) = 4

I b) (- 3) – (- 6) = -9

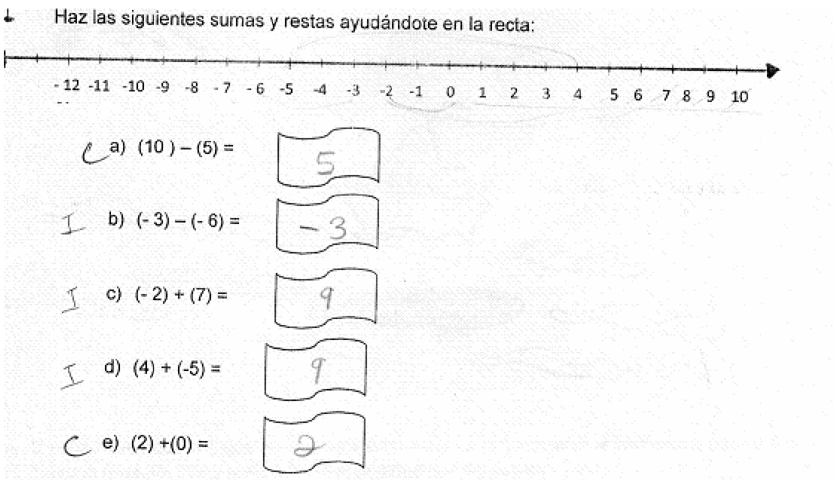
C c) (- 2) + (7) = 5

C d) (4) + (-5) = -1

C e) (2) +(0) = 2

Utilize la recta númerica de arriba ubicando los números que me piden y sumando ó restando según los ejercicios.

Brayan



Haz las siguientes sumas y restas ayudándote en la recta:

-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

C a) (10) – (5) = 5

I b) (- 3) – (- 6) = -3

I c) (- 2) + (7) = 9

I d) (4) + (-5) = 9

C e) (2) +(0) = 2

Diversos autores (Bell, 1992; Bruno y Martinón, 1994; Car Maternas, 1984; Ernesto, 1985; Kuchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta numérica. Básicamente, se observa que tienden a representar lo números y el resultado de operación como puntos aislados en la recta, no como vectores que les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo.

4.2 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Las actividades de aprendizaje se desarrollaron con el propósito de describir, explorar y corregir los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes con respecto a las operaciones en el conjunto de los números enteros, especialmente en la adición y sustracción.

Dichas actividades se realizaron vía un modelo de enseñanza llamado **Modelo Operatorio de Fichas** utilizado como recurso de investigación.

Antes de la aplicación de cada actividad se les enseñaba a los estudiantes como utilizar el Modelo Operatorio de Fichas para realizar las operaciones con números enteros.

Se quiere aclarar que la investigación no va enfocada al uso de Modelos Concretos para el aprendizaje de los números **enteros** sino como una estrategia de enseñanza - aprendizaje.

Se desarrollaron un total de 4 actividades de aprendizaje, las cuales se han planteado a partir de la adición y sustracción con números enteros

A continuación se describen junto con un análisis de las respuestas de los estudiantes en cada actividad.

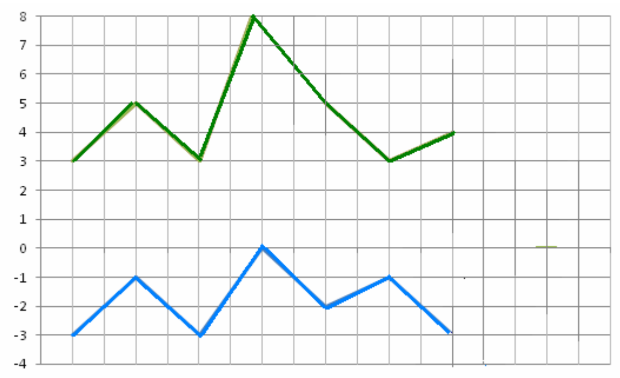
Actividad N°1

"Números y Fichas"

Con ésta actividad se pretendía reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo utilizando como recurso el Modelo Operatorio de Fichas.

Y, para alcanzar dicho objetivo se les planteó los siguientes problemas.

El gráfico muestra las temperaturas máximas y mínimas tomadas en un observatorio meteorológico de una ciudad durante una semana del mes de enero.



a Escribe con números enteros las temperaturas máximas de lo sietes días.

b Escribe con números enteros las temperaturas mínimas de los siete días.

Calcula la temperatura media de las máximas.

(Recuerda que para calcular la media de un conjunto de datos numéricos se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número total de datos)

2a. ¿Qué signo tiene el resultado? ¿A qué se debe?

Calcula la temperatura media de las mínimas.

3. a ¿Qué signo tiene el resultado? ¿A qué se debe?

Responda:

4. a ¿Qué número sumado a -30 da -80?

4a1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

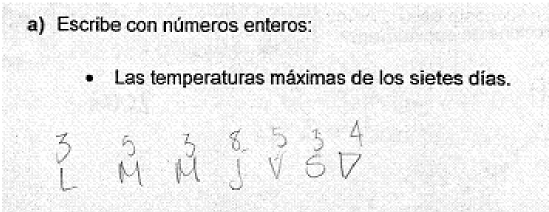
4. b ¿Qué número sumado a 120 da 200?

4. b1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

En las 3 primeras preguntas las respuestas no variaron (figura 1 y 2); los estudiantes manejan correctamente y saben representar simbólicamente expresiones como temperaturas máximas y temperaturas mínimas.

Las respuestas dada por la estudiante **Sofía,** son las siguientes:

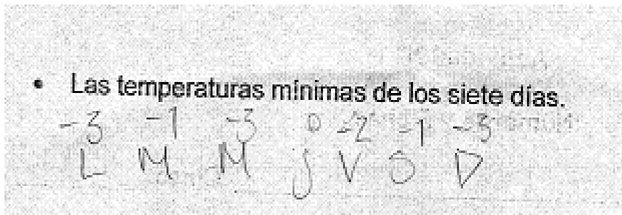
Problema 1



a) Escribe con números enteros:

- Las temperaturas máximas de los sietes días.

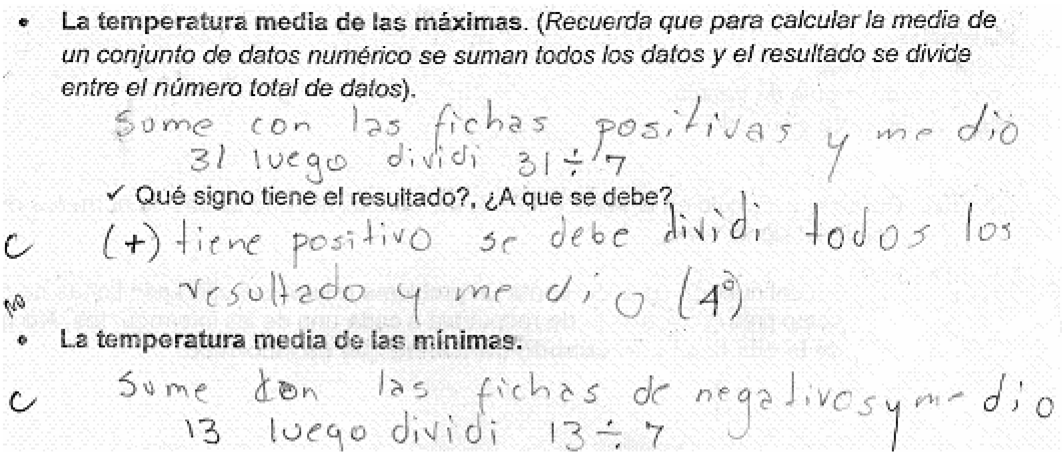
3 5 3 8 5 3 4
L M M J V S D



- Las temperaturas mínimas de los siete días.

-3 -1 -3 0 -2 -1 -3
L M M J V S D

Problemas 2 y 3



- **La temperatura media de las máximas.** (*Recuerda que para calcular la media de un conjunto de datos numérico se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número total de datos*).

Sume con las fichas positivas y me dio 31 luego dividi 31 ÷ 7

✓ Qué signo tiene el resultado?, ¿A que se debe?

c (+) tiene positivo se debe dividi todos los resultado y me dio (4°)

- **La temperatura media de las mínimas.**

c Sume con las fichas de negativos y me dio 13 luego dividi 13 ÷ 7

Atención especial merece las diferentes respuestas para el reactivo 4 y que se presentan en la siguiente tabla:

4. Responda:

4. a ¿Qué número sumado a -30 da -80?

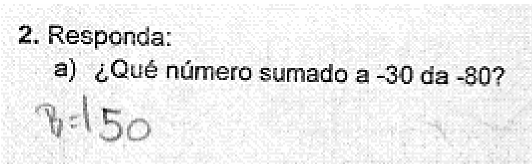
4a1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

Cuadro N°4

Resultados del Reactivo 4a y 4a1

Respuestas a los Reactivos				Justificación	
				Correcta	**Incorrecta**
Correctas	**Incorrectas**	**Incompletas**	**En Blanco**	10	5
15	10	1	1		

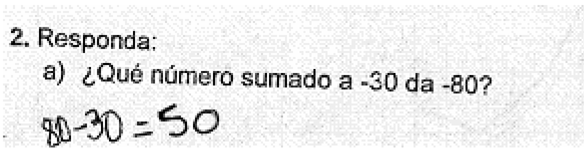
Observemos en primer lugar la respuesta que nos ofrece **Marcos**


2. Responda:

a) ¿Qué número sumado a -30 da -80?

R:150

4a1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

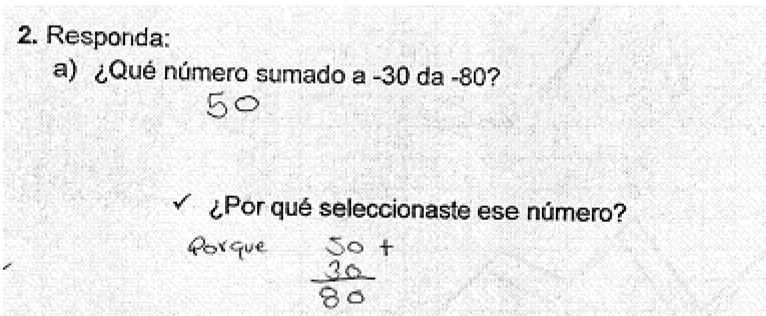

2. Responda:

a) ¿Qué número sumado a -30 da -80?

80-30 = 50

Este estudiante lee la expresión de derecha a izquierda y transforma la adición en una sustracción.

En cambio **Axel** encuentra el número, pero toma en cuenta el signo.


2. Responda:

a) ¿Qué número sumado a -30 da -80?

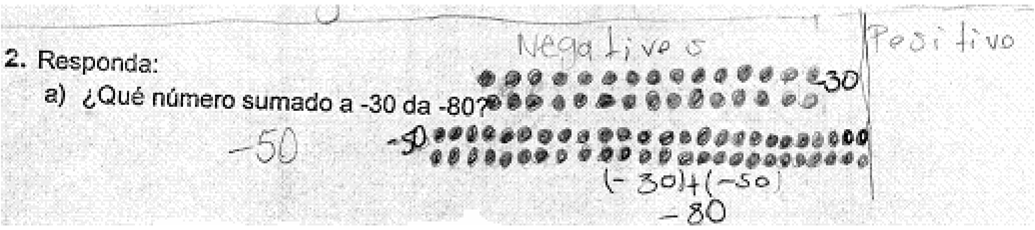
50

✓ ¿Por qué seleccionaste ese número?

Porque 50 +
30
80

Esta actividad mostró importantes dificultades en el problema N° 4 en las operaciones con igual signo sobre todo cuando intervienen números negativos.

Pero así como hubo dificultades, se obtuvieron respuestas acertadas como el caso de **Lauren** quien responde de la siguiente manera:



Lauren tiene claro que la suma de números enteros con igual signo se suma asignándole a la respuesta el mismo signo.

Es importante señalar aquí que entre los alumnos que no utilizaron una representación figural el error se produjo, y en este caso que la alumna utilizó una representación funcional (en el sentido de Hitt, 2003, 2006 y 2008), la alumna parece tener mayor facilidad y seguridad para resolver los problemas utilizando representaciones.

Al respecto Fernando Hitt (1998) menciona; “El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicción alguna diferentes representaciones del mismo objeto, así como el de recurrir a ellas, las representaciones, en forma espontánea durante la resolución de problemas”.
Con respecto a lo anterior es importante mencionar que ninguno de los estudiantes utilizó como estrategia para resolver los problemas la representación de la recta numérica.

De lo anterior se pone de manifiesto que algunos de los estudiantes no logran por completo uno de los niveles que propone Gallardo (2002) y es el número negativo formal, el cual implica que los estudiantes ven los números negativos como resultado y no como un número en sí.

Pero ello no indica que la utilización de modelos concretos como recurso, impide su aprendizaje, por el contrario es necesario recurrir a ellos, como lo establece Cid (2002) el modelo funciona por analogía, es decir, permite obtener conocimiento sobre la noción matemática porque “se parece a ella” ó “funciona como ella”.

Actividad N°2

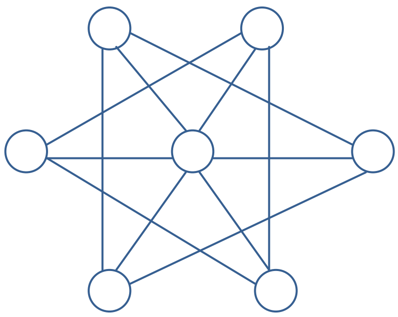
“Calculo Mental con Números”

El objeto de estudio de la actividad N°2 era refor zar el cálculo en la realización de operaciones de sumas de números enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas.

En ésta segunda sesión de clase se les planteó tres problemas:

1. <u>Hexágono mágico.</u>

Acomoda los números de 1 al 7, uno por círculo, de modo que cada uno de los triángulos grandes y cada una de las diagonales sumen igual. Nota: No se repite ningún número.



Responda:

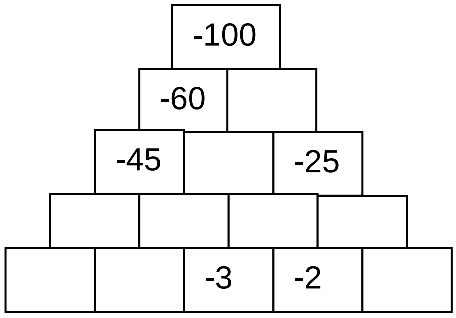
¿Qué número suma cada triángulo?

¿Qué signo tiene el número encontrado en la suma?

¿A qué se debe?

2. <u>El montón de piedras</u>.

Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila inferior. El número de cada piedra representa la suma entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completar los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.



Responda:

¿Qué número le sumó a -60? ¿Por qué?

¿Para completar los números que faltaban utilizó enteros positivos ó enteros negativos? ¿Porque?

Responda:

¿Qué número sumado a -90 le da -120?

¿Qué número sumado a -45 le da -80?

¿Qué número sumado a 60 le da -30?

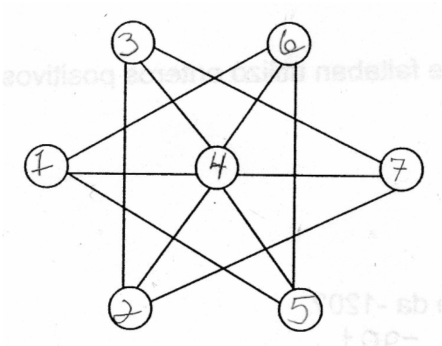
La intención de ésta actividad era que los estudiantes resolvieran los problemas planteados de adición de números enteros y de esta manera conocer si manejan correctamente la operaciones de enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas y además descubrieran sus reglas para operarlos.

Para solucionar el primer, segundo y tercer problema de la actividad No. 2, **Isaías**, **Ángela** y **Ruth** proponen:

1. Hexágono mágico.

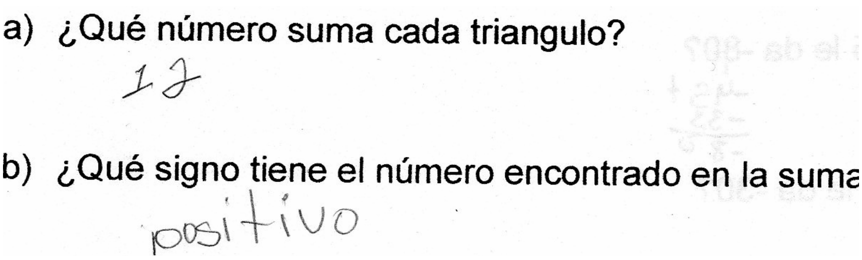
Acomoda los números de 1 al 7, uno por círculo, de modo que cada uno de los triángulos grandes y cada una de las diagonales sumen igual. Nota: No se repite ningún número.

Isaías



Quién justifica de la siguiente manera:

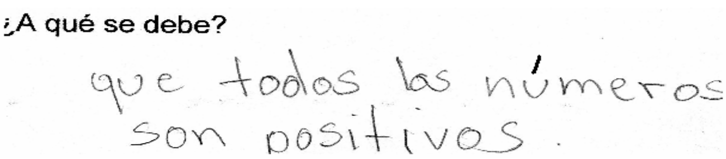
Responda:


a) ¿Qué número suma cada triangulo?

12

b) ¿Qué signo tiene el número encontrado en la suma

positivo

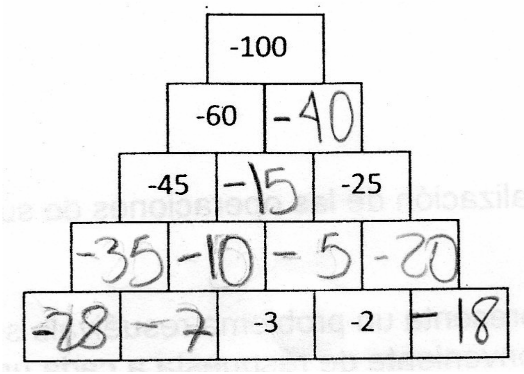

¿A qué se debe?

que todos los números son positivos.

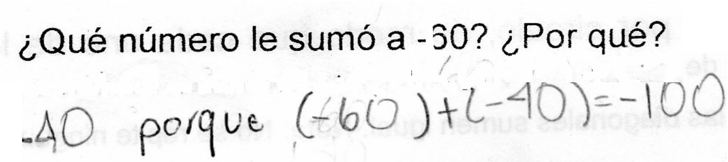
Ángela

2. El montón de piedras.

Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila inferior. El número de cada piedra representa la suma entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completar los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.



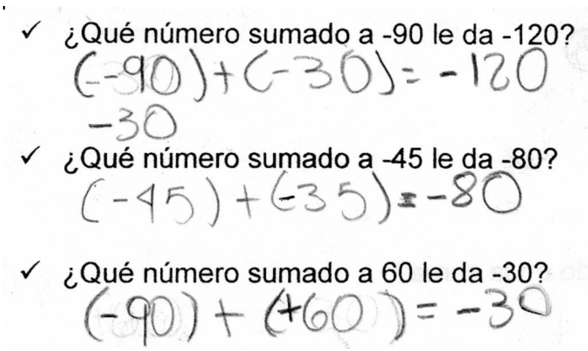
Justificando de la siguiente forma,


¿Qué número le sumó a -60? ¿Por qué?

-40 porque (-60)+(-40)=-100

Sofía

3. Responda:


✓ ¿Qué número sumado a -90 le da -120?

(-90)+(-30)= -120

-30

✓ ¿Qué número sumado a -45 le da -80?

(-45)+(-35)=-80

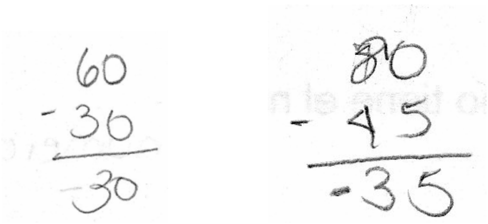
✓ ¿Qué número sumado a 60 le da -30?

(-90) + (+60) = -30

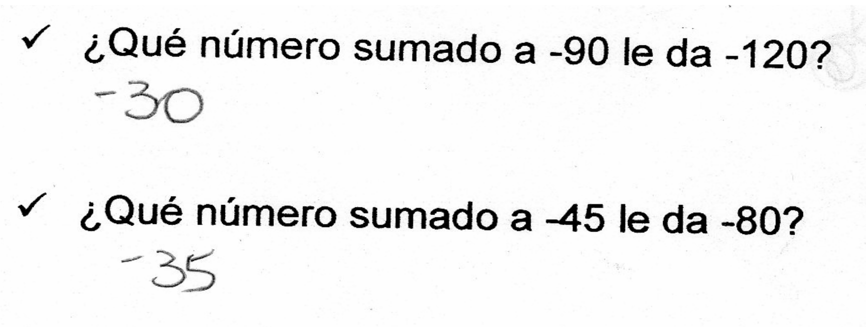
En estos reactivos se tuvo la satisfacción de que 20 de las respuestas presentadas por los 27 estudiantes estaban correctas.

Quedó suficiente evidencia que los alumnos lograron manejar correctamente las operaciones con enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas.

Aunque en la **actividad 1** los estudiantes manifestaron dificultad al trabajar con números negativos, no fue el caso en ésta actividad ya que los estudiantes buscaron sus propias estrategias para dar respuesta a los problemas, como es el caso de **Ruth.**



Ruth resuelve las operaciones como si estuviera trabajando con números naturales, sin embargo no se le olvida que a la hora de dar la respuesta tiene que tomar en cuenta los signos que acompañen a los sumandos.



- ✓ ¿Qué número sumado a -90 le da -120?
  -30
- ✓ ¿Qué número sumado a -45 le da -80?
  -35

Actividad N°3

"Sumando Números Enteros"

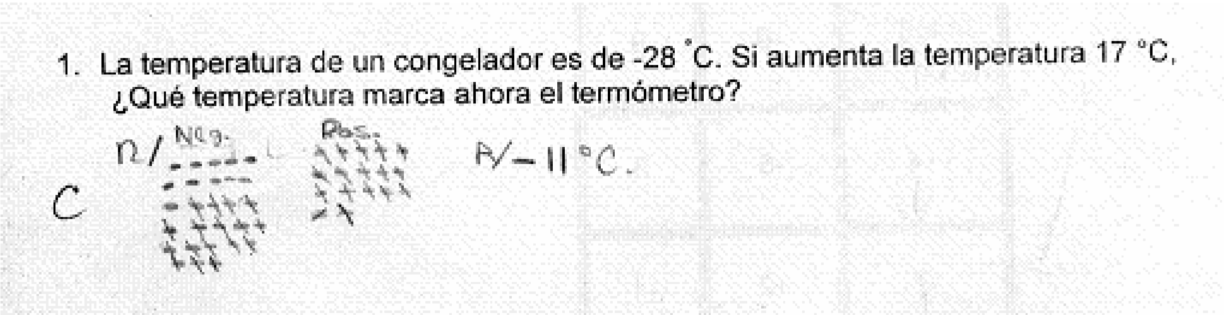
La intención de ésta actividad fue la de reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con signos diferentes.

Para lograr éste objetivo se les planteó los siguientes problemas:

1. La temperatura de un congelador es de -28 °C. Si aumenta la temperatura 17 ℃, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro ?

En éste problema los estudiantes no presentaron mayor dificultad para darle respuesta a lo que se les pedía, sin embargo, fue sorprendente como en su mayoría lo resolvieron sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas, bien porque lo han olvidado o porque no lo necesitaban.

Sólo un estudiante acudió a él, como es el caso del estudiante **Axel**, quien respondió de la siguiente manera:

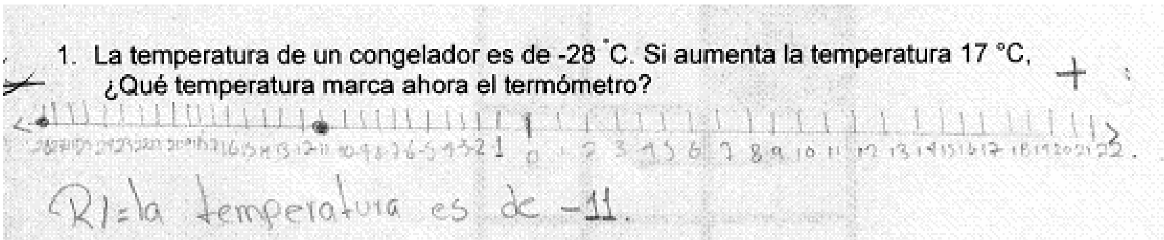

1. La temperatura de un congelador es de -28 °C. Si aumenta la temperatura 17 °C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro?

C

n/ Neg. Pos.

R/ -11 °C.

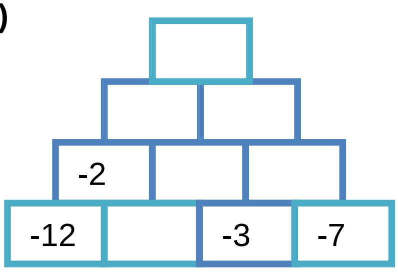
En el caso de **Lauren** para darle respuesta al problema no utilizó el modelo pero sí la recta numérica, justificando de la siguiente manera:


1. La temperatura de un congelador es de -28 °C. Si aumenta la temperatura 17 °C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro?

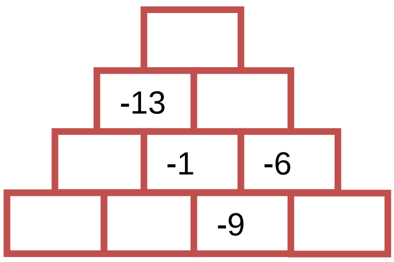
R/= la temperatura es de -11.

2. Completa las pirámides. Cada número se obtiene al sumar los que están debajo de él.

a)



b)



En éste problema se notó que los estudiantes presentaron dificultad para darle respuesta debido que los estudiantes resuelven los problemas sin expresar la solución en términos positivos ó negativos y lo podemos observar en la siguiente tabla.

Cuadro N°1

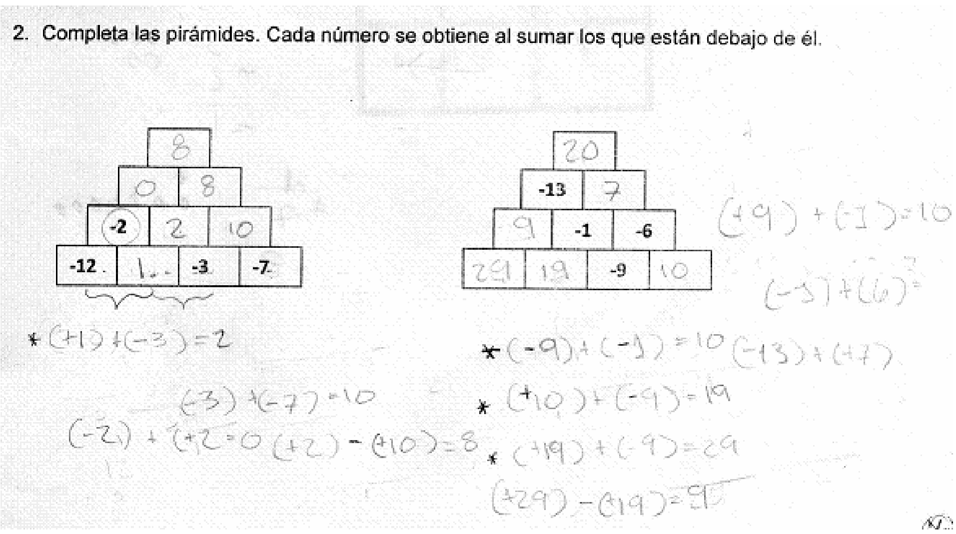
Resultados del Reactivo

Reactivos / **Respuestas**	2a	2b
Correctas	9	7
Incorrectas	17	14
Incompletas	0	3
En Blanco	1	3

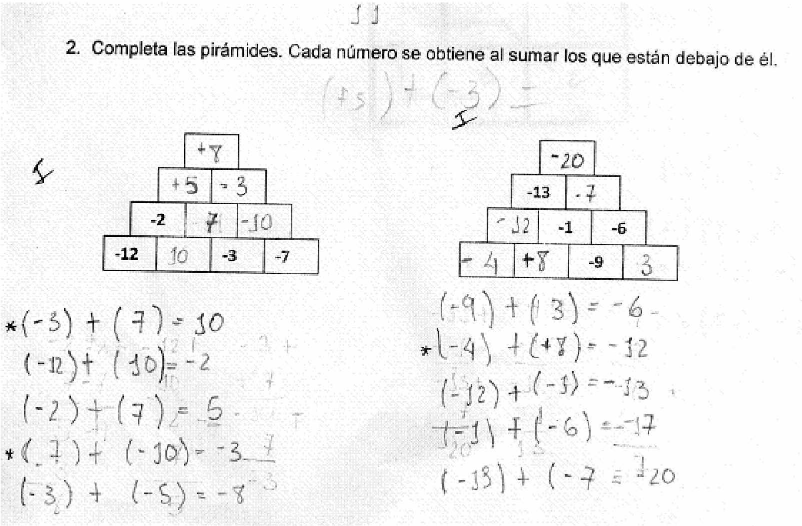
Tal ves si hubieran utilizado el modelo hubiesen tenido mejores resultados, como lo considera Bell (1982, pág. 199), pues sigue convencido de que a través de los modelos es como deben introducirse los enteros.

Entre los estudiantes que presentaron ésta dificultad se encuentran María, Lidia y Diana las cuales justifican su respuesta de la siguiente forma:

María



Lidia

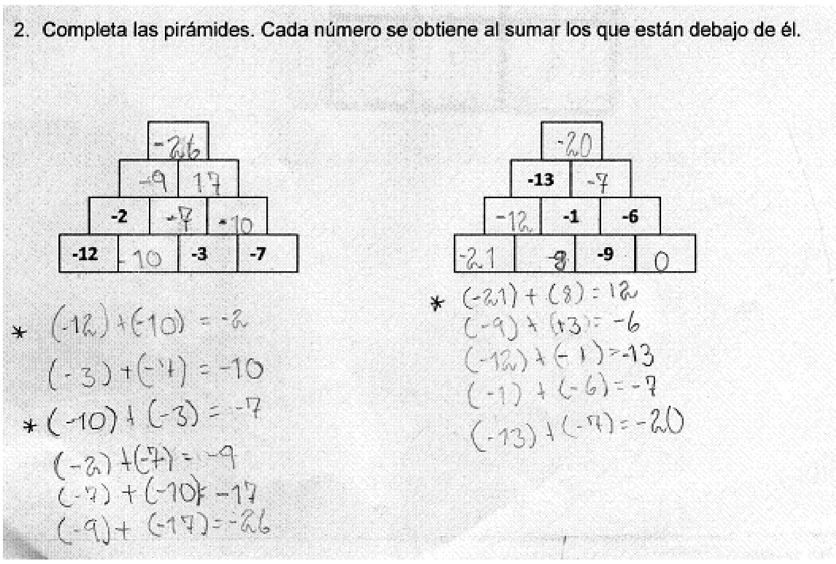


2. Completa las pirámides. Cada número se obtiene al sumar los que están debajo de él.

*(-3) + (7) = 10
(-12) + (10) = -2
(-2) + (7) = 5
*(7) + (-10) = -3
(-3) + (-5) = -8

(-9) + (3) = -6
*(-4) + (+8) = -12
(-12) + (-1) = -13
(-1) + (-6) = -17
(-13) + (-7) = -20

Diana



2. Completa las pirámides. Cada número se obtiene al sumar los que están debajo de él.

* (-12) + (-10) = -2
(-3) + (-7) = -10
* (-10) + (-3) = -7
(-2) + (-7) = -9
(-7) + (-10) = -17
(-9) + (-17) = -26

* (-21) + (8) = 12
(-9) + (+3) = -6
(-12) + (-1) = -13
(-1) + (-6) = -7
(-13) + (-7) = -20

Además cometen el error de la utilización indebida de la regla multiplicativa de los signos Bell (Op.Cit,), considera que éste tipo de errores se debe a que los alumnos no están acostumbrados a interpretar la resta entre números positivos como diferencia (resultados de una comparación) sino, mas bien, como la acción de quitar al sustraendo al minuendo.

Desafío: Observen el siguiente laberinto de números enteros. Respetando las siguientes reglas deben encontrar un camino.

Reglas:

1. Se empieza por la casilla **AZÚL** y se termina por la casilla con **VERDE**.

2. Se avanza de una casilla a otra contigua en dirección horizontal, vertical o diagonal.

3. Desde una casilla se puede pasar a otra, solo si sumados los números inscritos en cada casilla del recorrido da el número que está en la tercera casilla.

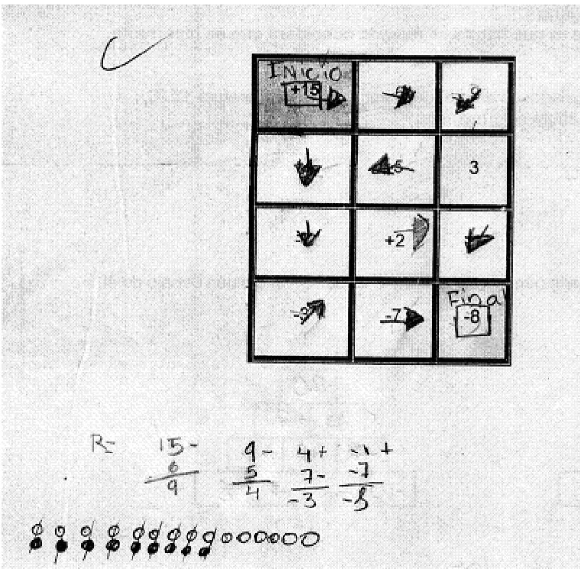
¡¡MUCHA SUERTE!!

+15	-6	9
+4	-5	3
-7	+2	-1
-3	-7	-8

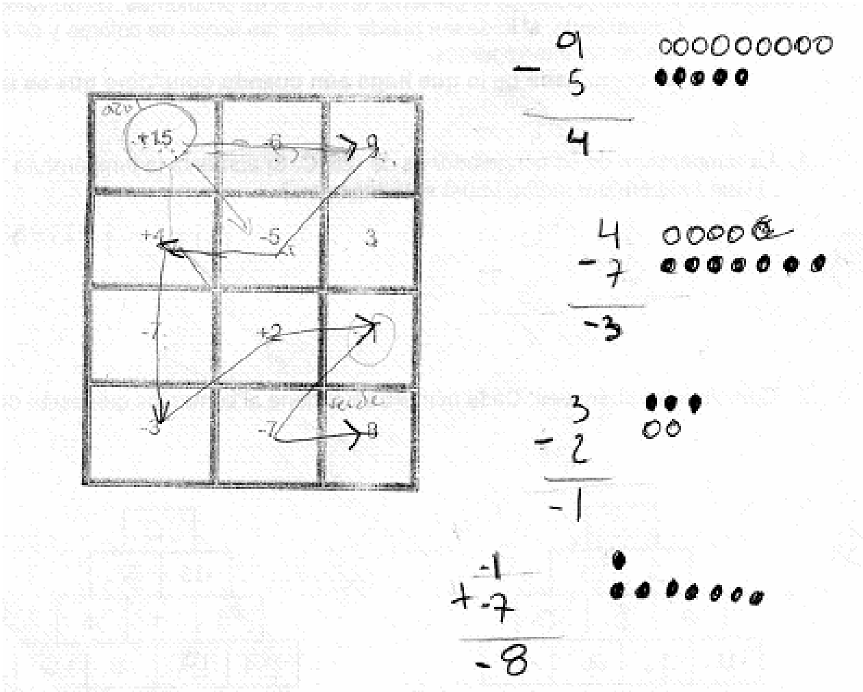
La dificultad que presentó éste problema no fue de tipo aritmético sino de tipo conceptual con respecto a que los estudiantes no manejaban correctamente que era desplazarse en dirección, vertical o diagonal, debido a esto se les explicó los términos y seguidamente los estudiantes continuaron con la actividad sin ningún inconveniente.

Llama la atención en este estudio que, en la mayoría de las adiciones y sustracciones la estudiante **Clarisa** y **María** recurrieron únicamente al modelo para plantear la expresión sintáctica. Se puede afirmar que ambas estudiantes prefieren en sus acciones el lenguaje simbólico al modelo concreto.

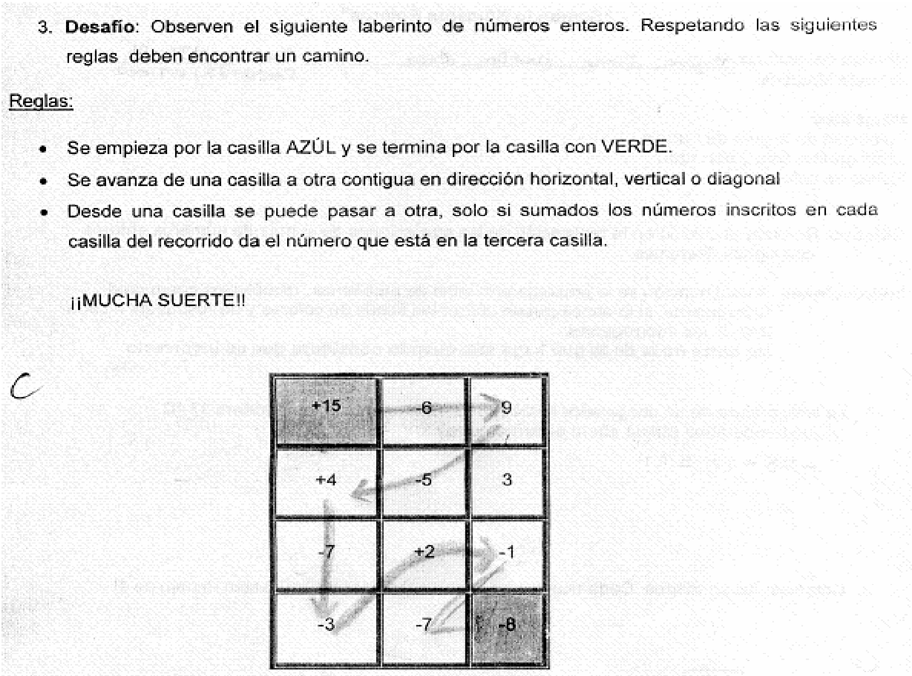
Clarisa



María



Hubo estudiantes que encontraron el camino sin ningún problema como es el caso de **Brayan**:



3. **Desafío**: Observen el siguiente laberinto de números enteros. Respetando las siguientes reglas deben encontrar un camino.

Reglas:

- Se empieza por la casilla AZÚL y se termina por la casilla con VERDE.
- Se avanza de una casilla a otra contigua en dirección horizontal, vertical o diagonal
- Desde una casilla se puede pasar a otra, solo si sumados los números inscritos en cada casilla del recorrido da el número que está en la tercera casilla.

¡¡MUCHA SUERTE!!

C

+15	-6	9
+4	-5	3
-7	+2	-1
-3	-7	-8

Al finalizar la actividad se les preguntó a los estudiantes ¿En cuál problema tuvieron mayor dificultad, si en los tres problemas tenían aplicar las reglas para operar con enteros con distinto signo?

Ellos plantearon que en el problemas **2**, debido a que requería de más tiempo y esfuerzo y sobre todo "Pensar Mucho Más" ya que tenían que encontrar los números que faltaban, en cambio en el problema **1** estaba "Muy Fácil "y en problema **3** los números allí estaban sólo era de ir probando las operaciones y encontrar el camino.

Actividad N°4

Restando Números Enteros"

El objetivo central de esta actividad era afianzar el cálculo mental y la seguridad en la realización de las operaciones de sustracción de números enteros, para ello se plantearon los siguientes problemas:

1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km.
¿Qué distancia recorrió?

Las respuestas dadas a éste problema por los estudiantes ponen de manifiesto que en las operaciones de adición y sustracción surge una ambigüedad entre el número negativo y operación de sustracción.

A continuación se muestran 4 situaciones donde se presenta la ambigüedad mencionada.

Situación 1 Clarisa


1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km. ¿Qué distancia recorrió?

$(+150)+(-100)=+250$

$$\begin{array}{r}150+\\100\\\hline 250\end{array}$$

La estudiante **Clarisa** prioriza en un principio la adición sobre la sustracción, no le da sentido de sustraendo el número signado -100.

Situación 2 Lidia

1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km. ¿Qué distancia recorrió?

(+150) − (+100) = (+50)

Súbio (+150) y retrocedió (-100) y el resultado = (+50)

Es importante señalar que **Lidia** interpreta el único signo menos (+150) - (+100) = considerando que tiene naturaleza dual, es decir, advierte que el signo está vinculado al número y también lo considera como signo de operación y cree que éste hecho puede ocurrir simultáneamente.

Situación 3 Marilyn

1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km. ¿Qué distancia recorrió?

(+150)+(-100)= -50

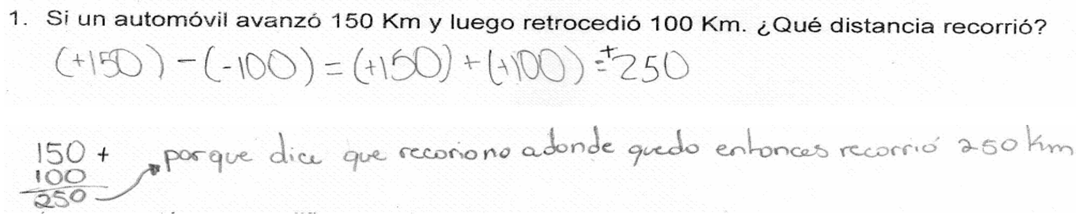
R=//Recorrio -50 Km.

Considera los signos + y - como un solo signo: - , en donde el número signado – 100 se convierte en el sustraendo, realizando una sustracción de números naturales, pero no toma en cuenta el hecho de que el resultado tiene que ser positivo.

Hubo estudiantes que en sus respuestas fueron incorrectas debido a que no entendieron el problema, como es el caso de Arella.

Quién justifica de la siguiente manera:

Situación 4 Arella



1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km. ¿Qué distancia recorrió?

(+150) − (-100) = (+150) + (+100) = +250

150 + 100 = 250 porque dice que recorrio no adonde quedo entonces recorrió 250 km

Si éste hubiese sido el planteamiento correcto Arella distingue el signo del número (unario) y el signo de operación (binario), se encuentra ante la expresión sintáctica: (150) – (- 100) =, aplica la ley de los signos (-) (-) = +, y desaparece la sustracción.

Como se puede observar en la resolución de adiciones y sustracciones de enteros, se dotó de múltiples sentidos a los números negativos que corresponde con los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002).

2. Imagina que estás en un edifico que tiene 20 pisos sobre el nivel del suelo y que tiene cuatro subterráneos para estacionamiento de autos. Al piso que está al nivel del suelo lo llamaremos piso cero.

a) Ingresas al ascensor en el piso cero, subes dos pisos, bajas tres, subes cuatro. ¿En qué piso te encuentras ahora?

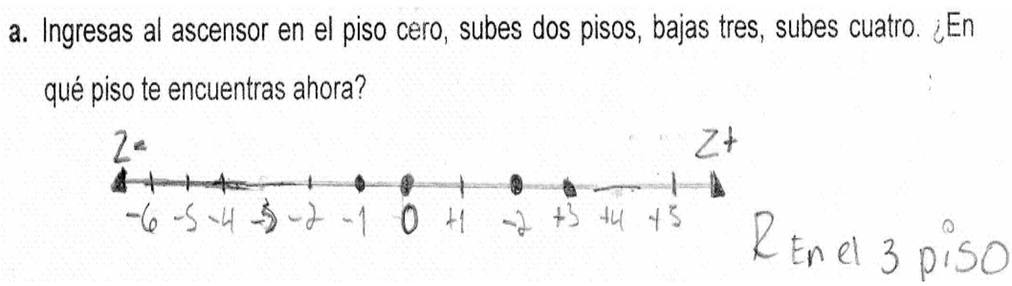
b) Ingresas al primer subterráneo, es decir, en el piso menos uno, bajas un piso, subes tres, bajas uno, bajas dos y subes tres.
¿En qué piso te encuentras ahora?

En éste segundo problema las respuestas de los alumnos se concentran 3 estrategias de resolución: usar la representación de la recta numérica, imaginarse un edificio y contar los pisos que hay que bajar hasta llegar a la planta y numéricamente, sin ninguna representación o imagen real, planteando operaciones. Problemas con la misma estructura son resueltos por los alumnos con distinta estrategia según el contexto, según lo manifiesta Duval (1999).

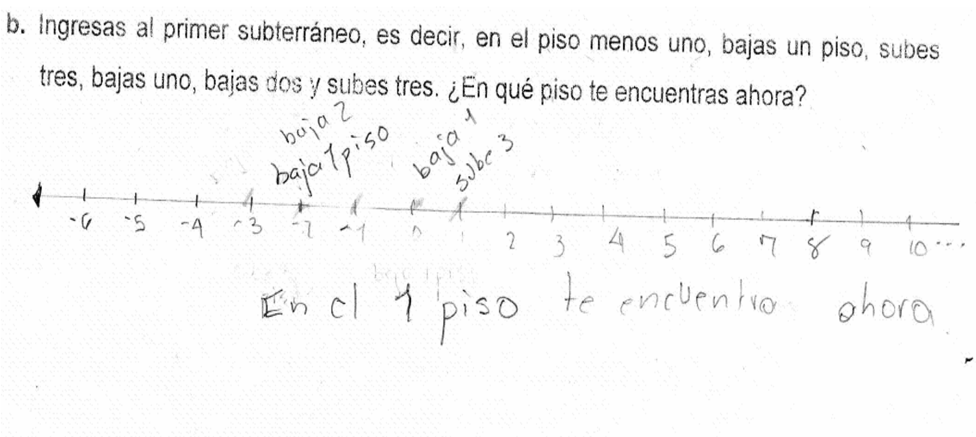
A continuación se presentan algunas de la respuesta acertadas dadas por los algunos alumnos**:**

.

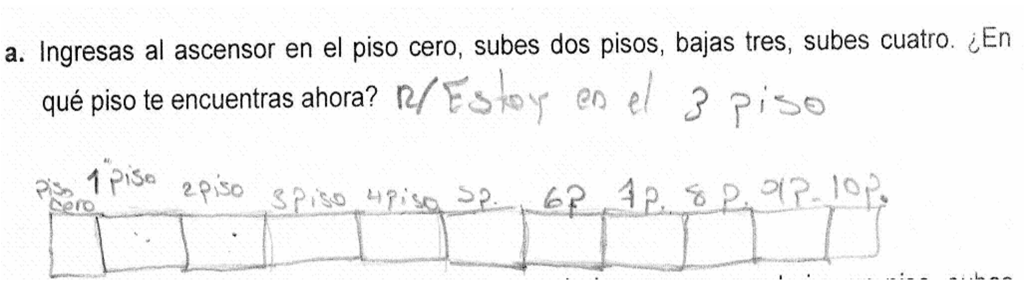
Marcos



Delia



Axel



Lidia

a. Ingresas al ascensor en el piso cero, subes dos pisos, bajas tres, subes cuatro. ¿En qué piso te encuentras ahora?

$(+2) + (-3) + (+4) = (+3)$

Subo $(+2)$ pisos, bajo (-3), Subo $(+4) = (+3)$

Giusue

b. Ingresas al primer subterráneo, es decir, en el piso menos uno, bajas un piso, subes tres, bajas uno, bajas dos y subes tres. ¿En qué piso te encuentras ahora?

$(-1) - (-1) = (-1) + (+1) = 8$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \rightarrow 0 \quad -2 \rightarrow (1$

En el piso 1

Entre los alumnos que no acertaron en sus respuestas que en su mayoría utilizaron como estrategia plantear las operaciones tenemos los casos de **Iris y Ruth.**

Iris

2. Imagina que estás en un edifico que tiene 20 pisos sobre el nivel del suelo y que tiene cuatro subterráneos para estacionamiento de autos. Al piso que está al nivel del suelo lo llamaremos piso cero. (+20) + (+4) = (+20) − (−4 = +16

   a. Ingresas al ascensor en el piso cero, subes dos pisos, bajas tres, subes cuatro. ¿En qué piso te encuentras ahora? +5

   (+2) − (−3) + (+4) = +5

   b. Ingresas al primer subterráneo, es decir, en el piso menos uno, bajas un piso, subes tres, bajas uno, bajas dos y subes tres. ¿En qué piso te encuentras ahora?

   +3 (−1) + (+3) (−1) (−2) − (+3) = +3

Ruth

2. Imagina que estás en un edifico que tiene 20 pisos sobre el nivel del suelo y que tiene cuatro subterráneos para estacionamiento de autos. Al piso que está al nivel del suelo lo llamaremos piso cero.

   a. Ingresas al ascensor en el piso cero, subes dos pisos, bajas tres, subes cuatro. ¿En qué piso te encuentras ahora?

   (+2) (−2) (+2) = (+4) = en el piso 4 sobre el nivel del suelo.

   b. Ingresas al primer subterráneo, es decir, en el piso menos uno, bajas un piso, subes tres, bajas uno, bajas dos y subes tres. ¿En qué piso te encuentras ahora?

   (−1) (−2) (+2) (+1) (−2) (+2) = en el piso 2 sobi el nivel del suelo

En éste problema surgió la novedad (en ocasiones, dificultad) de la identificación de la suma y la resta. Es decir, sumar (restar) un número a otro es restarle (sumarle) su opuesto. Resulta bastante complejo para los alumnos comprender esta identificación en cada una de las dimensiones: abstracta, contextual y de recta.

En la dimensión contextual los alumnos tienen fuertemente arraigada la idea de que un problema de sumar es «añadir», «ganar», mientras que restar significa lo contrario: «quitar», «perder». Ahora ambas ideas confunden a los alumnos, parece así una doble forma de expresar las situaciones numéricas y resulta básica la integración de las dos ideas contrapuestas de sumar y restar, propias de los números positivos, en una única idea de adición de números
(Bruno y Martinón, 1996).

Recorte las piezas de la figura 2, encájalas en la figura 1, de tal manera que cada operación quede con el resultado que le corresponde:

Figura 1

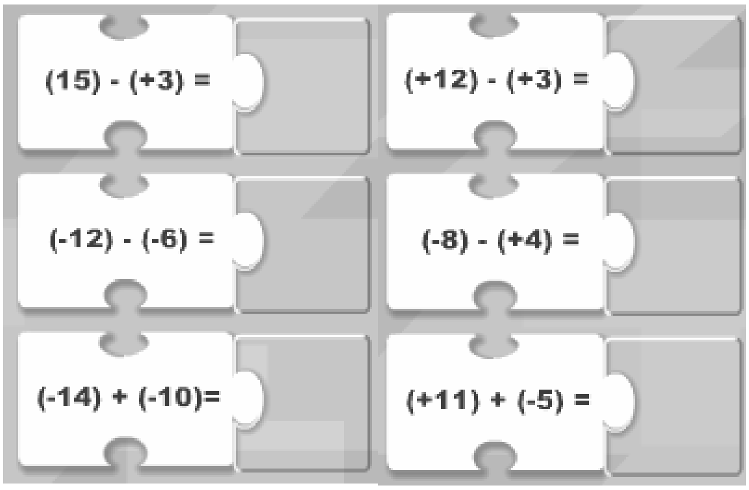
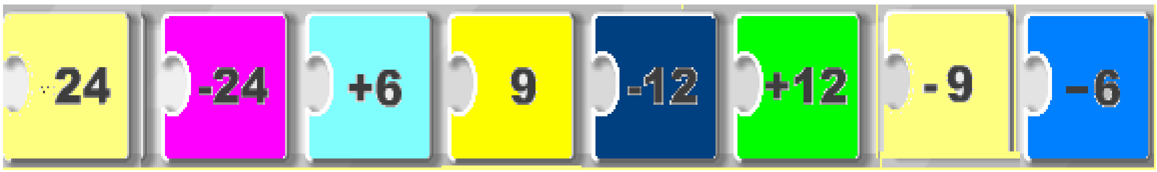


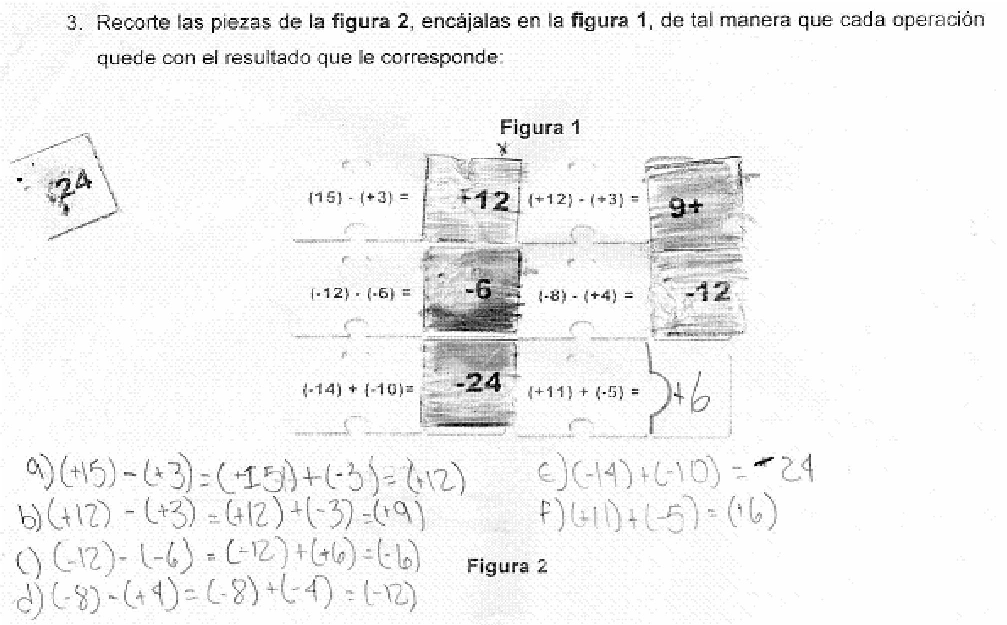
Figura 2



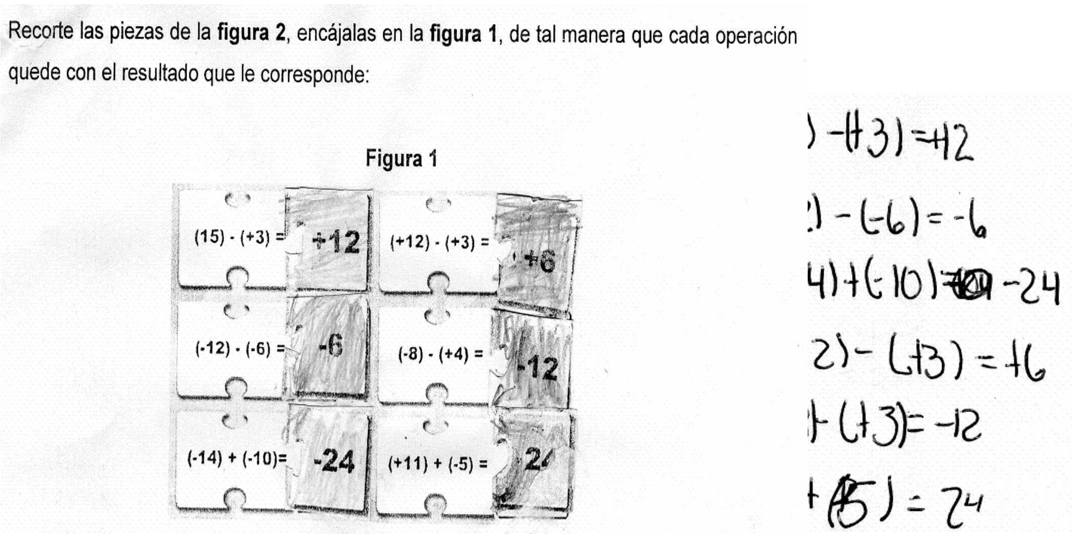
En este problema no se presentó mayor dificultad, ya que los alumnos tenían que poner en práctica lo aprendido en las sesiones anteriores.

Como es el caso de las estudiantes Ángela, Ruth y María, quienes justificaron de la siguiente manera:

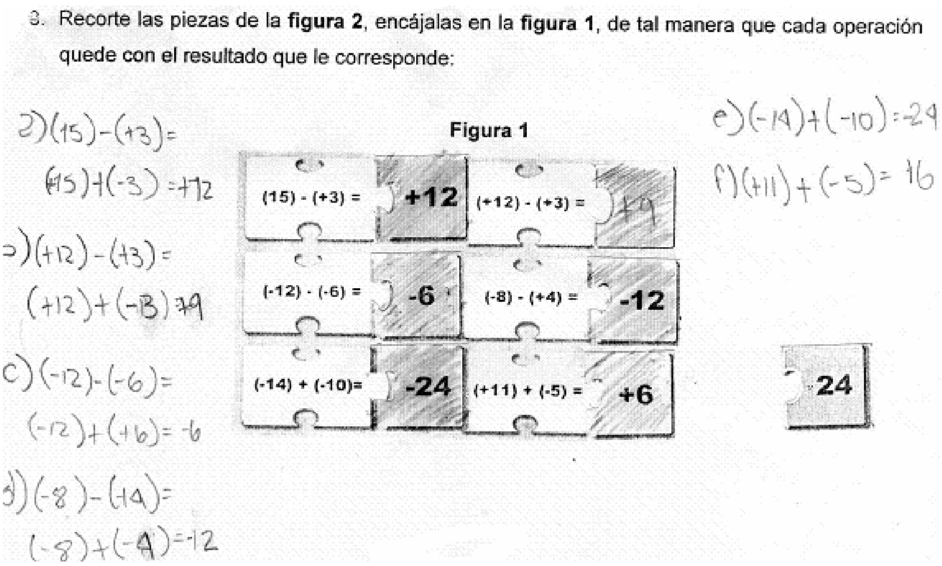
Ángela



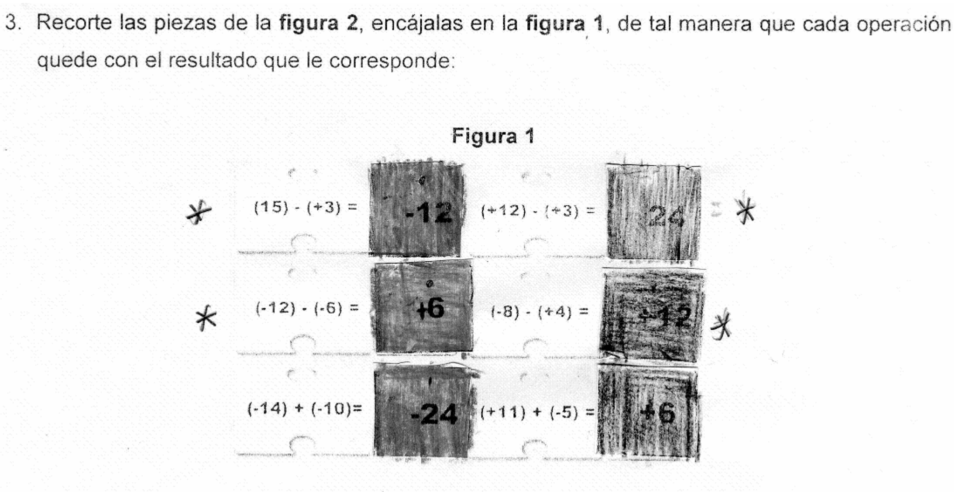
Ruth



María



Sin embargo entre los alumnos que no manejan correctamente las restas de números negativos con minuendo mayor que el sustraendo ni las sumas y restas de números de distinto signo, se tiene el caso de la alumna Delia, la cual respondió de la siguiente forma:



CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

La investigación que se llevó cabo en esta tesis pretende abarcar no sólo algunos aspectos relacionados con problemas de aprendizaje en la adición y sustracción de números enteros, sino un panorama amplio de las dificultades existentes en este tema. En particular, se cuidó el hecho de solicitar diferentes representaciones para analizar sus representaciones funcionales y el uso de las representaciones institucionales.

De los productos obtenidos, tenemos representaciones de tipo: funcional, recta numérica y el uso del modelo operatorio de fichas en un variedad de situaciones que, según lo esperado, constituirían una muestra representativa de los resultados obtenidos.

A continuación se presentan las conclusiones con cada uno de los objetivos que se pretendían lograr en éste estudio:

- ✓ El primer objetivo que se planteó en éste estudio fue el de analizar la estructura **Conceptual** relativa al conocimiento en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

- En la dimensión contextual los estudiantes tienen fuertemente arraigada la idea de que un problema de sumar es «añadir», «ganar», mientras que restar significa lo contrario: «quitar», «perder», lo cual dificultaba en algunos casos resolver operaciones con números enteros de igual y distinto signo.

- Los estudiantes le dan el uso implícito de los signos aritméticos como signos operativos, en unos casos, o predicativos en otros, tanto en la manipulación de expresiones numéricas como literales, logrando que esta distinción llegue a formularse con claridad.

- ✓ El segundo objetivo fue el de analizar los sistemas de **Representación** relativos al conocimiento matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

- Se utilizó, por parte de los estudiantes, distintos tipos de representación, se detectó entre sus producciones el carácter funcional de esas representaciones (Hitt, 2006).

- Se logró que los estudiantes resolvieran operaciones sintácticamente sin la presencia explícita del Modelo Operatorio de Fichas.

- Además del Modelo operatorio de Fichas los estudiantes concentraron sus respuestas en dos estrategias de resolución: usar la recta numérica y plantear una operación.

- Los modelos concretos que se utilizan en la enseñanza de números justifican con facilidad la suma y con cierto grado de dificultad la resta. Además se constata lo que bibliográficamente se encontró, el obstáculo epistemológico de la aceptación del número negativo.

- El modelo utilizado es un método de enseñanza de tipo constructivista, ya el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de este modelo concreto, le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo “real” al mundo de los símbolos escritos de la matemática.

- ✓ El tercer objetivo fue el de analizar las dificultades **Sintácticas** del contenido relativo al conocimiento didáctico matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

- Se dotó por parte de los estudiantes múltiples sentidos a los números negativos que corresponde con los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002). Ignorancia por algunos estudiantes de la triple naturaleza de la sustracción (completar, quitar y diferencia entre dos números) y de la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número).

- Los estudiantes lograron un progreso aunque incipientemente hacia la extensión del dominio numérico, debido a que pudieron sustraer un número mayor en valor absoluto de un número menor en valor absoluto.

- ✓ Y el cuarto y último objetivo que se planteó en éste estudio fue el de identificar las dificultades **Operativas** presentadas por los alumnos en la adición y sustracción de los números enteros.

- Se intentó a través de esta investigación romper con el esquema clásico de la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros que consiste en dar la definición y las reglas de las operaciones para luego ejercitar la técnica.

- Los resultados expuestos en este trabajo ratifican resultados de investigación precedentes: problemas aditivos que son perfectamente asimilados con números positivos presentan dificultades cuando en ellos hay negativos.

- Los resultados muestran que los estudiantes lograron apropiarse sin mayor dificultad de las operaciones de adición de números enteros con igual y distinto signo, presentando un poco de dificultad en la sustracción sobre todo cuando tenía que operar números enteros con igual signo, ya que tendían a confundir la operación con la adición de números enteros con signos iguales.

- La utilización de los problemas como método de enseñanza de las operaciones aditivas de los números negativos exige que los alumnos se familiaricen lo suficiente con determinadas situaciones problemáticas o con determinadas estructuras de problemas, tal como indica Bell (1986).

Quedan líneas abiertas de investigación, tal vez las más importante son las preconcepciones y concepciones que tienen los estudiantes frente al número negativo y las operaciones adición y sustracción de números enteros.

Las prolongaciones de esta propuesta sería por una parte fortalecer la situación relacionada con la sustracción y por otra intentar una propuesta en esta misma línea para la multiplicación de números enteros.

RECOMENDACIONES

Después de haber finalizado el proceso de investigación, al reflexionar se pueden mencionar algunas recomendaciones que se pretenden sean útiles para aquellos que realizan el proceso de enseñanza aprendizaje de las operaciones básicas con números enteros con alumnos de séptimo de grado.

1. Para que los estudiantes tengan conocimientos significativos durante su educación se debe establecer el proceso de instrucción como algo que requiere tiempo y esfuerzo. Que va más allá de una clase, y continúa fuera de ésta.

2. El maestro debe reconocer la importancia de su papel con los educandos y desempeñar su labor docente buscando cumplir con los propósitos educativos y que el niño adquiera los conocimientos necesarios de las operaciones básicas con números enteros, para poderlas manejar en el medio que lo rodea.

3. Para trabajar con las operaciones básicas con números enteros es factible elaborar una planificación, donde se tomen en cuentas las necesidades e intereses de los alumnos, para crear un ambiente en la clase que permita que el estudiante llegue a su propio aprendizaje.

4. Se debe tratar que el alumno llegue a su propio aprendizaje significativo, respetando sus formas de trabajo, su ritmo y sus intereses. También generar que se integren el trabajo colectivo e individual para que sus conocimientos sean compartidos, analizado y se vayan reforzando.

5. Por otro lado, la planeación será más significativa cuando se apliquen estrategias que busquen involucrar al estudiante de manera dinámica y atractiva, donde se apliquen sus habilidades y destrezas para llegar a sus propios resultados en las operaciones y también para practicar y desarrollar el razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas.

6. En cuanto al momento indicado para la introducción del modelo, se recomienda ponerlo en práctica al inicio del estudio de los números enteros.

7. El uso de el modelo operatorio de fichas en el aula de clases, puede hacerse de varias maneras, dependiendo de los conocimientos previos que tengan los estudiantes sobre los números enteros. La efectividad del modelo, en el proceso de enseñanza aprendizaje, dependerá por lo tanto del **momento apropiado** para introducirlo, así como también **del proceso de desarrollo del modelo.**

REFERENCIAS

1. Bruno, A. & Martinón, A. (1996) Números negativos: una revisión de investigaciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* 9, 98 – 108.

2. BRUNO, A. & GARCÍA, J. A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos*. Relime*, *7* (25 – 46).

3. Bruno, A. & Martinón A. (1996). "Los números negativos sumar = restar". Uno, 10 (123 - 133).

4. Bruno (1996). Problemas de Resolución de Problemas Aditivos con Números Negativos. Págs. 249- 257. Artículo recibido en noviembre de 1995 y aceptado en abril de 1997.

5. Gallardo Cabello, Aurora. Uso de un modelo de enseñanza como recurso de investigación en el estudio de los números enteros. Págs. 311 -320.Investigaciones en matemática educativa II. Cinvestav. Grupo Editorial Iberoamericana.

6. Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 14(1). Cangas de Morrazo. Boletín del SI-IDM, 10.

7. Cid, E. (2002), *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, vol.2, 529-542. Disponible en http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf

10. Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Pre-publicaciones del seminario matemático "García Galdeano". Universidad de Zaragoza. Disponible http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf

11. Espinosa, ME. (2005). Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores en formación inicial. Tesis doctoral leída en la Universidad de Granada.

12. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. (2006, abril). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía los modelos concreto de bloques. Educación Matemática Volumen 18, núm. 1, pág. 73-97.

13. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. (2007). Las dualidades de la negatividad y el cero en la transición de la aritmética al algebra. Artículo de CINVESTAV, México.

14. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. Emergencia de los números enteros. Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

15. Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, Vol. 8, pp. 255-271.

16. Hitt F. (2006). Students’ functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 11, pp. 253-268.

17. Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students’ functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. http://tsg.icme11.org/tsg/show/21.

18. Hitt Fernando, Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículo. Revista de Educación Matemática. Vol. 10. 1998. pág. 23-45.

19. S. Parra, Hugo. El conocimiento Didáctico Relativo a la Adición en números enteros en Futuros Profesores de Matemática. Disponible en http://simposio.una.edu.ve/archivos/ConocimientoDidacticoAdicion.pdf

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Aprendizaje de Los Números Enteros: Una Experiencia Significativa

ANEXOS

Presenta

Dania Yulisa Borjas Franco

Tegucigalpa M. D. C. Junio de 2009

ANEXO

En este anexo incluimos las actividades diseñadas para la experimentación.
Fueron cinco en total. La primera fue la prueba diagnóstica la cual sirvió para determinar el grado de conocimiento de los estudiantes acerca de los números enteros y cuatro fueron desarrollados en las sesiones de clases las cuales tenían como objetivos contestar las preguntas propuestas en esta investigación.

A continuación se presenta el orden en que se desarrollaron las actividades.

- Prueba diagnóstico
- Actividad 1 “Números y Fichas”
- Actividad 2 “Cálculo Mental con Números
- Actividad 3 “Sumando Números Enteros”
- Actividad 4 “Restando Números Enteros”

Escuela Nacional de Música

Prueba Diagnóstica

Nombre del alumno: ___________________________________ Curso: ______
Profa: Dania Y. Borjas Fecha: / /

Objetivo: Conocer las habilidades, aptitudes y destrezas que poseen lo estudiantes con respecto a la operatividad con números enteros.

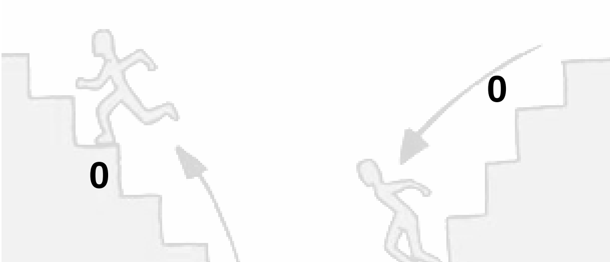
Instrucciones: A continuación se le presentan una serie de problemas los que tiene que resolver en forma clara y ordenada dejando todos sus procedimientos por escrito aunque estuviesen incompletos o los considere incorrectos.

- **Con el número +30 indicamos la posición de un globo con respecto al mar. ¿Qué números asignarías a la avioneta, al barco y al submarino?**

- **Un buzo que hace trabajos en una obra submarina se encuentra en la plataforma base a 6 m sobre el nivel del mar y realiza los desplazamientos siguientes:**

  - Baja 20 metros para dejar material.
  - Baja 12 metros más para hacer una soldadura.
  - Sube 8 metros para reparar una tubería.
  - Finalmente, vuelve a subir la plataforma.
    ¿Cuántos metros ha subido en su último desplazamiento hasta la plataforma?

- **Expresa con un número los desplazamientos que realizan Pedro y Juan en cada escalera.**



- **El empresario de un parque acuático hace este resumen de la evolución de sus finanzas a lo largo del año.**

  - De enero-mayo pérdidas de Lps. 3,475 mensuales.
  - De junio-agosto ganancias de Lps. 8230 mensuales.
  - De septiembre ganancias de Lps. 1,800.
  - De octubre –diciembre pérdidas de Lps. 3,970 mensuales.

¿Cuál fue el balance final del año?

Representa en la recta numérica cada pareja de números y encierra en un círculo el número mayor de cada pareja.

- 3 y 1.
- -7 Y -5

a) Ubica cada pareja de números en la recta numérica.
b) ¿Quién es el mayor de las dos parejas? ¿Por qué?

-8 7 - 6 -5 4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Resuelva los siguientes problemas en forma clara y ordenada:

a) "Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero en la recta numérica y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿En que kilómetro está la moto?".

b) "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros. ¿Cuál era la posición del delfín después de este movimiento?".

Haz las siguientes sumas y restas ayudándote en la recta:

-11 -10 -9 -8 - 7 - 6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

a) (10) – (5) =

b) (- 3) – (- 6) =

c) (- 2) + (7) =

d) (4) + (-5)

e) (2) +(0) =

f) (4) + (-5)

Fichas de Colores

Actividad N°1

"Números y Fichas"

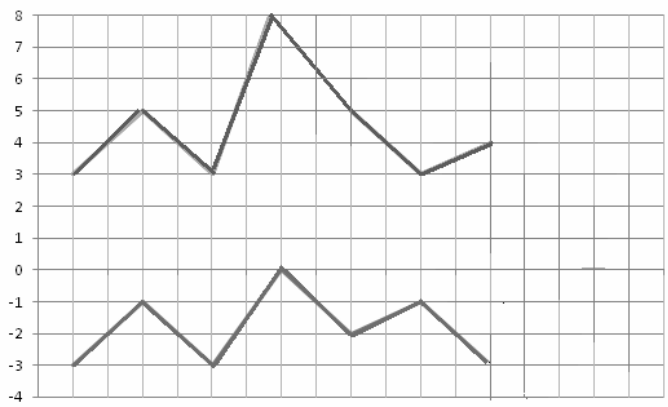
Nombre del alumno: ____________________________________ Curso: ______
Profa: Dania Yulisa Borjas Fecha: / /

Materiales:
Fichas de Colores.
Fotocopia de la guía de trabajo.
Lápiz grafito, tinta y borrador.

Objetivo: Reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo.

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo utilizando fichas de colores y como crea conveniente de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere que es incorrecto.**

1. El grafico muestra las temperaturas máximas y las mínimas tomadas en un observatorio meteorológico de una ciudad durante una semana del mes de Enero.



1. a Escribe con números enteros las temperaturas máximas de los sietes días.

1. b Escribe con números enteros las temperaturas mínimas de los siete días.

1. Calcula **la temperatura media de las máximas**. (*Recuerda que para calcular la media de un conjunto de datos numérico se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número total de datos*).

2a. ¿Qué signo tiene el resultado? ¿A qué se debe?

2. Calcula **la temperatura media de las mínimas.**

3. a ¿Qué signo tiene el resultado? ¿A qué se debe?

3. Responda:

4. a ¿Qué número sumado a -30 da -80?

4a1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

4. b ¿Qué número sumado a 120 da 200?

4. b1 ¿Por qué seleccionaste ese número?

Fichas de Colores

Actividad N°2

“Calculo Mental con Números”

Nombre del alumno: ________________________________ Curso: _____
Profa: Dania Yulisa Borjas Fecha: / /

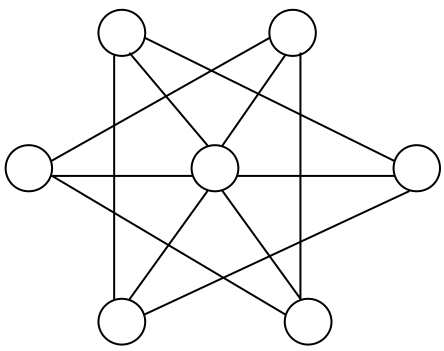
Materiales:
Fotocopia de la guía de trabajo.
Lápiz grafito, tinta y borrador.

Objetivo: Reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas.

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo sin utilizar las fichas de colores y como crea conveniente de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere que es incorrecto.**

1. **Hexágono mágico.**

Acomoda los números de 1 al 7, uno por círculo, de modo que cada uno de los triángulos grandes y cada una de las diagonales sumen igual. Nota: No se repite ningún número.



Responda:

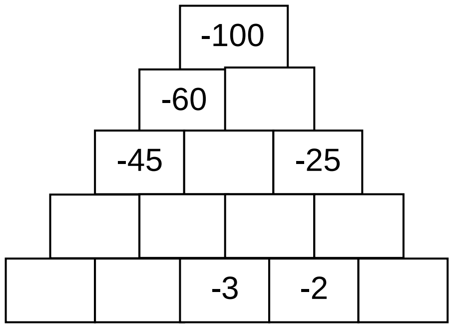
a) ¿Qué número suma cada triangulo?

b) ¿Qué signo tiene el número encontrado en la suma?

c) ¿A qué se debe?

2. <u>El montón de piedras</u>.

Cada una de las piedras del montón reposa sobre dos de la fila inferior. El número de cada piedra representa la suma entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Completar los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.



Responda:

- ✓ ¿Qué número le sumó a -60? ¿Por qué?
- ✓ ¿Para completar los números que faltaban utilizó enteros positivos ó enteros negativos? ¿Porque?

3. Responda:

- ✓ ¿Qué número sumado a -90 le da -120?
- ✓ ¿Qué número sumado a -45 le da -80?

Más Fichas de Colores

Actividad N°3

“Sumando Números Enteros”

Nombre del alumno: ___________________________________ Curso: _____
Profa: Dania Yulisa Borjas Fecha: / /

Materiales:
Fotocopia de la guía de trabajo.
Lápiz grafito, tinta y borrador.
Fichas de colores.

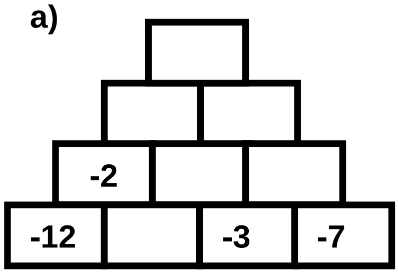
Objetivo: Reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con signos diferentes.

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo sin utilizar las fichas de colores y como crea conveniente de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere que es incorrecto.**

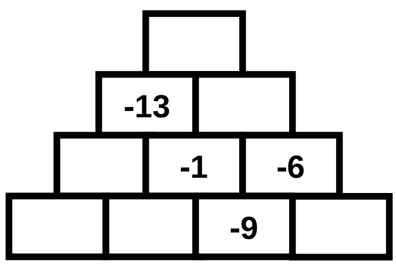
1. La temperatura de un congelador es de -28 °C. Si aumenta la temperatura 17 °C, ¿Qué temperatura marca ahora el termómetro ?

2. Completa las pirámides. Cada número se obtiene al sumar los que están debajo de él.

a)



b)



3. **Desafío**: Observen el siguiente laberinto de números enteros. Respetando las siguientes reglas deben encontrar un camino.

<u>**Reglas:**</u>

- Se empieza por la casilla AZÚL y se termina por la casilla con VERDE.
- Se avanza de una casilla a otra contigua en dirección horizontal, vertical o diagonal.
- Desde una casilla se puede pasar a otra, solo si sumados los números inscritos en cada casilla del recorrido da el número que está en la tercera casilla.

¡¡MUCHA SUERTE!!

+15	-6	9
+4	-5	3
-7	+2	-1
-3	-7	-8

Más Fichas de Colores

Actividad N°4

“Restando Números Enteros”

Nombre del alumno: ________________________________ Curso: _____
Profa: Dania Yulisa Borjas Fecha: / /

Materiales:
Fotocopia de la guía de trabajo.
Lápiz grafito, tinta y borrador.
Fichas de colores.

Objetivo: Reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con signos diferentes.

Instrucciones: A continuación se le presenta un problema resuélvalo sin utilizar las fichas de colores y como crea conveniente de respuesta a cada una de las interrogantes. **No borre nada de lo que haga aún cuando considere que es incorrecto.**

1. Si un automóvil avanzó 150 Km y luego retrocedió 100 Km.
¿Qué distancia recorrió?

.

2. Imagina que estás en un edifico que tiene 20 pisos sobre el nivel del suelo y que tiene cuatro subterráneos para estacionamiento de autos. Al piso que está al nivel del suelo lo llamaremos piso cero.

a. Ingresas al ascensor en el piso cero, subes dos pisos, bajas tres, subes cuatro. ¿En qué piso te encuentras ahora?

b. Ingresas al primer subterráneo, es decir, en el piso menos uno, bajas un piso, subes tres, bajas uno, bajas dos y subes tres.
¿En qué piso te encuentras ahora?

3. Recorte las piezas de la figura 2, encájalas en la figura 1, de tal manera que cada operación quede con el resultado que le corresponde:

Figura 1

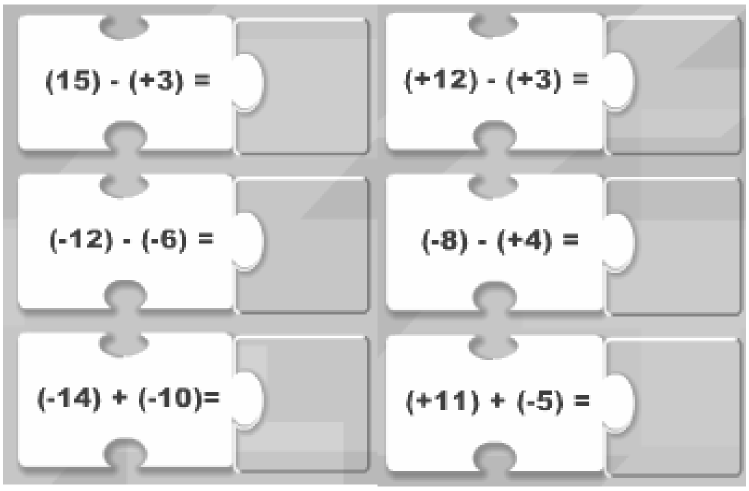
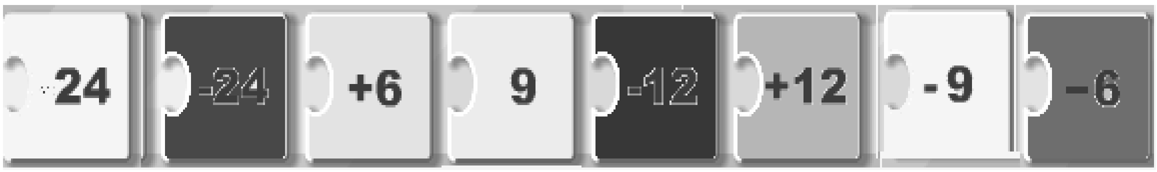


Figura 2



GLOSARIO

Actividad: Es el medio de intervención sobre la realidad secuencial e integrada de diversas acciones necesaria para alcanzar las metas y objetivos específicos de un proyecto.

Aprendizaje: es el proceso de adquirir conocimientos, habilidades, actitudes o valores a través del estudio, la experiencia o la enseñanza.

Es un cambio relativamente permanente en el comportamiento, que refleja una adquisición de conocimientos o habilidades a través de la experiencia y que puede incluir el estudio, la observación y la practica.

Conceptual: Conjunto de conceptos, principios y teorías que conforman los diferentes campos del conocimiento. Aplicar, identificar, enumerar, señalar.

Dificultades de Aprendizaje: son aquellas que sufren los estudiantes que sin tener una inteligencia inferior a la media, discapacidad, falta de motivación, déficit sensorial, presentan.

Experiencia significativa: es una práctica concreta, sistemática, evidenciable, autorregulada y contextualizada; que se orienta al fortalecimiento institucional mediante el mejoramiento de las áreas de la gestión escolar (directiva, pedagógica, administrativa y comunitaria), del establecimiento educativo en el cual se circunscribe.

Enseñanza: Enseñar desde una perspectiva muy general, es comunicar algún conocimiento, habilidad o experiencia a alguien con el fin de que lo aprenda, empleando para ello un conjunto de métodos y técnicas.

Representación: es el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, (Espinosa, 2005).

Pensamiento Numérico: Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos.
Usar los números para describir situaciones de medida con respecto a un punto de referencia (altura, profundidad con respecto al nivel del mar, pérdidas, ganancias, temperatura, etc.).

Modelo de Enseñanza: Los modelos de enseñanza crean ambientes y proporcionan lineamientos generales para diseñar y construir situaciones de enseñanza-aprendizaje de acuerdo a determinados objetivos y tipos de contenido.

RESUMEN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN

VICE RECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

DIRECCIÓN DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TESIS DE MAESTRIA:

APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS ENTEROS UNA “EXPERIENCIA SIGNIFICATIVA” EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO GRADO DE LA ESCUELA NACIONAL DE MÚSICA

TESISTA:

Lic. DANIA YULISA BORJAS FRANCO

ASESOR DE TESIS:

Dr. FERNANDO HITT ESPINOZA

TEGUCIGALPA, M.D.C Junio de 2009

INTRODUCCIÓN

> "Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata." (Pólya en García Cruz, 2002).

A lo largo de toda la Enseñanza Básica, los números han conformado un tema central en la Educación Matemática.

En estos últimos años, el interés de la enseñanza se ha centrado principalmente en el aprendizaje significativo, de tal forma que se logre en los estudiantes un avance para el conocimiento de nuevos objetos matemáticos.

El fuerte empuje que se ha venido dando en el mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin duda tiene que ver en la forma de cómo mostrar los objetos matemáticos y conceptos, o tal vez diríamos en cómo los alumnos pueden lograr por sí mismos construir su propio concepto o imagen del objeto matemático en juego, sin duda, hoy en día existe una oportunidad incomparable para comunicar mejor la matemática escolar.

Un aspecto muy importante del desarrollo de este tópico ha sido el trabajo permanente en relación con los diferentes aspectos y usos de los números en la vida cotidiana.

Al mismo tiempo, también ha sido fundamental promover el desarrollo de habilidades asociadas a los números y las operaciones que vayan más allá de la simple memorización y/o aplicación de reglas y definiciones.

Durante la experiencia como profesora de aula observé que los alumnos(as) del primer ciclo básico (7º grado) presentaban dificultades con la adición y sustracción de números enteros; en particular cuando tenían que realizar operaciones con números negativos.

La mayoría de los profesores de matemáticas, de ciclo y de bachillerato, se quejan a menudo de que los alumnos les llegan con graves deficiencias en las operaciones elementales que se realizan con enteros, lo que se traduce en frecuentes errores en la resolución de problemas y ejercicios.

En el ámbito de la educación matemática, ha resultado difícil que los estudiantes tengan habilidad para operar con números enteros. Es posible que esta dificultad surja, porque los conocimientos adquiridos en matemática en los primeros años escolares son referidos a los números naturales y en este conjunto, las palabras agregar y aumentar están relacionadas con la adición; quitar y disminuir con la sustracción.

Sin embargo, en el conjunto de los números enteros, se observa que estas palabras, aumentar o quitar, no siempre se relacionan en forma natural con la adición y sustracción respectivamente.

En ocasiones, el cálculo de una adición con números de distintos signos puede dar como resultado un número negativo, del mismo modo ocurre en la sustracción, en donde al restar dos números positivos el resultado puede ser un número negativo.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En el estudio planteado se consideraron como objetivos los siguientes:

OBJETIVO GENERAL:

Explorar el conocimiento matemático relativo a la adición y sustracción de números enteros en alumnos de séptimo grado de educación secundaria.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Identificar las dificultades en la apropiación de los números enteros, en especial con la adición y sustracción de números enteros.

2. Analizar la estructura **Conceptual** relativa al conocimiento en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

3. Analizar los sistemas de **Representación** relativos al conocimiento matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

4. Identificar las dificultades **Operativas** presentados por los alumnos en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

5. Analizar las dificultades **Sintácticas** del contenido relativo al conocimiento didáctico matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La primera pregunta fue tomada del artículo “La Dualidad de la Negatividad y el Cero en la Transición de la Aritmética y el Algebra de Abraham Hernández y Aurora Gallardo. (CINVESTAV, México)

1. ¿Qué estrategias conocen los estudiantes con respecto al dominio de operatividad de los enteros?

2. ¿Qué significado le dan los alumnos a las operaciones?

3. ¿Cuáles son las dificultades operativas en el dominio de los enteros que presentan los estudiantes?

4. ¿Cuáles son las dificultades sintácticas en la operatividad con números negativos?

METODOLOGÍA UTILIZADA

Tipo de Investigación

La metodología de investigación es cualitativa, de corte exploratorio ya que ésta nos permite acercarnos de una manera más efectiva a los procesos afectivos y cognitivos que experimentan los estudiantes durante su aprendizaje.

Participantes en Estudio

La población es un grupo de 27 estudiantes de séptimo grado de la “Escuela Nacional de Música.

Plan para la Recolección de la Información

Para la recolección de información se aplicó una prueba diagnóstica, se desarrollaron una serie de actividades de aprendizaje y se registraron varias observaciones del desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de dichas actividades.

Procedimiento de Análisis

Se realizó un análisis de tipo cualitativo de la prueba diagnóstica y de las actividades de aprendizaje, buscando evidencias de cómo los estudiantes se apropian de la operaciones con números enteros.

Se utilizó como estrategia el Modelo Operatorio de Fichas como medio por el cual se les permitía a los estudiantes justificar bien la estructura de adición y sustracción de los números enteros.

A continuación se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, así como el de cada una de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los alumnos.

Etapa Diagnóstica

La prueba diagnóstica se aplicó a 27 estudiantes de Séptimo Grado; con ella se pretendía conocer las habilidades, aptitudes y destrezas que poseen lo estudiantes con respecto a la operatividad con números enteros.

La prueba contenía 7 problemas con varios incisos cada uno conformando un total de 15 reactivos que involucraban estructura sintáctica, sentido y significado de las operaciones y pensamiento numérico.

A continuación se muestran los resultados y un análisis de la prueba diagnóstica, aplicada a los estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música.

Prueba Diagnóstica

Aunque los estudiantes tienen mucho conocimiento sobre la resolución de problemas aditivos con números positivos, no se obtuvo tan buenos resultados al trasladarlos a los negativos, ya que en esta parte se tiene que tomar en cuenta las características específicas de los números negativos, en cuanto a los signos de los números, a las reglas operatorias, a los contextos y a la identificación de las dos operaciones.

La mayoría del estudiante ubica correctamente números enteros en la recta numérica y saben distinguir entre una pareja de números positivos quien es mayor y quien es menor, pero no ocurre lo mismo cuando tienen dos enteros negativos.
Sin embargo algunos estudiantes si entendieron los problemas y además utilizaron como estrategia para darle solución al problema la recta numérica.

Interpretan la suma y la resta de números naturales como movimientos sobre la recta numérica a derecha o izquierda del primer término, respectivamente. Se asume que sumar números positivos significa avanzar en el sentido positivo y sumar negativos avanzar en el sentido negativo.

Experiencias de Aprendizaje

Luego de aplicada la prueba diagnóstica se procedió al desarrollo experiencias de aprendizaje con el grupo seleccionado, a fin de utilizar como estrategia el Modelo Operatorio de Fichas.

Las actividades de aprendizaje se desarrollaron con el propósito de describir, explorar y corregir los problemas de aprendizaje que tienen los estudiantes con respecto a las operaciones en el conjunto de los números enteros, especialmente en la adición y sustracción.

Dichas actividades se realizaron vía un modelo de enseñanza llamado **Modelo Operatorio de Fichas** utilizado como recurso de investigación.

Antes de la aplicación de cada actividad se les enseñaba a los estudiantes como utilizar el Modelo Operatorio de Fichas para realizar las operaciones con números enteros.

Se quiere aclarar que la investigación no va enfocada al uso de Modelos Concretos para el aprendizaje de los números **enteros** sino como una estrategia de enseñanza - aprendizaje.

Se desarrollaron un total de 4 actividades de aprendizaje, las cuales se han planteado a partir de la adición y sustracción con números enteros.

A continuación se describen junto con un análisis de las respuestas de los estudiantes en cada actividad.

Actividad N°1

"Números y Fichas"

Con ésta actividad se pretendía reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con igual signo utilizando como recurso el Modelo Operatorio de Fichas.

Es importante señalar aquí que entre los alumnos que no utilizaron una representación figural el error se produjo, y en este caso que la alumna utilizó una representación funcional (en el sentido de Hitt, 2003, 2006 y 2008), la alumna parece tener mayor facilidad y seguridad para resolver los problemas utilizando representaciones.

Al respecto Fernando Hitt (1998) menciona; "El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de articular sin contradicción alguna diferentes representaciones del mismo objeto, así como el de recurrir a ellas, las representaciones, en forma espontánea durante la resolución de problemas".

Con respecto a lo anterior es importante mencionar que ninguno de los estudiantes utilizó como estrategia para resolver los problemas la representación de la recta numérica.

De lo anterior se pone de manifiesto que algunos de los estudiantes no logran por completo uno de los niveles que propone Gallardo (2002) y es el número negativo formal, el cual implica que los estudiantes ven los números negativos como resultado y no como un número en sí.

Pero ello no indica que la utilización de modelos concretos como recurso, impide su aprendizaje, por el contrario es necesario recurrir a ellos, como lo establece Cid (2002) el modelo funciona por analogía, es decir, permite obtener conocimiento sobre la noción matemática porque “se parece a ella” ó “funciona como ella”.

Actividad N°2
“Calculo Mental con Números”

El objeto de estudio de la actividad N°2 era reforzar el cálculo en la realización de operaciones de sumas de números enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas.

La intención de ésta actividad era que los estudiantes resolvieran los problemas planteados de adición de números enteros y de esta manera conocer si manejan correctamente la operaciones de enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas y además descubrieran sus reglas para operarlos.

En estos reactivos se tuvo la satisfacción de que 20 de las respuestas presentadas por los 27 estudiantes estaban correctas.
Quedó suficiente evidencia que los alumnos lograron manejar correctamente las operaciones con enteros con igual signo sin utilizar el Modelo Operatorio de Fichas.

Aunque en la **actividad 1** los estudiantes manifestaron dificultad al trabajar con números negativos, no fue el caso en ésta actividad ya que los estudiantes buscaron sus propias estrategias para dar respuesta a los problemas.

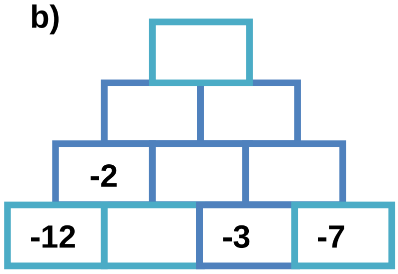
Actividad N°3
"Sumando Números Enteros"

La intención de ésta actividad fue la de reforzar el cálculo en la realización de las operaciones de sumas de números enteros con signos diferentes.

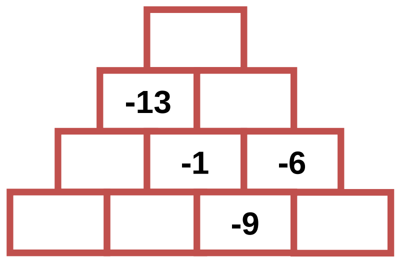
En el siguiente problema se notó que los estudiantes presentaron dificultad para darle respuesta debido que los estudiantes resuelven los problemas sin expresar la solución en términos positivos ó negativos:

1. Completa las pirámides. Cada número se obtiene al sumar los que están debajo de él.

b)



b)



Y lo podemos observar en la siguiente tabla.

Cuadro N°1

Resultados del Reactivo

Reactivos / Respuestas	2a	2b
Correctas	9	7
Incorrectas	17	14
Incompletas	0	3
En Blanco	1	3

Tal ves si hubieran utilizado el modelo hubiesen tenido mejores resultados, como lo considera Bell (1982, pág. 199), pues sigue convencido de que a través de los modelos es como deben introducirse los enteros.

En la mayoría de las adiciones y sustracciones los estudiantes recurrieron únicamente al modelo para plantear la expresión sintáctica. Se puede afirmar que los estudiantes prefieren en sus acciones el lenguaje simbólico al modelo concreto.

Al finalizar la actividad se les preguntó a los estudiantes ¿En cuál problema tuvieron mayor dificultad, si en los tres problemas tenían aplicar las reglas para operar con enteros con distinto signo?

Ellos plantearon que en el problemas **2**, debido a que requería de más tiempo y esfuerzo y sobre todo “Pensar Mucho Más” ya que tenían que encontrar los números que faltaban, en cambio en el problema **1** estaba “Muy Fácil ”y en problema **3** los números allí estaban sólo era de ir probando las operaciones y encontrar el camino.

Actividad N°4

“Restando Números Enteros”

El objetivo central de esta actividad era afianzar el cálculo mental y la seguridad en la realización de las operaciones de sustracción de números enteros.

Como se puede observar en la resolución de adiciones y sustracciones de enteros, se dotó de múltiples sentidos a los números negativos que corresponde con los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002).

En los problema las respuestas de los alumnos se concentran 3 estrategias de resolución: ***usar la representación de la recta numérica, imaginarse un edificio y contar los pisos que hay que bajar hasta llegar a la planta y numéricamente, sin ninguna representación o imagen real, planteando operaciones.*** Problemas con la misma estructura son resueltos por los alumnos con distinta estrategia según el contexto, según lo manifiesta Duval (1999).

En ésta actividad surgió la novedad (en ocasiones, dificultad) de la identificación de la suma y la resta. Es decir, sumar (restar) un número a otro es restarle (sumarle) su opuesto. Resulta bastante complejo para los alumnos comprender esta identificación en cada una de las dimensiones: abstracta, contextual y de recta.

CONCLUSIONES

La investigación que se llevó cabo en esta tesis pretende abarcar no sólo algunos aspectos relacionados con problemas de aprendizaje en la adición y sustracción de números enteros, sino un panorama amplio de las dificultades existentes en éste tema. En particular, se cuidó el hecho de solicitar diferentes representaciones para analizar sus representaciones funcionales y el uso de las representaciones institucionales. De los productos obtenidos, tenemos representaciones de tipo: funcional, recta numérica y el uso del modelo operatorio de fichas en un variedad de situaciones que, según lo esperado, constituirían una muestra representativa de los resultados obtenidos.

A continuación se presentan las conclusiones con cada uno de los objetivos que se pretendían lograr en éste estudio:

- El primer objetivo que se planteó en éste estudio fue el de identificar las dificultades **Operativas** presentadas por los alumnos en la adición y sustracción de los números enteros.

1. Se intentó a través de ésta investigación romper con el esquema clásico de la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros que consiste en dar la definición y las reglas de las operaciones para luego ejercitar la técnica.

2. Los resultados expuestos en este trabajo ratifican resultados de investigación precedentes: problemas aditivos que son perfectamente asimilados con números positivos presentan dificultades cuando en ellos hay negativos.

3. Los resultados muestran que los estudiantes lograron apropiarse sin mayor dificultad de las operaciones de adición de números enteros con igual y distinto signo, presentando un poco de dificultad en la sustracción sobre todo cuando tenía que operar números enteros con igual signo, ya que tendían a confundir la operación con la adición de números enteros con signos iguales.

4. La utilización de los problemas como método de enseñanza de las operaciones aditivas de los números negativos exige que los alumnos se familiaricen lo suficiente con determinadas situaciones problemáticas o con determinadas estructuras de problemas, tal como indica Bell (1986).

El segundo objetivo fue el de analizar la estructura **Conceptual** relativa al conocimiento en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

1. En la dimensión contextual los estudiantes tienen fuertemente arraigada la idea de que un problema de sumar es «añadir», «ganar», mientras que restar significa lo contrario: «quitar», «perder», lo cual dificultaba en algunos casos resolver operaciones con números enteros de igual y distinto signo.

2. Los estudiantes le dan el uso implícito de los signos aritméticos como signos operativos, en unos casos, o predicativos en otros, tanto en la manipulación de expresiones numéricas como literales, logrando que esta distinción llegue a formularse con claridad.

El tercer objetivo fue el de analizar las dificultades **Sintácticas** del contenido relativo al conocimiento didáctico matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

1. Se dotó por parte de los estudiantes múltiples sentidos a los números negativos que corresponde con los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002).

2. Ignorancia por algunos estudiantes de la triple naturaleza de la sustracción (completar, quitar y diferencia entre dos números) y de la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número).

3. Los estudiantes lograron un progreso aunque incipientemente hacia la extensión del dominio numérico, debido a que pudieron sustraer un número mayor en valor absoluto de un número menor en valor absoluto.

Y el cuarto y último objetivo fue el de analizar los sistemas de **Representación** relativos al conocimiento matemático en la adición y sustracción de los números enteros por parte de los alumnos.

1. Se utilizó, por parte de los estudiantes, distintos tipos de representación, se detectó entre sus producciones el carácter funcional de esas representaciones (Hitt, 2006).

.

2. Se logró que los estudiantes resolvieran operaciones sintácticamente sin la presencia explícita del Modelo Operatorio de Fichas.

3. Además del Modelo operatorio de Fichas los estudiantes concentraron sus respuestas en dos estrategias de resolución: usar la recta numérica y plantear una operación.

4. Los modelos concretos que se utilizan en la enseñanza de números justifican con facilidad la suma y resta de enteros. (ésta última con mayor dificultad). Además se constata lo que bibliográficamente se encontró, el obstáculo epistemológico de la aceptación del número negativo.

5. El modelo utilizado es un método de enseñanza de tipo constructivista, ya el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de este modelo concreto, le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo “real” al mundo de los símbolos escritos de la matemática.

Quedan líneas abiertas de investigación, tal vez las más importante son las preconcepciones y concepciones que tienen los estudiantes frente al número negativo y las operaciones adición y sustracción de números enteros.

Las prolongaciones de esta propuesta sería por una parte fortalecer la situación relacionada con la sustracción y por otra intentar una propuesta en esta misma línea para la multiplicación de números enteros.

REFERENCIAS

1. Bruno, A. & Martinón, A. (1996) Números negativos: una revisión de investigaciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* 9, 98 – 108.

2. BRUNO, A. & GARCÍA, J. A. (2004). Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos*. Relime*, *7* (25 – 46).

3. Bruno, A. & Martinón A. (1996). “Los números negativos sumar = restar”. Uno, 10 (123 - 133).

4. Bruno (1996). Problemas de Resolución de Problemas Aditivos con Números Negativos. Págs. 249- 257. Artículo recibido en noviembre de 1995 y aceptado en abril de 1997.

5. Gallardo Cabello, Aurora. Uso de un modelo de enseñanza como recurso de investigación en el estudio de los números enteros. Págs. 311 - 320.Investigaciones en matemática educativa II. Cinvestav.
Grupo Editorial Iberoamericana.

5. Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 14(1). Cangas de Morrazo. Boletín del SI-IDM, 10.

6. Cid, E. (2002), *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, vol.2, 529-542. Disponible en
http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf

7. Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Pre-publicaciones del seminario matemático “García Galdeano”. Universidad de Zaragoza. Disponible http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf

8. Espinosa, ME. (2005). Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores en formación inicial. Tesis doctoral leída en la Universidad de Granada.

9. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. (2006, abril). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía los modelos concreto de bloques. Educación Matemática Volumen 18, núm. 1, pág. 73-97.

10. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. (2007). Las dualidades de la negatividad y el cero en la transición de la aritmética al algebra. Artículo de CINVESTAV, México.

11. Hernández, Abraham y Gallardo, Aurora. Emergencia de los números enteros. Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

12. Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, Vol. 8, pp. 255-271.

13. Hitt F. (2006). Students’ functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 11, pp. 253-268.

14. Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C. (2008). Visualization and students’ functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-

11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. http://tsg.icme11.org/tsg/show/21.

15. Hitt Fernando, Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículo. Revista de Educación Matemática. Vol. 10. 1998. pág. 23-45.

16. S. Parra, Hugo. El conocimiento Didáctico Relativo a la Adición en números enteros en Futuros Profesores de Matemática. Disponible en http://simposio.una.edu.ve/archivos/ConocimientoDidacticoAdicion.pdf