

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Educativa



Tesis de Maestría

“Los manipulativos y registros de representación en la resolución de problemas
que involucran fracciones en estudiantes de quinto grado”

Tesista

Franclin Solano Pérez Ramos

Asesor de Tesis

Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C. Julio, 2019

“Los manipulativos y registros de representación en la resolución de problemas
que involucran fracciones en estudiantes de quinto grado”

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Educativa



“Los manipulativos y registros de representación en la resolución de problemas
que involucran fracciones en estudiantes de quinto grado”

Tesis para obtener el título de

Master en Matemática Educativa

Tesisista

Franclin Solano Pérez Ramos

Asesor de Tesis

Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C. Julio, 2019

AUTORIDADES

Ph.D. HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA
Rector

M.Sc. CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO
Vicerrectora Académico

M.Sc. NAHUM ALFREDO VALLADARES CARRANZA
Vicerrector Administrativo

Ph.D. ROSARIO BUESO VELÁSQUEZ
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA
Vicerrector del CUED

M.Sc. BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA
Secretario General

Ph.D. ESTELA ROSINDA ÁLVAREZ MARTINEZ
Directora de Postgrado

Tegucigalpa, M.D.C. Julio, 2019

Terna Examinadora

Grado académico, nombres y apellidos completos
Presidente(a) Examinador(a)/Tribunal

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

Franclin Solano Pérez Ramos
Tesista

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a:

Mis padres Francisco Solano y Berta Ramos por brindarme su apoyo incondicional y ser ejemplo de dedicación y superación.

A mi hermano Francisco Adonis.

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso creador de los cielos y la tierra por darme vida eterna a través de Jesucristo su hijo unigénito y por haber puesto en mí el querer como el hacer para llegar a este importante punto en mi formación profesional.

A mi padre Francisco Solano y a mi madre Berta Ramos por su apoyo incondicional durante este proceso.

A mi asesor de tesis Ph.D Marvin Roberto Mendoza Valencia por su amistad, tiempo, disposición y motivación para poder culminar este trabajo.

A las autoridades de la Dirección de Postgrado, por su apertura y apoyo a lo largo del proceso y hasta la finalización de este proyecto.

A International School Tegucigalpa, institución que me abrió las puertas para crecer profesionalmente y permitirme realizar este estudio en su campus.

Finalmente, pero no menos importante, a la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, institución que me ha brindado la formación académica para desarrollarme profesionalmente.

TABLA DE CONTENIDO

DEDICATORIA	1
AGRADECIMIENTO	2
INTRODUCCIÓN	11
Capítulo 1: Planteamiento del Problema.....	14
1.1 Descripción de la situación problemática	15
1.2 Formulación del problema de investigación	18
1.3 Preguntas de investigación.....	18
1.4 Objetivos de investigación.....	18
1.4.1 Objetivo general.....	18
1.4.2 Objetivos específicos	19
Capítulo 2 : Marco Teórico	26
2.1 Antecedentes	28
2.2 Las Representaciones en Matemática	37
2.2.1 Clasificación de los diferentes tipos de representación	40
i. La oposición consciente/no-consciente	40
ii. La oposición externo/interno	40
2.2.2 Tipos y funciones de las representaciones.....	42
a. Representaciones mentales	42
b. Representaciones computacionales	43
c. Representaciones semióticas.....	43
2.2.3 Las representaciones semióticas: tratamiento y conversión	44

2.2.3.1	Tratamiento de las representaciones semióticas	44
2.2.3.2	Conversión de las representaciones y cambio de registro	45
2.2.3.2.1	Características de la conversión	46
2.3	La Resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas	48
2.3.1	Caracterizando un problema en matemática	50
2.3.3	Etapas o categorías en la resolución de problemas.....	51
2. 4	Resolución de problemas con fracciones	52
2.5	Los manipulativos en la enseñanza de las matemáticas	54
2.5.2	Contadores de dos colores	56
2.5.2	Barras de fracciones.....	57
2.6.	Las fracciones en el currículo hondureño.....	58
2.7	Origen histórico de las fracciones	62
2.7.1	Civilización egipcia	62
2.7.2	Civilización babilónica	63
2.7.3	Civilización china	64
2.8	Fracciones	64
Capítulo 3 :	Marco Metodológico.....	67
3.1	Enfoque de la investigación.....	68
3.2	Tipo de investigación	68
3.3	Diseño de la investigación.....	69
3.4	Categorías de análisis	69
3.5	Fuentes de Información	72
3.6	Estrategia de recolección de datos.....	73

3.7 Análisis de datos	83
Capítulo 4 : Resultados del Estudio	85
4.1 Resultados y análisis de la etapa diagnóstica.....	86
4.1.1 Análisis de la prueba diagnóstica.....	91
4.2 Resultados y análisis de las secuencias didácticas de aprendizaje	94
4.2.1 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 1 por grupo	94
4.2.2 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje dos por grupo .	98
4.2.3 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 3 por grupo ...	104
4.2.4 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 4 por grupo ..	110
4.2.5 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 5 por grupo ...	115
4.2.6 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 6 por grupo ..	121
4.2.7 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 7 por grupo ...	126
Conclusiones	134
Recomendaciones	137
Referencias Bibliográficas	139
Anexos	144
Anexo 1. Prueba diagnóstica	145
Anexo 2. Secuencias didácticas de aprendizaje	150
Anexo 3. Rúbricas de evaluación de las secuencias didácticas de aprendizaje.....	167
Anexo 4. Fotos de las secuencias didácticas.	174

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Conversión de una fracción mixta.....	21
Figura 2 Comparación de dos fracciones mixtas empleando una representación grafica	22
Figura 3 Simplificación de una fracción mixta.....	22
Figura 4 Suma de fracciones empleando manipulativos.....	24
Figura 5 Relación entre las representaciones internas y representaciones semióticas en la comprensión del concepto de fracción.....	39
Figura 6 Tratamiento empleando manipulativos	45
Figura 7 Transformación de un registro semiótico en otro (conversión y tratamiento).	47
Figura 8 Contadores de dos colores	56
Figura 9 Barras de fracciones	57
Figura 10 Símbolos empleados por los egipcios para representar fracciones	63
Figura 11 Jeroglíficos de fracciones cuneiformes babilónicas	63
Figura 12 Representación pictórica errónea de la fracción $1/3$	92
Figura 13 Resolución de una situación problemática con fracciones en registro verbal	94
Figura 14 Tratamientos con fracciones equivalentes en registro aritmético.....	98
Figura 15 Tratamientos para tratar de representar las fracciones $2/8$ y $1/4$ equivalentes a $4/16$..	99
Figura 16 Estudiantes empleando manipulativos para tratar de representar fracciones equivalentes	99
Figura 17 Tratamientos para representar la equivalencia de las fracciones $3/6$, $6/12$, $9/18$	100
Figura 18 Tratamientos para tratar de encontrar fracciones equivalentes a $1/3$ en registro aritmético	100
Figura 19 Representación pictórica de la fracción $8/16$	101

Figura 20 Representación pictórica de la fracción $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{4}{16}$	102
Figura 21 Tratamientos para tratar de representar las fracciones $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$ equivalentes a $\frac{4}{16}$	103
Figura 22 Fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ en registro aritmético.....	103
Figura 23 Ubicación incorrecta de la fracción $\frac{2}{8}$ en la recta numérica	105
Figura 24 Representación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica	105
Figura 25 Representación de la fracción $\frac{1}{3}$ en la recta numérica	105
Figura 26 Representación de la fracción $\frac{3}{6}$ y su equivalente $\frac{1}{2}$ en la recta numérica	105
Figura 27 Representación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica	106
Figura 28 Representación incorrecta de la fracción $\frac{1}{6}$ en la recta numérica	106
Figura 29 Representación incorrecta de la fracción $\frac{1}{8}$ en la recta numérica	107
Figura 30 Representación de la fracción $\frac{3}{6}$ y la fracción equivalente $\frac{1}{2}$ en la recta numérica	107
Figura 31 Representación de la fracción $\frac{2}{8}$ y la fracción equivalente $\frac{1}{4}$ en la recta numérica.....	108
Figura 32 Ubicación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica	108
Figura 33 Conversión incorrecta de registro de representación pictórica a aritmética de un número mixto	110
Figura 34 Conversión de fracciones de un registro pictórico al aritmético	111
Figura 35 Suma de fracciones en registro aritmético.....	111
Figura 36 Conversión de registro pictórico a un aritmético de una fracción mixta.....	113
Figura 37 Representación en un registro pictórico de la fracción mixta $1\frac{1}{4}$	113
Figura 38 Empleo de manipulativos para representar la suma $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$	116
Figura 39 Empleo de manipulativos y registro aritmético en la resolución de problemas con fracciones	116

Figura 40 Empleo de barras de fracciones para representar la suma $3/4+1/8$	117
Figura 41 Empleo de barras de fracciones para representar la suma $1/2+2/4$	118
Figura 42 Tratamientos en registro aritmético para resolver $3/5+8/10$	119
Figura 43 Conversiones y tratamientos para resolver la operación $3/4+1/8$	120
Figura 44 Estudiantes empleando barras de fracciones para resolver $2/3-1/4$ y tratamientos realizados por estos estudiantes en registro de representación aritmético	122
Figura 45 Tratamiento realizado por los estudiantes para resolver $2\ 2/3 - 1\ 1/2$	122
Figura 46 Representación pictórica de $1/2+1/3$	123
Figura 47 Tratamiento en registro aritmético de la suma $1/2+1/3$	123
Figura 48 Representación pictórica y tratamientos en registro aritmético para resolver $2/3-1/4$	123
Figura 49 Tratamientos en un registro aritmético para resolver $2\ 2/3-1\ 1/2$	124
Figura 50 Tratamientos en registro aritmético para resolver $1/2+1/3$	124
Figura 51 Representación de la fracción $4/12$ en registro pictórico y tratamiento para tratar de encontrar la fracción equivalente $1/3$	127
Figura 52 Representación de la fracción $4/12$ empleando material manipulativo.....	128
Figura 53 Representación incorrecta de la fracción $1/3$ de un conjunto de 12 elementos.....	128
Figura 54 Representación pictórica de $1/4$ de una docena.....	129
Figura 55 Representación pictórica de $1/3$ de una docena ($4/12=1/3$)	130
Figura 56 Representación de $1/4$ de una docena empleando manipulativos	130
Figura 57 Representación de la fracción $6/12$ empleando manipulativos	131
Figura 58 Representación pictórica de la fracción $6/12$	131

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Niveles de comprensión de Hitt (1988)	34
Tabla 2 Tipos de representaciones	42
Tabla 3 Etapas de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget	55
Tabla 4 Fracciones: Cuarto Grado	59
Tabla 5 Fracciones: Quinto grado	59
Tabla 6 Fracciones: Sexto grado	60
Tabla 7 Diferentes interpretaciones para la fracción $\frac{3}{4}$	65
Tabla 8 Categorías de análisis	70
Tabla 9 Resumen de prueba diagnóstica	74
Tabla 10 Secuencia de aprendizaje 1	79
Tabla 11 Secuencia didáctica de aprendizaje 2	80
Tabla 12 Secuencia didáctica de aprendizaje 3	80
Tabla 13 Secuencia didáctica de aprendizaje 4	81
Tabla 14 Secuencia didáctica de aprendizaje 5	82
Tabla 15 Secuencia didáctica de aprendizaje 6	82
Tabla 16 Secuencia didáctica de aprendizaje 7	83
Tabla 17 Rúbrica de evaluación de los ítems de la prueba diagnóstica	86
Tabla 18 Resumen del desarrollo de la actividad uno	97
Tabla 19 Resumen del desarrollo de la actividad dos	104
Tabla 20 Resumen del desarrollo de la actividad tres	109
Tabla 21 Resumen del desarrollo de la actividad cuatro	115
Tabla 22 Resumen de los resultados de la actividad cinco	120
Tabla 23 Resumen del desarrollo de la actividad seis	126

Tabla 24 Resumen del desarrollo de la actividad siete	133
---	-----

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1 Desempeño académico de los estudiantes de quinto grado en matemáticas, años 2013-2016.....	16
Gráfica 2 Resultados de la prueba diagnóstica	91
Gráfica 3 Resultados de la prueba diagnóstica	91

INTRODUCCIÓN

El currículo de matemática hondureño es ampliamente rico, ofrece a los estudiantes oportunidades para aprender conceptos matemáticos esenciales y procedimientos con comprensión. En un currículo coherente, las ideas matemáticas se vinculan y se complementan entre sí para que la comprensión y el conocimiento de los estudiantes se profundice y su capacidad para aplicar las matemáticas se expanda. Se enfoca en preparar a los estudiantes para el estudio continuo y para resolver problemas en una variedad de entornos escolares, hogareños y laborales. Además, reta a los estudiantes a aprender ideas matemáticas cada vez más sofisticadas a medida que continúan sus estudios, (Consejo Nacional de Profesores de Matemática, por sus siglas en inglés NCTM, 2000).

Las matemáticas se entienden como una actividad humana en donde cobra vital importancia la persona haciendo matemáticas, no solo el producto matemático. Desde esta perspectiva resulta relevante considerar en la práctica educativa las acciones cognitivas de los estudiantes al momento de enfrentarse a la resolución de un problema, pasando por etapas de acción, formulación y validación de sus construcciones de estrategias y conocimientos matemáticos.

Durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico. En este sentido, cobran importancia los registros de representación en el aprendizaje de las matemáticas, de modo que en los principios y estándares para la educación matemática se enfatiza en potencializar el empleo de diversos registros de representación en la educación desde edades tempranas (NCTM, 2000).

El propósito de este trabajo de investigación consistió en analizar la influencia del empleo de manipulativos y registros de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones. El estudio se desarrolló con estudiantes de quinto grado del centro educativo

International School Tegucigalpa, se planteó la problemática que existe en la enseñanza-aprendizaje de este concepto y su importancia como concepto esencial para desarrollar nuevos conceptos matemáticos. El estudio fue cualitativo de carácter descriptivo.

Esta investigación está en concordancia con la línea de investigación: vinculación social de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) en el área de transferencia de conocimiento la cual está orientada a involucrarse e intervenir en procesos y proyectos académicos donde está comprometida la actividad curricular. (UPNFM, 2017)

En el desarrollo de esta investigación participaron veintiún estudiantes de quinto grado de la International School del año escolar 2018-2019. Durante la ejecución se organizaron cinco grupos de trabajo, cuatro grupos de cuatro estudiantes y un grupo de cinco estudiantes, con los cuales se trabajaron ocho sesiones de trabajo. La primera sesión consistió en el diagnóstico, las otras siete, en las experiencias de aprendizaje.

Este documento está organizado como se detalla a continuación: El capítulo 1 corresponde al planteamiento del problema; en este espacio se describe la situación problemática, la idea de la investigación, el propósito de realizar el estudio (objetivos) y la justificación del porqué llevar a cabo el estudio.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, en primera instancia, se muestran los antecedentes, espacio en el cual se incluyen aportes de investigaciones realizadas en torno al tema de registros de representación y fracciones. Seguidamente, el soporte teórico de los registros de representación, la resolución de problemas, los manipulativos. Finalmente, se incluyen algunas generalidades con respecto al concepto de fracción.

El capítulo 3 aborda el marco metodológico de la investigación como el enfoque, tipo, diseño, y las categorías de análisis de la investigación; también se incluye las fuentes de información, las estrategias de recolección de datos y el análisis de los mismos.

En el capítulo 4 se presentan los resultados de la investigación, el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, los resultados y análisis de las siete actividades desarrolladas. Se presenta una descripción y propósito de cada una de ellas.

Al final del trabajo se incluyen las conclusiones, recomendaciones, bibliografía y los anexos.

A lo largo del documento se encuentran términos importantes para el estudio que se definen a continuación para una mayor claridad.

Se considera manipulativo a un objeto físico tangible, diseñado con un propósito didáctico para que los estudiantes pueden palpar con sus manos, permitiéndoles explorar, interiorizar y comprender conceptos matemáticos y potencializar el desarrollo de procedimientos matemáticos.

En cuanto a las representaciones, se considera representación pictórica o figural al conjunto de dibujos, esquemas, y gráficas que intentan representar lo más fielmente posible los conceptos matemáticos involucrados en un problema, mientras que una representación simbólica utiliza símbolos convencionales empleados en matemática y una representación verbal emplea el lenguaje coloquial que es utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en otra representación.

Capítulo 1: Planteamiento del Problema

- 1.1 Descripción de la situación problemática
- 1.2 Formulación del problema de investigación
- 1.3 Preguntas de investigación
- 1.4 Objetivos de investigación
 - 1.4.1 Objetivo general
 - 1.4.2 Objetivos específicos
- 1.5 Justificación de la investigación

En este apartado del documento se presenta el contexto de la situación problema en estudio, la importancia de investigarlo y la justificación del por qué de la investigación; también se incluye el propósito de llevar a cabo la misma.

1.1 Descripción de la situación problemática

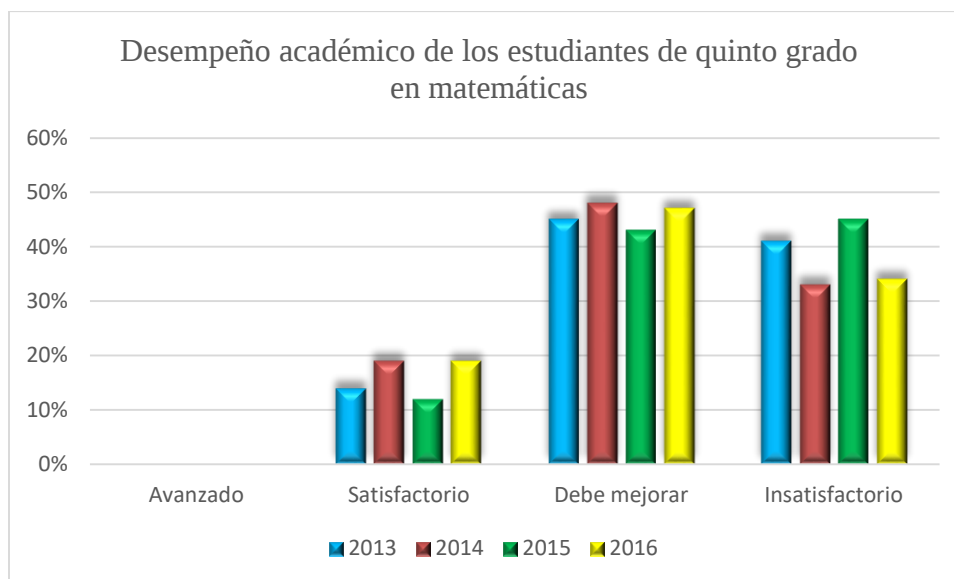
En el currículo de matemáticas se encuentra una diversidad de conceptos transcendentales para el aprendizaje de los estudiantes. En particular el concepto de fracción es de suma importancia en la educación primaria, sin embargo, el contenido de las fracciones es muy complejo y problemático para los niños en su aprendizaje y para el maestro en su enseñanza.

Así, pues, en una prueba de evaluación estandarizada en Estados Unidos se les pidió a estudiantes en su séptimo grado realizar una estimación de la suma $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ y solamente el 24% de los estudiantes respondieron que la respuesta era aproximadamente dos. La mayoría respondió que la suma de estas dos fracciones era aproximadamente 1, 19 y 21, Carpenter (1981) citado en (NCTM, 2000). Estos errores de cómputo en la suma de fracciones reflejan una falta de comprensión en la operación llevada a cabo. Si los estudiantes comprendieran la suma de fracciones y dar sentido a los números, este tipo de errores no ocurrirían (NCTM, 2000).

Los informes de rendimiento académico en Honduras de los años 2013 al 2016 revelan una deficiencia en el desempeño escolar de los estudiantes en matemáticas. Para efectos de interés de este estudio, en quinto grado se obtuvieron los siguientes resultados: en el 2013 el 41% mostró un desempeño insatisfactorio, el 45% debe mejorar y un 14% satisfactorio. Para el 2014 el 33% mostró un desempeño insatisfactorio, el 48% debe mejorar, y el 19% satisfactorio. En el 2015 el 45% mostró un desempeño insatisfactorio, el 43% debe mejorar, y el 12% satisfactorio. Y para el

año 2016 el 34% mostró un desempeño insatisfactorio, el 47% debe mejorar, y el 19% satisfactorio. Tal como se muestra en el siguiente gráfico.

Gráfica 1 *Desempeño académico de los estudiantes de quinto grado en matemáticas, años 2013-2016*



Fuente: Elaboración propia

Esta estadística muestra que el nivel de desempeño insatisfactorio en matemáticas de los estudiantes en su quinto año de educación básica es muy alto comparado con el porcentaje de estudiantes que muestran un desempeño satisfactorio.

Por otra parte, los resultados de la prueba estandarizada MAP (Measure of Academic Progress), aplicada a los estudiantes de segundo a décimo grado en International School, lugar donde se llevó a cabo el estudio revelan una deficiencia en la comprensión del concepto de fracción, incluso en los niveles donde este concepto debería ser dominado con fluidez. Esta prueba de medición del progreso académico (MAP) por sus siglas en inglés, se aplica dos veces en el año escolar, al comienzo y final del año. La finalidad es monitorear el progreso académico de cada estudiante en el área de matemáticas. (NWEA , 2018)

Asimismo, algunos estudiantes al comienzo de su noveno grado en la misma institución, se les presenta un problema en una prueba diagnóstica en el que tienen que efectuar una suma como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ y su respuesta es $\frac{2}{5}$, y al resolver por ejemplo $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ su respuesta es $\frac{4}{15}$, o confunden los procedimientos de multiplicación de fracciones con los de sumar. Errores matemáticos como estos es una clara evidencia que los estudiantes no han adquirido o comprendido conceptos fundamentales de fracciones.

Las investigaciones realizadas revelan algunos factores que contribuyen a una débil o mala comprensión de las fracciones, así para Streetland (1991) , Newstead y Murray (1998) existen las siguientes fuentes principales en esta problemática.

- El enfoque mecanicista en que son enseñadas separándolas completamente de la realidad y centrándose en la aplicación rígida de reglas.
- La forma y secuencia en que inicialmente el contenido es presentado a los estudiantes, en particular la exposición a una variedad limitada de fracciones (solamente cuartos y mitades).
- Un ambiente en el aula de clases en la que, por falta de oportunidades, las concepciones informales de cada día y las intuiciones incorrectas acerca de las fracciones no son monitoreados o resueltas.
- La aplicación inadecuada de los números enteros, basado en la interpretación de los dígitos de una fracción como su valor aparente o ver el numerador y denominador como números enteros separados.

De acuerdo a la situación planteada anteriormente, surge el interés de responder a la siguiente pregunta de investigación.

1.2 Formulación del problema de investigación

¿Cómo influyen los manipulativos y los registros de representación, en la resolución de problemas que involucran fracciones en los estudiantes de quinto grado de International School Tegucigalpa?

1.3 Preguntas de investigación

1. ¿Qué conocimientos previos, dificultades y errores presentan los estudiantes de quinto grado en la resolución de problemas con fracciones?
2. ¿Cuáles son los registros de representación que emplean los estudiantes de quinto grado en la resolución de problemas que involucran fracciones?
3. ¿Qué conversiones realizan los estudiantes de quinto grado entre los diversos registros de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones?
4. ¿Qué tratamiento realizan los estudiantes en la resolución de problemas que involucran fracciones?
5. ¿Cómo emplean los manipulativos los estudiantes en la resolución de problemas que involucran fracciones?
6. ¿Qué significados de las fracciones son más utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones?

1.4 Objetivos de investigación

1.4.1 Objetivo general

Analizar la influencia del empleo de manipulativos y registros de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones en estudiantes de quinto grado del centro educativo International School Tegucigalpa.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Explorar los conocimientos previos, dificultades y errores que presentan los estudiantes de quinto grado en la resolución de problemas que involucran fracciones.
2. Identificar los registros de representación que emplean los estudiantes en la resolución de problemas que involucran fracciones.
3. Determinar las conversiones que realizan los estudiantes de quinto grado entre los diversos sistemas de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones.
4. Describir el tratamiento que realizan los estudiantes dentro de un mismo registro de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones.
5. Evaluar en qué manera el empleo de los manipulativos contribuyen en la resolución de problemas que involucran fracciones.
6. Conocer los significados de las fracciones más utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones

1.5 Justificación de la investigación

Vivir en un mundo que cambia aceleradamente ha hecho del comprender y hacer matemática una necesidad en el diario vivir y en los lugares de trabajo, necesidad que continúa incrementando, por tanto, aquellos estudiantes que comprenden y hacen matemática tendrán oportunidades y opciones significativas para trazar su futuro. Ser competente en matemáticas abre puertas a un futuro productivo, y una débil competencia en matemáticas mantiene esas puertas cerradas (NCTM, 2000). Así que todos los estudiantes deben tener acceso a una instrucción matemática significativa con comprensión y profundidad, sin embargo, investigaciones y evaluaciones como

PISA (Schleicher, 2015), TIMSS (Mullis , Martin , Foy, y Hooper, 2015), TERCE (Leones , Baruzzi, Scorzo, y Rivas, 2016) demuestran que muchos estudiantes no están aprendiendo la matemática que necesitan o deberían saber.

Un tema medular en la instrucción matemática en el nivel de educación básica son las fracciones. En cuarto grado los estudiantes comienzan hacer la transición de los números naturales a los números racionales (fracciones), esta transición tan esencial para la comprensión de otros conceptos fundamentales en matemática resulta un tanto difícil para muchos estudiantes por la manera en como es abordada por los profesores. Tener en cuenta los diversos significados del concepto de fracción al momento de enseñarlas es imprescindible, así como también permitir a los estudiantes tener acceso a diversos registros de representación semiótica y manipulativos al aprender este concepto.

Por otra parte, en los puntos de lección de las unidades correspondientes a las fracciones del libro de matemáticas de Prometan guía para el maestro de cuarto y quinto grado, se proponen las siguientes sugerencia de cómo abordar este tema:

- a. Para que los estudiantes sientan la necesidad de aprender las fracciones hay que utilizar las unidades de medida que ellos han aprendido desde segundo grado; unidades de longitud, tiempo, peso y capacidad. De estas medidas es más conveniente emplear las de longitud y capacidad porque son fáciles de visualizar.
- b. Debido a que en cuarto grado los estudiantes aprenden las fracciones menores que uno, en la primera clase se sugiere presentar cintas de 1 m y de $\frac{1}{3}$ m, y luego se confirma que 3 veces $\frac{1}{3}$ m, mide lo mismo que 1 m y se enseña que la longitud se representa como $\frac{1}{3}$ m.

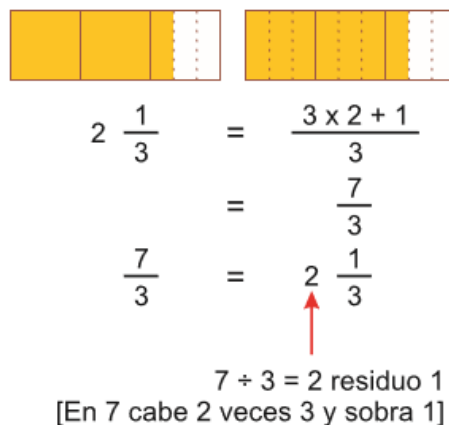
Se enseñan los términos: fracción, numerador y denominador.

- c. Las fracciones se pueden colocar en la recta numérica, así como los decimales. Como las fracciones se introdujeron usando la longitud de cintas, sería mejor empezar apuntando en una cinta de 1m las longitudes expresadas con fracciones, luego se quita la unidad del metro y se tratan las fracciones como números.

Para quinto grado se sugieren las siguientes estrategias para abordar las fracciones

- a. En este grado se extiende el uso de las fracciones hasta la cantidad que es mayor o igual que la unidad, se sugiere comenzar con un problema de representar una cantidad de medida y después se quita la unidad de medida y emplear gráficas para su representación. Por otro lado, para la multiplicación y división de fracciones se emplean las fracciones impropias, así que los estudiantes deben ser capaces de convertir fracciones mixtas a impropias, no hay que tratar mecánicamente este cálculo de conversión, más bien hay que relacionarlo con gráficas para un mejor entendimiento tal como se muestra en la siguiente figura.

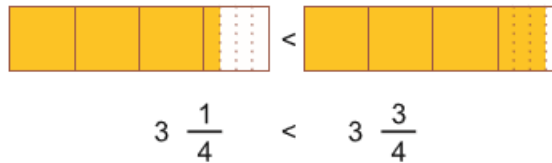
Figura 1 Conversión de una fracción mixta



Fuente: Libro de prometán guía para el maestro, quinto grado

- b. Para comparar fracciones con el mismo denominador se sugiere emplear representaciones gráficas tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 2 Comparación de dos fracciones mixtas empleando una representación grafica



Fuente: Libro de prometán guía para el maestro, quinto grado

- c. En cuanto a las fracciones equivalentes (simplificación), se sugiere el proceso de encontrar y dividir por el máximo común divisor del numerador y denominador. O ir dividiendo el numerador y denominador por cualquier divisor común tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 3 Simplificación de una fracción mixta

$$5 \frac{36}{48}$$

El máximo común divisor de 36 y 48 es 12.

Por lo tanto $5 \frac{36}{48} = 5 \frac{36 \div 12}{48 \div 12} = 5 \frac{3}{4}$

Pero se puede calcular así: $5 \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \overset{4}{\cancel{9}}}{\overset{6}{\cancel{24}} \overset{4}{\cancel{12}}} = 5 \frac{3}{4}$

Fuente: Libro de prometán guía para el maestro, quinto grado

- d. Para la suma de fracciones, se sugiere emplear situaciones concretas similares a las empleadas en los temas anteriores y después se deben enseñar ejercicios bien clasificados.

En las sugerencias mencionadas anteriormente de cómo abordar el tema de fracciones en cuarto y quinto grado, se evidencia el empleo de registros de representación pictóricos y aritméticos, así como tratamientos y conversiones en dichos registros. Para los temas de

fracciones equivalentes y suma de fracciones se podrían agregar más estrategias donde se emplee material manipulativo y representaciones pictóricas.

En cuanto a las representaciones Newstead, Murray y Lamon (1998) encontraron que; las representaciones son importantes para la comprensión del concepto de fracción, en el contexto de la enseñanza de las fracciones los estudiantes llegan a una gran variedad de representaciones, además de los reconocimientos y el uso flexible de los diferentes sistemas de representación, el objetivo básico de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones debe ser el desarrollo de la capacidad de traducir de una forma de representación a otra. La capacidad de cambiar de un tipo de representación a otra es especialmente importante para la comprensión de las fracciones.

Diferentes representaciones a menudo muestran diferentes aspectos de un concepto o relación compleja. Por ejemplo, los estudiantes generalmente aprenden a representar fracciones como sectores de un círculo o como partes de un rectángulo o alguna otra figura. A veces emplean manipulativos (bloques físicos de patrones o barras de fracciones) que transmiten la interpretación de fracciones en partes enteras. Dichos manipulativos ayudan a los estudiantes a comprender fracciones equivalentes y el significado de la suma de fracciones, especialmente cuando las fracciones tienen el mismo denominador y cuando su suma es menor que uno (NCTM, 2000).

Los manipulativos, de acuerdo a (Yusof, 2013:754) “son capaces de proporcionar oportunidades para el aprendizaje de exploración de las fracciones a través de experiencias prácticas. Ayudan a los estudiantes al reconocimiento y a realizar representaciones pictóricas”. En la misma línea Gaetano(2014) expresa que “el aprendizaje de los estudiantes sobre las fracciones se puede optimizar empleando activamente múltiples materiales manipulativos ya que la mayoría de los estudiantes necesitan usar manipulativos durante períodos prolongados para desarrollar

imágenes mentales necesarias para pensar conceptualmente sobre fracciones”. La suma de fracciones puede visualizarse haciendo empleo de barra de fracciones también; así, por ejemplo, la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ puede ser determinada no solamente realizando el cálculo aritmético sino empleando barras de fracciones verticales que correspondan a ambas barras verticales que muestran un medio (tres barras de fracciones correspondiente a $\frac{1}{6}$) y un tercio (dos barras de fracciones correspondiente a $\frac{1}{6}$) respectivamente tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 4 Suma de fracciones empleando manipulativos



Fuente: Elaboración propia

En la figura anterior se observa que para determinar la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ empleando manipulativos, primero se encuentran fracciones equivalentes con el mismo denominador a las fracciones dadas, para obtener una nueva suma $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ y finalmente se determina que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Las barras de fracciones deberían ser usadas por los estudiantes hasta que el concepto de fracción se convierta en un concepto abstracto para ellos.

En concordancia con lo expuesto anteriormente, es oportuno investigar acerca de las dificultades existentes en el proceso enseñanza-aprendizaje de las fracciones en vista que este tema es de suma importancia en el currículo de las matemáticas al ser un concepto esencial para la comprensión de otros conceptos matemáticos que se estudiarán posteriormente.

Percatándose del impacto y relevancia de los manipulativos y las representaciones semióticas en el aprendizaje y comunicación en las matemáticas, es oportuno indagar acerca de la influencia de los manipulativos y los registros de representación en la resolución de problemas con fracciones.

Este estudio beneficia directamente a los estudiantes y maestros de la International School Tegucigalpa, centro educativo donde se llevó a cabo la investigación e indirectamente a todo docente interesado en fomentar el empleo de manipulativos y los registros de representación en la educación básica del sistema educativo hondureño, no solamente en lo concerniente a las fracciones, sino también, a otros conceptos de vital importancia en la enseñanza de las matemáticas.

Capítulo 2 : Marco Teórico

2.1 Antecedentes

2.2 Las Representaciones en Matemática

2.2.1 Clasificación de los diferentes tipos de representación

i. La oposición consciente/no-consciente

ii. La oposición externo/interno

2.2.2 Tipos y funciones de las representaciones

a. Representaciones mentales

b. Representaciones computacionales

c. Representaciones semióticas

2.2.3 Las representaciones semióticas: tratamiento y conversión

2.2.3.1 Tratamiento de las representaciones semióticas

2.2.3.2 Conversión de las representaciones y cambio de registro

2.3 La Resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas

2.3.1 Caracterizando un problema en matemática

2.3.3 Etapas o categorías en la resolución de problemas

2. 4 Resolución de problemas con fracciones

2.5 Los manipulativos en la enseñanza de las matemáticas

2.5.2 Contadores de dos colores

2.5.2 Barras de fracciones

2.6. Las fracciones en el currículo hondureño

2.7 Origen histórico de las fracciones

2.7.1 Civilización egipcia

2.7.2 Civilización babilónica

2.7.3 Civilización china

2.8 Fracciones

En este capítulo se presenta el soporte teórico de esta investigación, en primera instancia se muestra los antecedentes, espacio el cual contiene aportes relevantes para esta investigación en el tema de los registros de representación y las fracciones, en los otros apartados se abordan la teoría de registros de representación semiótica, la resolución de problemas en matemáticas, la importancia de los manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas, las fracciones en el currículo nacional básico y por último aspectos importantes con respecto al concepto de fracción.

2.1 Antecedentes

Representar en matemática ha sido un indicativo en toda actividad encaminada a denotar, transmitir, comunicar la producción de un hecho. En este sentido, “En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma” (Duval, 1999: 14). Lo expresado por Duval denota la importancia de las representaciones. De esta manera, en las fracciones es relevante conocer las diferentes maneras para referirnos al objeto de fracción.

Las representaciones han sido estudiadas en diversos momentos por investigadores de educación matemática como Duval (2006), Santos Trigo (1999), Hitt (1988) entre otros, lo cual sugiere ser un componente importante en la didáctica de la matemática.

Para esta investigación se referencian los siguientes resultados investigativos sobre las representaciones y las fracciones:

Un primer trabajo respecto a las fracciones se referencia a Ríos (2011) en su investigación titulada “concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemáticas” en la Universidad de Zulia, Venezuela, cuya metodología de investigación empleada fue inductiva, descriptiva, explicativa longitudinal, con una muestra de 189 estudiantes pasantes de la

licenciatura en matemáticas elegidos intencionalmente. En su investigación planteó que la problemática focalizada en la comprensión del concepto de fracción, no es solo en el ámbito de la educación básica y diversificado, sino que en los estudiantes universitarios de la clase de fundamentos de matemática presentaron similares deficiencias. Encontró también, que en la interpretación de una fracción como parte-todo la representación externa fue exclusivamente simbólica; en la interpretación de reparto, la representación gráfica y simbólica fueron utilizadas por igual; en la interpretación como operador, la aritmética y la simbólica prevalecieron; en la interpretación como número decimal prevaleció la escrita; en la interpretación como razón la representación simbólica estuvo por encima de todas, más del 78% de la muestra desconoció la interpretación de la fracción como número racional.

En segundo lugar, se hace referencia al estudio de García (2012) relativo a las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal, realizada con estudiantes de octavo grado de la institución educativa Eugenio Pacelli, Manizales, Colombia. En su investigación el objetivo primordial fue comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.

Entre las conclusiones obtenidas de su trabajo encontró lo siguiente: El registro seleccionado al hacer la primera conversión en todos los casos es el gráfico y a partir de este se realizan las conversiones en los otros registros, este facilitó el tránsito a otros registros de representación, ya que es un registro que permite una mayor visualización, mostrando elementos que en otros registros no son visibles.

El estudio confirmó la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.

En la misma línea que los investigadores antes señalados, Amaya y Medina (2013) realizaron un estudio relativo a las dificultades de los estudiantes de undécimo grado al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. Este estudio fue realizado con 50 estudiantes de undécimo grado de la institución educativa Sincelejo, Colombia, con edades entre 15-17 años, cuya tarea principal fue identificar el contenido de la representación figural de una función y hacer conversiones o tratamientos, utilizando un estudio descriptivo de casos, con un enfoque cualitativo. Los resultados revelaron que, aunque estos estudiantes ya habían tenido experiencias previas trabajando con funciones, tuvieron serias dificultades al hacer transformaciones con el registro figural como registro de partida a cualquier otro de los registros de representación que se les solicitó hacerlo. Las dificultades más recurrentes cometidas por los estudiantes fueron las siguientes:

- Dificultad para identificar los elementos de una función en cualquiera de sus registros y, por tanto, para poder establecer relaciones de dependencia entre ellos.
- Dificultad para elaborar un registro a partir de los elementos identificados en el registro figural, es decir, para establecer congruencias entre este registro y aquellos a los que se

migró; evidenciando que la conversión entre registros no se realiza de manera espontánea (especialmente dificultad en el paso de registro figural al algebraico).

- En una actividad de secuencias uno de los estudiantes tuvo grandes dificultades al completar la tarea, pues asoció $1/4$ con $3/4$, $1/8$ con $7/8$ y $1/16$ con $15/16$ como si fueran fracciones equivalentes, solo por el hecho de que tenían el mismo denominador.

Por otra parte, Benítez y García (2014) en su investigación titulada “Estudio de la primera representación en la resolución de problemas”, llevada a cabo con 50 estudiantes de 15-16 años, quienes fueron expuestos a experiencias de aprendizaje donde predominó la metodología de resolución de problemas en el aula de clases con la finalidad de:

- Identificar y analizar las estrategias que los estudiantes emplean cuando se promueven actividades que ponderan el uso de múltiples representaciones.
- Plantear preguntas y reformular el problema con el fin de reinterpretar o modificar la primera representación y así enriquecer su tratamiento y la posibilidad de fortalecer el proceso de solución de la situación.

Dentro de los hallazgos, los estudiantes fueron capaces de:

- Identificar la primera representación: verbal y pictórica.
- Transformar o modificar la representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.
- Reconocer la formulación de una expresión o parte de ella con lápiz y papel desde una representación pictórica o realizar una representación pictórica desde una expresión simbólica.

- Reconocer cambios o eliminación de la representación pictórica previamente construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.
- Asignar símbolos a una representación pictórica.
- Transformar o modificar una expresión simbólica debido a una nueva interpretación del enunciado.
- Reformular el enunciado de una manera diferente debido a algún resultado obtenido en una expresión simbólica.

En el mismo sentido referido a las transformaciones, Amaya, Pino, y Medina (2016) realizaron la investigación “Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función”. En este estudio participaron 90 futuros profesores de matemáticas de la universidad de Sucre, Colombia. Los resultados mostraron que, a pesar de los esfuerzos de los estudiantes por realizar conexiones entre diferentes representaciones de las funciones estudiadas, la generalidad es que predominan transformaciones tipo conversión hacia un solo registro de representación, donde recodifican la información, realizan algunos tratamientos y responden al problema en cuestión. En contraste con el trabajo de Duval (2004), lo ideal es que los estudiantes sean capaces de realizar conexiones entre diversos sistemas de representación, puesto que esto pone en función diversos procesos cognitivos, cada uno relacionado entre sí.

Finalmente, Castro, Gonzales, Flores, Ramirez, Cruz y Fuentes (2017) en la obra “Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I” llevada a cabo en el Instituto tecnológico de Ciudad de Juárez con dos grupos de estudiantes (uno de control y otro experimental) de ingeniería inscritos en la clase de cálculo diferencial se propusieron dar respuesta a la interrogante: ¿Qué impacto genera en el estudiante una instrucción que privilegia el uso de

distintos registros de representación semiótica? Para dar respuesta a esta interrogante se diseñó un instrumento de evaluación y una secuencia didáctica (aplicada solamente al grupo experimental) que involucrara el empleo y conversión de distintos registros de representación semiótica, mientras que el grupo de control desarrollo su aprendizaje siguiendo las pautas propuestas tradicionalmente en el libro de texto.

Al final del estudio el 50% de los estudiantes expuestos a la experiencia didáctica con base en el empleo de conversiones entre diversos registros de representación semiótica lograron utilizar e identificar representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la función exponencial. Otro 25% de estos estudiantes alcanzaron una transformación, preservando el significado, entre las diferentes representaciones de la función exponencial. Y el otro 25% de los estudiantes lograron la articulación coherente entre los diferentes sistemas de representación, y fueron capaces de aplicarlos en la solución de un problema alcanzando el nivel de comprensión 5 de (Hitt, 1988). En comparación, el 80% de los estudiantes del grupo de control que recibieron instrucción tradicional se encontraron en el nivel 1 y 2 de compresión de Hitt y el otro 20% solo llegó al nivel 3 de compresión de Hitt, ellos lograron la transformación entre los sistemas de representación, sin pérdida del significado. Lo anterior da evidencia que una instrucción que privilegia los cambios de representación semiótica promueve la obtención de mejores niveles de entendimiento

Tabla 1 Niveles de comprensión de Hitt (1988)

Nivel de comprensión	Características observadas en procedimientos de estudiantes
Nivel 1	Uso incoherente de diferentes representaciones del concepto después de someterse a un proceso de aprendizaje.
Nivel 2	Identificación de las diferentes representaciones de un concepto.
Nivel 3	Transformación, con la preservación de significado, de un sistema de representación a otro.
Nivel 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
Nivel 5	Articulación coherente de los diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

Fuente: Castro et al.(2017) Registros de representación semiótica del concepto de la función exponencial

Tomando en cuenta los resultados de los trabajos investigativos mencionados anteriormente, se puede apreciar la gran relevancia de los registros de representación en el quehacer matemático; el empleo de diversos registros de representación favorece la comprensión significativa de conceptos y procesos matemáticos. Del mismo modo la conversión entre diversos registros de representación, así como el tratamiento dentro de un mismo registro favorece la aprehensión de los significados de los conceptos matemáticos abstractos que solo pueden ser adquiridos por medio de las representaciones.

En el ámbito nacional, en particular en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM), en el tema de las representaciones se han realizado las siguientes investigaciones:

a. Las Representaciones Geométricas como Herramienta Para la Construcción del Significado de Expresiones y Operaciones Algebraicas. Elaborada por (Sandoval , 2010),

Este trabajo fue realizado con estudiantes de octavo grado del instituto “San José del Pedregal” cuya finalidad fue explorar las habilidades en la apropiación del concepto y significado de expresiones algebraicas y sus operaciones, utilizando como herramientas, representaciones geométricas. El estudio fue de corte cualitativo, tipo exploratorio; arrojando los siguientes hallazgos:

- Las medidas y el uso de actividades con representaciones geométricas dentro del aula de clases, ayuda y facilita la comprensión de contenidos algebraicos, iniciando con actividades de generalización para la comprensión y aprehensión del concepto de variable desarrollando habilidades para reconocer, describir, generalizar patrones numéricos y construir sucesiones de números a partir de una regla dada; específicamente para la construcción de conceptos como el de polinomios y sus operaciones.
- Las medidas y las representaciones geométricas son una herramienta efectiva para lograr el aprendizaje significativo de los contenidos de expresiones algebraicas; paralelo a estos aprendizajes, también ayuda al desarrollo de habilidades de visualización y representación.
- Las actividades basadas en medidas y representaciones geométricas son medios de comunicación y un soporte físico que ayuda a que los estudiantes construyan fácilmente los conceptos de variable y de polinomios así como la operación de los mismos, además de que comprendan la importancia de los signos de agrupación, y también porque en expresiones como $2(5x+3)$ se multiplica el dos por cada uno de los términos dentro del paréntesis.

b. El uso de la Computadora en la Manipulación y Conversión de los registros de Representación para el estudio de la función lineal, elaborada por (Gómez, 2006).

El estudio fue realizado con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán del curso Algebra 1 del año 2005, y tuvo como propósito explorar el potencial de la computadora para apoyar el entendimiento de las funciones lineales a través de actividades de manipulación al interior de los registros de representación gráfica, tabular y algebraica y la conversión entre registros diferentes. Dentro de los resultados importantes se pueden mencionar los siguientes.

- Al presentarles a los estudiantes una representación algebraica y grafica de la función lineal y se les pide responder a ciertas preguntas no realizan cálculos numéricos, únicamente utilizan el gráfico para estimar valores. En la mayoría de los casos, no existe iniciativa propia para usar valores numéricos específicos para verificar sus respuestas.
- Las representaciones ejecutables promueven el descubrimiento de las relaciones entre los parámetros de la ecuación $y = mx + b$ y las variables visuales, tales como el sentido de la recta, intercepto en el eje y, y el Angulo de inclinación.
- El empleo de las representaciones ejecutables ha motivado a los estudiantes a elaborar conjeturas, a reflexionar e interpretar que son acciones cognitivas importantes en la actividad matemática.

c. Construcción del Concepto Ecuaciones Lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de Ingeniería Agroindustrial por (Marroquín, 2009)

El objetivo de este estudio fue explorar acerca de la concepción, comprensión y la habilidad matemática que los estudiantes de ingeniería industrial, tienen de la noción del concepto de

ecuaciones lineales en dos variables, apoyados en los procesos de visualización y de registros de representación de los objetos en cuestión. El estudio fue de tipo cualitativo y se realizó con estudiantes de la clase matemática I (MM-110) de la carrera de ingeniería agroindustrial. Entre los resultados más importantes se encuentran los siguientes:

- Las situaciones didácticas proporcionaron los medios de diferentes representaciones, de manera que los estudiantes se dieran cuenta que el objeto se puede representar en diferentes registros e incluso haciendo tratamientos sobre los mismos. La preferencia por parte de los estudiantes se manifestó por las representaciones algébricas, que aun sin tener la habilidad de su manipulación para dar respuesta a las tareas, la misma les proporciona de manera clara un camino para la resolución de problemas.
- La aprehensión de las representaciones semióticas que los estudiantes manifestaron a través de las secuencias los acercó sin duda alguna a favorecer la discriminación de las unidades significantes en el registro mismo donde la representación se produce, es por eso que los estudiantes manifiestan su preferencia por los registros algebraicos, donde su estrategia para la conversión al registro gráfico fue la formación de pares ordenados que les permitió trazar una recta que contenía dichos puntos, esta aprehensión resulta de un simple planteamiento cognoscitivo de control sin que el estudiante haya logrado una comprensión total de su representación.

2.2 Las Representaciones en Matemática

Para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen. Considérese cuanto más difícil resulta la multiplicación con números romanos, que utilizando el sistema decimal de numeración. Muchas de las representaciones que hoy nos parecen naturales, tales como los números expresados en el sistema decimal o en el binario, las fracciones, las

expresiones algebraicas y las ecuaciones, las gráficas y las hojas de cálculo, son el resultado de un proceso natural desarrollado a lo largo de muchos años. Cuando los estudiantes acceden a estas representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente.

Según Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio preferido para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. La enseñanza y el aprendizaje de la matemática hacen que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de distintos registros de representación y de expresión, además del lenguaje natural o el de las imágenes.

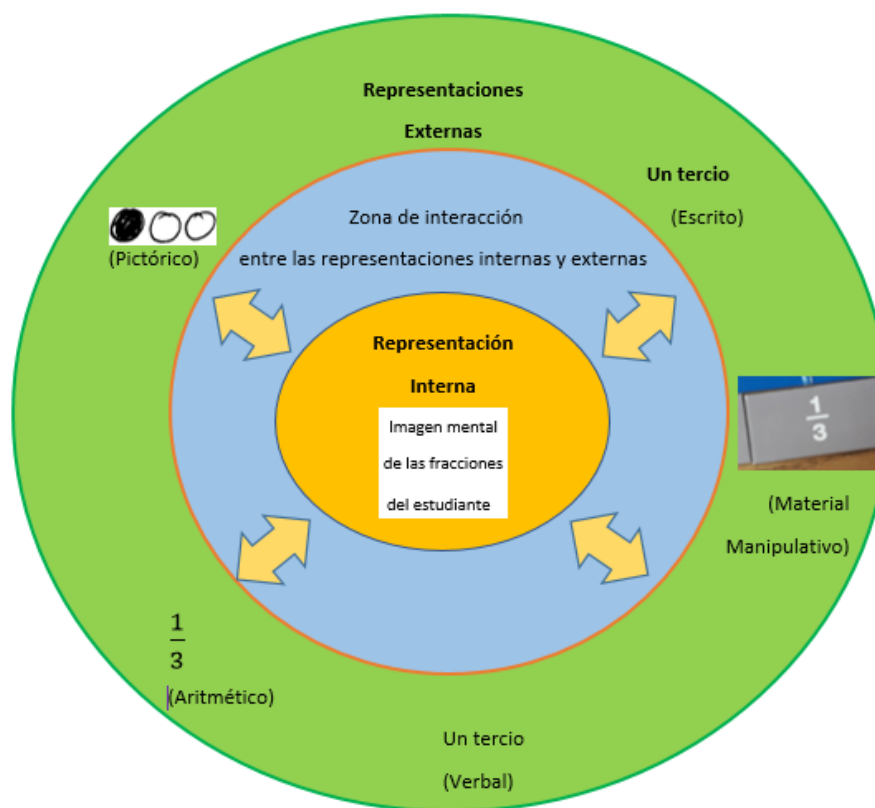
Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros Duval (2006).

Las representaciones semióticas en matemáticas cumplen con el papel comunicador y también son indispensables para el desarrollo de la actividad matemática misma. La posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado.

Al momento de hacer matemáticas el individuo se vale de representaciones mentales (internas) a cuya actividad se le llama noesis, siendo estos, actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto matemático, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia. No hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de

ejercicio de la noesis, las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientes de las representaciones semióticas (Duval, 1999).

Figura 5 Relación entre las representaciones internas y representaciones semióticas en la comprensión del concepto de fracción.



Fuente: Elaboración propia

En la figura anterior se expresa la relación de las representaciones internas (mentales), las que solamente el estudiante tiene acceso y las representaciones externas que son empleadas para poder comunicar las representaciones internas. En la figura se muestra el ejemplo particular para la fracción $\frac{1}{3}$, las representaciones internas solamente el estudiante las conoce, sin embargo para darlas a conocer se vale de representaciones externas como ser; representación pictórica, representación aritmética, representación verbal o una representación con material manipulativo.

2.2.1 Clasificación de los diferentes tipos de representación

Duval (1999:32) en la obra: Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales, establece dos oposiciones con respecto a la clasificación de las representaciones que se detallan a continuación:

i. La oposición consciente/no-consciente

Es la oposición entre lo que un individuo percibe y observa, de una parte, y lo que a él se le escapa y no puede observar, de otra.

Lo consciente se caracteriza por la visión de “alguna cosa” que toma el estatus de objeto para el individuo que observa. La transición de lo no-consciente a lo consciente corresponde a un proceso de objetivación para el individuo, esto es al descubrimiento por el mismo individuo que hasta el momento no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado. Así las representaciones conscientes son aquellas representaciones que presentan este carácter intencional y que cumplen una función de objetivación.

Desde el punto de vista cognitivo, este carácter intencional de las representaciones conscientes es esencial, ya que permite tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un individuo. Es siempre a través de una significación que se hace una aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto.

ii. La oposición externo/interno

Es la oposición entre lo que, de un individuo, de un organismo o un sistema es directamente visible y observable y lo que por el contrario no lo es. Esta oposición permite dividir las representaciones en dos precisiones suplementarias:

- Todas las representaciones externas son representaciones reproducidas como tales por un individuo o por un sistema.

- La producción de una representación externa solo puede efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico.

Las representaciones externas son por naturaleza representaciones semióticas. Estas representaciones, por tanto, están estrechamente ligadas a un estado de desarrollo y de dominio de un sistema semiótico. Son accesibles a todos los individuos que conocen el sistema semiótico utilizado. Las representaciones internas son las representaciones que pertenecen a un individuo y que no son comunicadas a otro a través de la producción de una representación externa (Duval, 1999: 33).

De lo descrito anteriormente se puede resumir que las representaciones internas se clasifican en dos categorías, una consciente y otra no-consciente, en la primera se encuentran las representaciones mentales cuyo propósito es hacer posible la aprehensión del objeto matemático para el estudiante solamente (ver figura cinco, pág. 39). En la segunda (la oposición externo/interno) se encuentran las representaciones computacionales cuya función es hacer posible las transformaciones del objeto matemático perceptible solo para el estudiante, es decir este tipo de representaciones (computacionales) permite realizar conversiones y tratamientos.

Así por ejemplo en la figura cinco (pág. 39), en el primer círculo se muestra las representaciones mentales de la fracción $\frac{1}{3}$, las representaciones computacionales internas permitirán al estudiante hacer conversiones de esta fracción de un registro pictórico al aritmético y viceversa así como también tratamiento en cualquiera de estos registros, pero solamente accesibles a el mismo.

Por otro lado, las representaciones externas solamente pueden ser conscientes, en esta categoría están las representaciones semióticas cuya función es hacer accesible los objetos matemáticos tanto al estudiante mismo como a otros. Este tipo de representación permite la comunicación de las representaciones internas del estudiante (ver figura cinco).

A continuación se presenta una tabla resumen de la relación entre estas representaciones.

2.2.2 Tipos y funciones de las representaciones

Tabla 2 *Tipos de representaciones*

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental Función de objetivación	Semiótica Función de objetivación Función de expresión Función de transformación Intencional
NO-CONSCIENTE	Computacional Función de transformación Automático o cuasi instantánea	

Fuente: Duval, 2004

a. Representaciones mentales

Este tipo de representaciones permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible. Por lo general, estas representaciones se igualan a las “imágenes mentales”.

En las representaciones mentales no sólo contienen, conceptos, nociones, ideas, sino también las creencias y fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo en particular o con sus propios deseos (Duval, 2004).

b. Representaciones computacionales

Las representaciones computacionales son aquellas representaciones cuyos significantes, de naturaleza homogénea, no requieren de la mirada del objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie. Estas representaciones expresan la información de manera tal que lo hacen direccionable, recuperable y combinable en el interior de ese sistema (Duval, 2004).

c. Representaciones semióticas

En la tabla 2 se aprecia que las representaciones semióticas son, tanto, representaciones conscientes como externas; Estas representaciones permiten una “mirada al objeto” a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes. Hay una variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas.

De acuerdo con Duval (2006) la actividad matemática debe satisfacer dos requisitos que entran en conflicto:

- i. Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se elige el tipo de representación semiótica.
- ii. Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas.

El primer requisito es especialmente importante por dos razones que resaltan el estatus epistemológico particular de las matemáticas, pues a diferencia de las otras áreas científicas (la astronomía, la geología, la química, la biología...) los objetos de conocimiento (los números, las funciones y sus propiedades...) no son accesibles físicamente a través de evidencias sensoriales

directas o mediante el uso de instrumentos. En cambio, solo se puede acceder y trabajar con ellos a través de signos y representaciones semióticas.

Con respecto al segundo requisito pareciera ser que no es específico de las matemáticas, pero es con el que la mayoría de los estudiantes se encuentra con problemas. El contenido de cada representación semiótica no depende sólo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Por ello, cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas.

2.2.3 Las representaciones semióticas: tratamiento y conversión

2.2.3.1 Tratamiento de las representaciones semióticas

Un concepto de relevancia en la perspectiva de Duval (1999) es el tratamiento. En este sentido, el autor lo define en los siguientes términos:

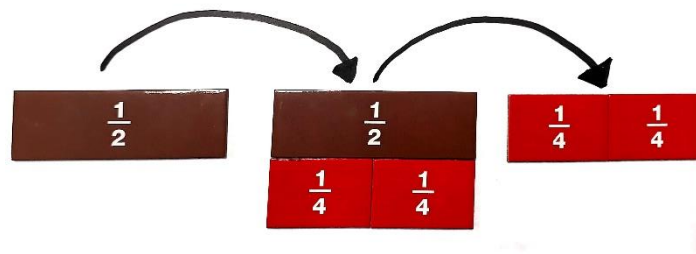
Un tratamiento es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal) de un mismo registro. Así un tratamiento es una transformación estrictamente interna a un registro: utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema; así, las paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de los números, las anamorfosis con las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas. Un registro ofrece posibilidades específicas de tratamiento (Duval, 1999: 44).

“Los sistemas semióticos son principalmente usados para operar, es decir para el tratamiento. Sin ´mediaciones semióticas´ no es posible la actividad matemática” (Duval, 2006: 158).

En este sentido considerese por ejemplo la fracción $\frac{1}{2}$ dada en un registro aritmético, un tratamiento en este mismo registro sera realizado cuando se encuentre una fracción equivalente; es decir $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$.

Con respecto a la misma fracción $\frac{1}{2}$, en la siguiente figura se ilustra un tratamiento empleando manipulativos.

Figura 6 Tratamiento empleando manipulativos



Fuente: Elaboración propia

2.2.3.2 Conversión de las representaciones y cambio de registro

Otro de los conceptos medulares de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica es la conversión entre dos registros diferentes. Desde esta mirada se define en los siguientes términos:

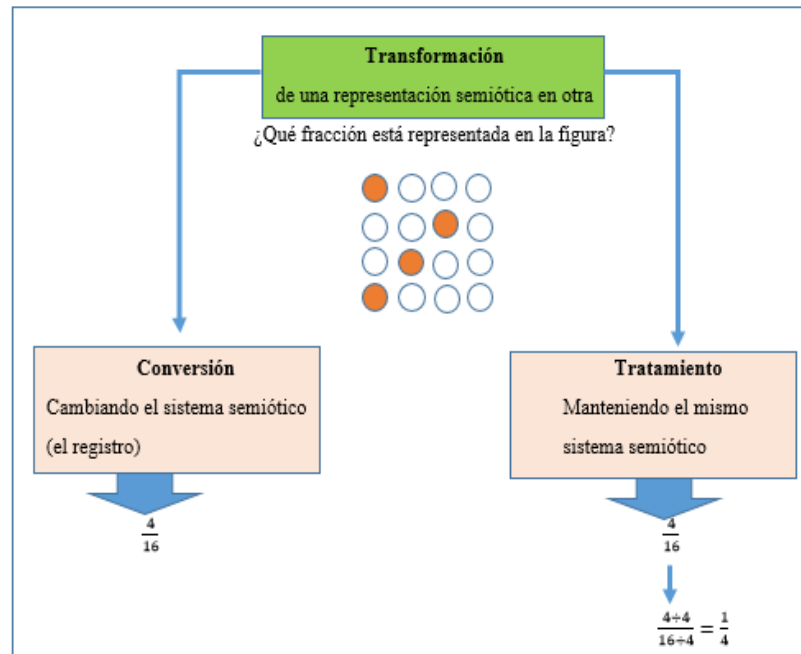
Una conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto, en un registro Q. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto, pero sin conservar el explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. La representación del objeto en el registro de llegada no tendrá el mismo contenido que su representación en el registro de partida (Duval, 1999: 45).

2.2.3.2.1 Características de la conversión

- Es orientada: Es indispensable precisar cuál es el registro de representación de partida P y cuál es el registro de representación de llegada Q.
- Congruencia o no congruencia: Cuando la conversión de un sistema de representación P a un sistema de representación Q se hace casi instantáneamente la conversión es congruente; así pues, la representación del registro de partida es transparente a la representación en el registro de llegada. Cuando la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada, se hablará entonces de no congruencia.

“Cuando analizamos cualquier actividad matemática tenemos que distinguir en primer lugar dos clases de transformación” (Duval, 2006: 146). La siguiente figura muestra estas transformaciones. En el ejemplo de la figura hay un único cambio de registro de representación en la conversión (de registro pictórico a un registro aritmético), mientras que en el tratamiento hay más secuencias de transformaciones. “Pero muy a menudo la conversión y el tratamiento están totalmente entrelazados en el mismo proceso matemático de resolución” (Duval, 2006: 146).

Figura 7 Transformación de un registro semiótico en otro (conversión y tratamiento).



Fuente: Adaptado de Duval, (2004)

Así, pues, Duval (1993,1995), define un sistema semiótico de la siguiente manera:

Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- 1) La presencia de una representación identificable, como una representación pictórica, una aritmética, o verbal.
- 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada, por ejemplo en la figura siete se observa una transformación (simplificación de la fracción $\frac{4}{16}$) en un registro aritmético.
- 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación en otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la

representación inicial, por ejemplo en la figura anterior la fracción $\frac{4}{16}$ dada en un registro pictórico fue convertida a un registro de representación aritmético.

2.3 La Resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas

El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas está muy relacionado con las concepciones que se tienen de las matemáticas mismas, así, para el caso, si la actividad matemática se mira como una acumulación de información (conceptos y habilidades) establecidos en una secuencia ordenada; aprender matemáticas significa identificar los procedimientos y conceptos de esta disciplina. En este sentido, “a la matemática se le ve como un cuerpo de conocimientos acotado y estadístico que el estudiante tiene que dominar por medio de la memorización” (Trigo, 1997: 2).

Por otro lado, si el quehacer matemático se concibe como un cuerpo dinámico en constante expansión, es decir, que el estudiante construya o desarrolle las ideas matemáticas, en este sentido se le permite al estudiante involucrarse en las actividades propias de esta disciplina. En este proceso el estudiante recolecta información, descubre o crea relaciones, discute sus ideas, plantea conjeturas, y constantemente evalúa y contrasta sus resultados.

Desde este punto de vista dinámico de las matemáticas es que cobra gran importancia la resolución de problemas como un componente indispensable en el proceso enseñanza- aprendizaje de las mismas. En este mismo orden de ideas se develan factores a considerar en la resolución de problemas.

Así pues, aunque existen varios factores que influyen en el éxito de las matemáticas, un factor que se considera importante es la habilidad de los estudiantes para reconocer y usar ciertas estrategias en la resolución de problemas. No solamente es importante que el

estudiante conozca la existencia de una serie de estrategias, sino que también es importante que desarrolle una serie de habilidades que le permitan identificar en que situaciones utilizarlas (Trigo, 1997: 26).

En la enseñanza tradicional se asocia a las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos certeros que no admiten errores, una disciplina donde se pueden obtener respuestas correctas de una manera rápida; de esta manera, pues, los estudiantes perciben la resolución de problemas como la selección apropiada de trucos que no son accesibles solamente aquellos con un talento especial para hacer matemáticas Trigo (1997).

En contraposición con lo tradicional de la enseñanza de las matemáticas, el punto de vista dinámico, permite al estudiante realizar conjeturas y probarlas, estar directamente involucrado en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, le permite interactuar con sus compañeros, además, el error es visto como un instrumento de aprendizaje.

Trigo (1997) en su obra Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas identifica cinco características de un ambiente de aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista dinámico.

- La aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
- El uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro solamente como autoridad para dar las respuestas correctas.
- Desarrollo del razonamiento matemático; no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
- La resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.

- Conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

2.3.1 Caracterizando un problema en matemática

La definición de problema en matemática está directamente ligada al individuo que hace matemática, al grado de dificultad que este individuo encuentra al resolver “un problema”, pues mientras que para un individuo resulta una tarea difícil, para otro, significa un simple ejercicio rutinario con poca o ninguna dificultad en su solución. En este sentido, Polya (1997) emplea el término “problema en matemática” a la tarea asociada a un individuo que es difícil para él resolverla. También la dificultad debe ser un impase intelectual, y no solamente a nivel operacional o de cálculo.

En la misma línea, Polya(1997) sostiene que un problema en matemática significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Un problema en matemática es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes:

- La existencia de un interés; es decir, una persona o grupo de individuos quienes quieren o necesitan encontrar una solución.
- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución. Se considera también el hecho de que el problema pueda tener más de una solución.

- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea. Un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo (Trigo, 1997).

2.3.3 Etapas o categorías en la resolución de problemas

El matemático y educador Polya (1997) en su obra cómo plantear y resolver problemas plantea cuatro etapas en la resolución de problemas:

- Paso 1: Comprender el problema

En esta etapa es indispensable entender la información del enunciado del problema y las posibles relaciones. Es inútil tratar de responder a una pregunta que no se comprende, y es agobiante trabajar en una obra sin interés. Estas dos conductas deben ser evitadas en la resolución de problemas, así pues, en la instrucción el maestro debe seleccionar el problema adecuadamente no tan fácil ni tan difícil; además, debe ser presentado de una manera natural e interesante para que capte el interés y entusiasmo por parte de los estudiantes para resolverlo, además, el problema debe plantearse con claridad.

- Paso 2: Concebir un plan

Se tiene un plan cuando se tiene una idea de qué cálculos, razonamientos, o construcciones se habrán de hacer para determinar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es concebir la idea de un plan. En esta etapa juega un papel importante las experiencias previas que se han tenido en la resolución de algún otro problema similar, así como también los conocimientos matemáticos adquiridos; de este modo el papel del profesor en esta etapa es de guiador para que el estudiante mismo pueda concebir el plan para resolver el problema, de ninguna manera debe imponerse con su idea.

- Paso 3: Ejecución del plan

Después de haber concebido el plan, que no es nada fácil, de hecho, lleva mucho esfuerzo y tiempo, ahora viene la etapa para poner en marcha ese plan. El plan proporciona una línea general. Ahora se debe asegurar que cada detalle del problema encaje perfectamente en esa línea, examinándolos pacientemente sin dar lugar a que algún error pueda disimularse.

- Paso 4: Visión retrospectiva

Esta etapa es de suma importancia en la resolución de problemas y obviada muy frecuentemente. Al haber encontrado la incógnita de un problema se tiende a pensar que el trabajo ha sido completado. Es en esta etapa donde se analiza si no hay errores en la solución, o encontrar una mejor vía para poder resolver el problema.

2. 4 Resolución de problemas con fracciones

A pesar de las dificultades conceptuales implicadas en la comprensión de las fracciones, algunos estudiantes intentan resolver problemas empleando representaciones pictóricas (gráficos, dibujos, etc.) que les son familiares y, con ello, prescinden de algoritmos formales (Parra y Flores , 2008).

Flores (2005) citado en Parra y Flores (2008) propone un modelo cuyo proposito es analizar y comprender la evolucion de las representaciones que los estudiantes elaboran en la resolucion de un problema que involucra fracciones. Se parte del análisis del conocimiento matemático que sustenta los razonamientos de los estudiantes al entender y solucionar el problema, se tiene en cuenta el empleo de representaciones gráficas y simbólicas, así como el empleo de algoritmos. El modelo identifica cuatro etapas que se detallan a continuación:

- i. Representación no canónica: La interpretación del problema es deficiente y la solución propuesta corresponde a un tipo diferente al que se plantea en el problema, lo que conduce a una solución errónea. Es decir, no se comprenden cabalmente las relaciones matemáticas implicadas en el problema y su solución, los estudiantes utilizan un procedimiento que no corresponde a lo que el problema plantea.
- ii. Representación canónica no algorítmica: La interpretación del problema es correcta y la solución se desarrolla mediante representaciones pictóricas sin llegar a utilizar un algoritmo formal que, en el caso de las fracciones, se diría que es sustituido por un algoritmo gráfico Valdemoros, (1997).
- iii. Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico. La interpretación del problema es correcta y conduce al estudiante a utilizar conjuntamente algoritmos y representaciones pictóricas acordes al problema. Los algoritmos y representaciones pictóricas coinciden, pero puede ocurrir que los estudiantes no logren explicar por qué los resultados son semejantes.
- iv. Representación canónica algorítmica: El estudiante comprende el problema y su relación con el algoritmo que va a utilizar para obtener la solución. El estudiante puede prescindir de representaciones pictóricas haciendo uso del algoritmo formal.

2.5 Los manipulativos en la enseñanza de las matemáticas

En el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática hay conceptos abstractos de difícil comprensión y adquisición para muchos estudiantes, debido a que estos conceptos no se pueden representar por sí mismos. En este sentido, “los materiales manipulables desempeñan un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, son instrumentos que facilitan los procesos para contextualizar y concretar las experiencias y los conceptos.” (García , Granier, & Moreno, 2013).

García , Granier, y Moreno (2013) definen los recursos didácticos como todos los objetos, aparatos, medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje. Se incluye en su clasificación todo tipo de material, ya sean estos softwares didácticos y no didácticos, libros, juegos, notaciones simbólicas, representaciones gráficas y, en general, todas las formas expresivas e instrumentales que permitan el trabajo docente.

Por otro lado, Valenzuela (2012) define los materiales manipulativos como todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que los estudiantes palpen con sus manos, además, de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones.

En este trabajo se considera material manipulable a un objeto físico tangible, diseñado con un propósito didáctico para que los estudiantes puedan palpar con sus manos, permitiéndoles explorar, interiorizar y comprender conceptos matemáticos y potencializar el desarrollo de procedimientos matemáticos.

Existen diversas investigaciones y teorías en relación a las etapas de desarrollo cognoscitivo, en la siguiente tabla se muestra las etapas de desarrollo del niño de acuerdo a la teoría de Piaget.

Tabla 3 Etapas de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget

Etapa	Edad del niño	Característica principal
Sensoriomotora El niño activo	Desde que el niño nace hasta los dos años	El niño aprende a responder por medio de la actividad motora a los estímulos que son sometidos sus impulsos. Un niño en esta etapa aparte de ver y escuchar un juguete, aprende a sostenerlo, moverlo. La tarea del niño en esta etapa es aprender a coordinar secuencias sensoriomotoras para resolver problemas simples.
Preoperacional El niño intuitivo	Desde los dos a los siete años	Los niños en esta etapa desarrollan la capacidad para manejar el mundo de manera simbólica o por medio de representaciones. Los niños resuelven problemas de manera intuitiva, pero el pensamiento está limitado por la rigidez, la centralización y el egocentrismo.
Operaciones concretas El niño práctico	Desde los siete años hasta los once años	Los niños en esta etapa desarrollan el pensamiento lógico, pero no abstracto. Los niños en esta etapa aprenden las operaciones lógicas de seriación, de clasificación y de conservación. El pensamiento está ligado a los fenómenos y objetos del mundo real.
Operaciones formales El niño reflexivo	Desde los once a doce años y en adelante	En esta etapa el niño aprende sistemas abstractos del pensamiento que le permiten usar la lógica proposicional, el razonamiento científico y el razonamiento proporcional.

Fuente: (Linares, Teorías cognoscitivas del desarrollo, 2008)

Conforme a la teoría de Piaget descrita en la tabla anterior en la etapa de operaciones concretas, el niño necesita ser expuesto a situaciones de aprendizaje donde el pueda “manipular” conceptos. Es en este sentido donde los materiales manipulativos cobran relevancia en el aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos que los estudiantes deben desarrollar en esta etapa de su desarrollo. Así, por ejemplo, a un niño en la etapa de operaciones concretas se le hará difícil comparar las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ si solo se le presentan en una representación aritmética, pero si a este niño se le proporciona un material tangible, por ejemplo, barras de fracciones con las cuales

él puede “manipular” estas fracciones y hacer la respectiva comparación, la tarea será resuelta con éxito.

En este estudio se consideraran dos tipos de materiales manipulativos empleados en el aprendizaje de fracciones: contadores de colores y barras de fracciones.

2.5.2 Contadores de dos colores

Los contadores de dos colores consisten en objetos de forma circular, donde una cara es de color rojo y la otra, amarilla, tal como se muestra en la siguiente figura. Este material manipulable puede emplearse para introducir y reforzar diversos conceptos en matemáticas como:

- Conteo
- Agrupación
- Representación de fracciones en un conjunto discreto
- Números enteros

Figura 8 Contadores de dos colores



Fuente: <https://www.google.com/search?q=contadores+de+dos+colores&source>

Este material está elaborado en plástico o madera si se adquiere en tiendas especializadas en ofrecer este tipo de producto, sin embargo puede ser elaborado por los estudiantes empleando cartón, cartulina, o cualquier otro material más económico.

Los contadores de colores pueden emplearse para introducir o fortalecer el tema de fracciones equivalentes, especialmente cuando se está abordando el significado parte-todo de una fracción.

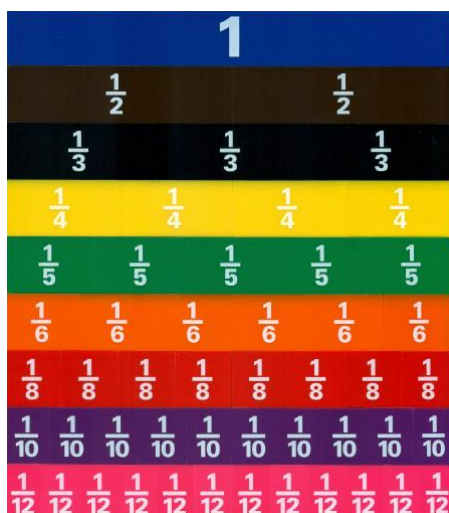
En este estudio, se empleó este material en la secuencia didáctica siete, ver ejemplo en la figura 48 pág. 127.

2.5.2 Barras de fracciones

Las barras de fracciones son un material manipulativo que consiste en un conjunto de piezas de tamaño proporcional que representan diversas fracciones: un entero, mitades, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, décimos, y doceavos en diferentes colores y con la impresión de la fracción en cada pieza, tal como se muestra en la figura nueve. Este material se puede emplear en el aprendizaje de los siguientes conceptos.

- Fracciones equivalentes
- Comparación de fracciones
- Suma y resta de fracciones
- Fracciones mixtas

Figura 9 Barras de fracciones



Fuente: <https://www.google.com/search?q=barras+de+fracciones&source>

Este material manipulativo puede estar elaborado en plástico, madera, o cartón comprimido y se adquiere en tiendas especializadas en ofrecer este tipo de productos. Para bajar los costos de

adquisición, los estudiantes pueden imprimir plantillas del set de barras de fracciones y laminarlas o realizarlas con cartulina o cartón. También

Las barras de fracciones pueden ser empleado para introducir o reforzar el tema de fracciones equivalentes, para la enseñanza-aprendizaje del concepto de suma y resta de fracciones con diferente denominador es muy efectivo, este material permite al estudiante dar sentido a los cálculos aritméticos cuando se suma y resta fracciones. Este material fue empleado en este estudio en la secuencia didáctica cuatro, cinco, y seis. Ver figura 34, 35, 36, 37, páginas 115-117.

2.6. Las fracciones en el currículo hondureño

Fundamental para la enseñanza de la matemática es el concepto de número y operaciones entre números. Por eso es tan importante la teoría del sistema de números reales en el cual se definen los números naturales, enteros, racionales, reales. Por su importancia, no solamente, en la matemática sino también en la vida diaria y profesional, esta teoría ocupa un lugar prominente en el programa de estudio de la educación básica (DCNB, 2000).

Así que dentro del conjunto de los números racionales se estudian las fracciones, un concepto de suma importancia en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. El currículo nacional básico de Honduras propone abordarlo de la siguiente manera.

El currículo sugiere introducir este concepto en cuarto grado, estableciendo las siguientes expectativas de logro, contenidos conceptuales y procesos y actividades sugeridas:

Tabla 4 Fracciones: Cuarto Grado

Expectativas de logro	Contenidos conceptuales y actitudinales	Procesos y actividades sugeridas
- Desarrollar el concepto de fracción. - Reconocer el numerador y el denominador de una fracción.	- Cantidad menor o igual que 1 en forma fraccionaria. - Estimación del concepto de número fraccionario para representar situaciones de la vida real.	- Reconocen la presencia de fracciones en diferentes situaciones diarias. Ejemplo: división de 1 metro en varias partes iguales. - Representan fracciones pequeñas como partes de figuras geométricas (círculos, cuadrados, rectángulos). - Leen y escriben fracciones pequeñas cuyo numerador es 1 ($1/2$, $1/3$, $1/4$, ... hasta $1/10$). - Grafican fracciones en la recta numérica. - Distinguen entre numerador y denominador de una fracción.

Fuente: (DCNB, 2000)

En quinto grado los estudiantes deben operar con fracciones para resolver problemas, las expectativas de logro, contenidos y actividades se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 5 Fracciones: Quinto grado

Expectativas de logro	Contenidos conceptuales y actitudinales	Procesos y actividades sugeridas
- Desarrollan el concepto de fracciones como ampliación necesaria del conjunto de números Naturales. - Estiman el concepto de número fraccional para resolver problemas de la vida real. - Reconocen fracciones equivalentes.	- Concepto y construcción numeral de una fracción. - Fracciones equivalentes. - Reducción de fracciones a su mínima expresión. - Comparación de dos fracciones. - Adición de dos fracciones que tienen el mismo denominador. - Sustracción de dos fracciones que tienen el mismo denominador.	- Representan fracciones cuyo numerador es menor que el denominador en forma gráfica usando figuras geométricas. - Representan fracciones menores que 1 en la recta numérica. - Leen y escriben fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador. - Representan fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador en forma gráfica usando figuras geométricas. - Representan fracciones mayores que 1 en la recta numérica. - Leen y escriben fracciones cuyo numerador es menor que el denominador. - Reconocen fracciones equivalentes. Ejemplo: $5/3 = 10/6 = 15/9 = \dots$ - Reconocen fracciones equivalentes a un número natural. Ejemplo: $1 = 1/1 = 2/2 = 3/3 \dots$

- Reducen fracciones a su mínima expresión.	- Fracciones propias, impropias y mixtas.	- Reducen fracciones a su mínima expresión, usando el Máximo Común Divisor. Ejemplo: $15/9 = (3 \times 5)/(3 \times 3) = 5/3$ (3 es el MCD de 15 y 9).
- Resuelven problemas que implican la adición y sustracción de fracciones que tienen el mismo denominador.	- Transformación de fracciones impropias en fracciones mixtas. - Transformación de fracciones mixtas en fracciones impropias.	- Comparan y ordenan fracciones que tienen el mismo denominador. - Comparan una fracción con un número natural. Suman un número natural y una fracción. Ejemplo: $1 + 2/3 = 3/3 + 2/3 = 5/3$. - Restan una fracción de un número natural. Ejemplo: $2 - 5/3 = 6/3 - 5/3 = 1/3$. - Restan un número natural de una fracción. Ejemplo: $5/3 - 1 = 5/3 - 3/3 = 2/3$. Suman y restan dos fracciones que tienen el mismo denominador. Ejemplos: $5/3 + 2/3 = 7/3$ $5/3 - 2/3 = 3/3 = 1$. - Resuelven problemas que implican la adición y resta de fracciones que tienen el mismo denominador. - Distinguen entre fracciones propias, impropias y mixtas. - Descomponen una fracción cuyo numerador es mayor que el denominador en un número entero y una fracción cuyo numerador es menor que el denominador. Ejemplo: $5/3 = 3/3 + 2/3 = 1 + 2/3$. Transforman una fracción mixta en una fracción impropia.

Fuente: (DCNB, 2000)

En sexto grado los estudiantes realizan las operaciones básicas con números fraccionarios y convierten fracciones en números decimales y viceversa, las expectativas de logro, contenidos y actividades se detallan a continuación.

Tabla 6 Fracciones: Sexto grado

Expectativas de logro	Contenidos conceptuales y actitudinales	Procesos y actividades sugeridas
- Aplican la adición y la sustracción de fracciones en la vida real.	Adición y Sustracción de fracciones. - Adición de fracciones cuyos denominadores sean diferentes.	- Suman y restan en forma gráfica dos fracciones cuyos denominadores son diferentes (usando azulejos). - Descubren la importancia del Mínimo Común Múltiplo de los dos denominadores para la determinación de la suma y la resta.

- Aplican las propiedades básicas de la adición. - Resuelven problemas de la vida real que implican fracciones. - Usan la calculadora o computadora para comprobar adiciones y sustracciones con fracciones.	- Sustracción de fracciones cuyos denominadores sean diferentes. - Valoración de las operaciones de adición y sustracción de fracciones para resolver problemas de la vida cotidiana. - Valoración de la calculadora y computadora como recursos didácticos.	- Suman y restan en forma numérica dos fracciones cuyos denominadores son diferentes buscando el Mínimo Común Múltiplo de los mismos. - Reducen el resultado de la adición y sustracción a su mínima expresión. Reconocen y aplican las propiedades básicas de la adición: • Propiedad conmutativa. • Propiedad asociativa. - Reconocen la identidad de la adición 0: $a/b + 0 = a/b + (0 \times b)/b = (a + 0)/b = a/b$. - Comparan resultados de adiciones y sustracciones con fracciones, utilizando la calculadora. - Realizan adiciones y sustracciones con fracciones, utilizando juegos tutorados en la computadora. - Suman y restan fracciones mixtas. Resuelven ejercicios de la vida real.
- Aplican las propiedades básicas de la multiplicación. - Resuelven problemas de la vida real que implican fracciones. - Usan la calculadora o computadora para comprobar multiplicaciones y divisiones con fracciones.	Multiplicación y División de fracciones. • Multiplicación de una fracción por un número natural. • Multiplicación de dos fracciones. • Multiplicación de una fracción mixta por un número natural. • Multiplicación de tres fracciones. • División de una fracción entre un número natural. • División de dos fracciones. • División de una fracción mixta entre un número natural. - Valoración de las operaciones de multiplicación y división de fracciones para	- Multiplican una fracción propia por un número natural en forma gráfica usando azulejos mediante el concepto de área. - Multiplican dos fracciones propias en forma gráfica, usando azulejos mediante el concepto de área. - Multiplican una fracción mixta por un número natural en forma gráfica, usando azulejos mediante el concepto de área. Multiplican dos fracciones mixtas. - Multiplican tres fracciones. - Desarrollan el concepto de división de una fracción entre un número natural en forma gráfica usando azulejos. - Desarrollan el concepto de división de dos fracciones en forma gráfica usando azulejos.

resolver problemas de la vida cotidiana.

-Valoración de la calculadora y computadora como recursos didácticos.

Fuente: (DCNB, 2000)

De acuerdo a lo descrito anteriormente, el concepto de fracción y sus operaciones se desarrolla en cuarto, quinto y sexto grado de la educación básica en Honduras, a lo largo del currículo este tema está directamente vinculado con otros temas como ser: longitud, tiempo, peso, capacidad, números decimales, entre otros.

Las fracciones han sido empleadas por diversas civilizaciones, a continuación se mencionan algunas de ellas.

2.7 Origen histórico de las fracciones

2.7.1 Civilización egipcia

Se considera que los egipcios fueron los primeros en emplear las fracciones unitarias, es decir fracciones de la forma $\frac{1}{x}$, x número natural y numerador 1, también empleaban las fracciones especiales $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ y así con este conjunto de fracciones, los egipcios eran capaces de resolver una variedad de problemas que involucraban fracciones, especialmente problemas de reparto, en cuanto a la escritura tenían dos tipos de representación numérica, una jeroglífica y otra hierática (ambas datan de 2000a.C. aproximadamente) (Boyer, 1999).

El papiro de Rhind o papiro de Ahmes se pueden apreciar problemas relacionados a la aritmética, geometría, reparto proporcional y fracciones: en la siguiente ilustración se aprecia los símbolos usados por los egipcios para representar fracciones.

Figura 10 Símbolos empleados por los egipcios para representar fracciones

$$| = 1, \cap = 10, \textcircled{9} = 100, \text{ etc.}$$

$\textcircled{ } = \frac{1}{3}$	$\textcircled{ } = \frac{1}{5}$
$\textcircled{\cap } = \frac{1}{21}$	$\textcircled{9 } = \frac{1}{102}$

Fuente: <https://sites.google.com/site/salonsosanz/egipto4.JPG>

2.7.2 Civilización babilónica

Aparte de los egipcios, otra civilización que contribuyó en gran medida al desarrollo del conocimiento matemático fue la babilónica. Su sistema de numeración era posicional y de sexagesimal, ellos no solamente utilizaron las fracciones bajo el significado de parte todo, sino también, como el cociente de una fracción. Las evidencias de los trabajos realizados con fracciones por esta civilización se encuentran en tablillas de escritura cuneiforme provenientes de la dinastía de Hammurabi (1800-1600 a. C) (Boyer, 1999)

Figura 11 Jeroglíficos de fracciones cuneiformes babilónicas

	$1/2$
	$1/3$
	$2/3$
	$5/6$

Fuente: <http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia>

2.7.3 Civilización china

Al igual que hoy en día, los chinos desarrollaron un sistema numérico decimal posicional. Contaban con símbolos para los dígitos del 0-9 así como también, para las potencias de 10. Esta civilización fue la que logró una representación parecida a la que empleamos en la actualidad para representar las fracciones ubicando el numerador sobre el denominador, a diferencia ellos no ubicaban la barra fraccionaria (Boyer, 1999).

Los hallazgos más antiguos de la matemática china datan del siglo VI –XI a.C. con la dinastía Shang, estas inscripciones matemáticas se han encontrado en huesos y caparazones de tortugas: en el libro Chou Pei Suan Ching que data aproximadamente de 300 A.C. se encuentran operaciones con fracciones, cálculos astronómicos y algunas propiedades de los triángulos, en este libro se pone en evidencia la utilidad de las fracciones en cuanto a resolver problemas de repartir (fracción como parte todo) (Boyer, 1999).

2.8 Fracciones

Una fracción se describe a menudo como la relación o cociente de dos números enteros a y b , expresado de forma simbólica $\frac{a}{b}$, donde b no es cero, es un símbolo que tiene sentido y puede ser interpretado y manipulado. De acuerdo a Wong y Evans, (2007) la fracción incluye cinco esquemas de interconexión, sin embargo, distintas interpretaciones, en el uso de estas interpretaciones, se puede explorar las diversas características y las manipulaciones de las fracciones (como fracciones propias e impropias, números mixtos, fracción equivalentes, la comparación, la adición, multiplicación y división). El concepto de fracciones también se relaciona con otros conceptos matemáticos como la geometría, recta numérica, y la multiplicación y división de números enteros.

Tabla 7 *Diferentes interpretaciones para la fracción 3/4*

Interpretación	Ejemplo
Parte-todo	3 de cada 4 partes iguales de un todo o conjunto de objetos o colección
Medida	$\frac{3}{4}$ significa la distancia de 3 ($\frac{1}{4}$ unidades) de cero en la recta numérica
Operador	$\frac{3}{4}$ de algo, estirado o encogido
Cociente y división indicada (Reparto)	3 dividido por 4, $\frac{3}{4}$ es la cantidad que recibe cada persona
Razón	Por 3 partes de cemento, 4 partes de arena

Fuente: Significados de las fracciones (Quispe y Gallardo, 2009)

-*Parte-todo*. Es el significado manifestado al considerar la fracción a/b como la relación existente entre dos cantidades específicas: un “todo” o unidad b (continua o discreta), representando un número total de partes iguales, y una “parte” a , destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total.

-*Cociente*. Significado que enfatiza la fracción a/b como operación de dividir un número natural por otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales.

-*Medida*. Significado que tiene su origen al medir cantidades de magnitudes que, siendo medibles, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción a/b emerge, entonces, de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

-*Razón*. Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción a/b como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b , siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas.

-*Operador*. Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción a/b empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b .

Uno de los conceptos en matemáticas que presenta dificultad en los estudiantes, es el de fracción. Algunos autores sostienen que esta problemática se debe a las diversas representaciones conceptuales (acepciones, interpretaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto como las que se han mencionado anteriormente.

Conceptos de fracciones pueden ser explicados por los profesores y estudiantes que utilizan una combinación de representaciones externas tales como símbolos escritos, el lenguaje hablado, los materiales concretos, dibujos y ejemplos del mundo real (Wong & Evans, 2007).

En este capítulo se abordó la perspectiva teórica de la investigación, se comenzó con los antecedentes que consistió en la exposición de trabajos de investigación relacionados con la temática de este trabajo. Posteriormente se abordó la teoría de las representaciones semióticas de Duval y la resolución de problemas de Polya, otro apartado trató la importancia de los manipulativos en la enseñanza de las matemáticas y finalmente se presentó una reseña histórica de las fracciones, así como también cinco significados de las mismas.

Capítulo 3 : Marco Metodológico

- 3.1 Enfoque de la investigación
- 3.2 Tipo de investigación
- 3.3 Diseño de la investigación
- 3.4 Categorías de análisis
- 3.5 Fuentes de Información
- 3.6 Estrategia de recolección de datos
- 3.7 Análisis de datos

A continuación, se abordan los aspectos metodológicos que sirvieron de base para el desarrollo de esta investigación, tales como el enfoque de investigación, tipo, diseño, categorías de análisis, fuentes de información, estrategias de recolección de datos y su respectivo análisis.

3.1 Enfoque de la investigación

El enfoque de este estudio es cualitativo. El objetivo de este tipo de investigación es “escribir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (Hernández Sampieri, 2014), lo cual encaja con el objetivo de la investigación.

3.2 Tipo de investigación

Este trabajo fue una investigación-acción cualitativa; pues este tipo de enfoque busca comprender su fenómeno de estudio en su ambiente natural. El investigador observa eventos ordinarios y actividades cotidianas tal y como suceden en sus ambientes naturales, y está directamente involucrado con las personas que participan en el estudio y con sus experiencias personales (Hernández Sampieri, 2014:497). También implica registrar, recopilar, analizar nuestros propios juicios, reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre; exige llevar un diario personal en el que se registran nuestras reflexiones y utiliza técnicas de recolección tales como aplicación de prueba diagnóstica y secuencias de aprendizaje, revisión de documentos. Todo ello formulado de acuerdo a los objetivos propuestos en la investigación y a la naturaleza del problema en estudio.

3.3 Diseño de la investigación

Este trabajo consideró un diseño fenomenológico, ya que se observó el fenómeno en estudio tal y como se da en su contexto natural, es decir, en su salón de clases en su horario correspondiente sin considerar algún tipo de situación que afecte el desarrollo del estudio.

De acuerdo a (Hernández Sampieri, 2014: 494) un diseño fenomenológico se fundamenta en las siguientes premisas:

- Se pretende describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente.
- Se basa en el análisis de discursos y temas, así como en la búsqueda de sus posibles significados.
- El investigador confía en la intuición, imaginación y en las estructuras universales para lograr aprender la experiencia de los participantes.
- El investigador contextualiza las experiencias en términos de su temporalidad, espacio, corporalidad y el contexto relacional.

Posteriormente se recolectaron los datos y se analizaron en un tiempo específico. Todo ello, orientado a la reflexión de las unidades de análisis y su interrelación en un momento dado.

3.4 Categorías de análisis

De acuerdo a la formulación del problema de investigación, formulación de preguntas y objetivos y en congruencia con el marco teórico y con el enfoque metodológico se consideraron las siguientes categorías de análisis que se presentan en la tabla 8.

Tabla 8 *Categorías de análisis*

Categoría	Definición conceptual	Definición operacional	Indicadores
Representaciones simbólicas.	Atiende a resoluciones, las cuales utilizan símbolos convencionales empleados en matemática. (Verettoni, 2010)	Para este estudio se consideró representación simbólica de una fracción a la escritura de la misma en la forma a/b ó $a\frac{b}{c}$.	Al escribir fracciones de la forma a/b los estudiantes distinguen el significado que tiene tanto el numerador como el denominador. Resolver operaciones aritméticas de suma y resta de fracciones.
Representaciones pictóricas o gráficas	Esta categoría se refiere a la resolución mediante dibujos que intentan representar lo más fielmente posible los elementos involucrados en el problema. (Verettoni, 2010)	Representación de fracciones mediante recursos como: recta numérica, círculos, rectángulos.	Identificar y ubicar fracciones en la recta numérica. Construcción de diversas imágenes para representar fracciones como: círculos, rectángulos.
Representaciones verbales	Lenguaje coloquial que es utilizado para representar situaciones que pueden ser modeladas en cualquiera de los	Forma de comprender un problema que involucra fracciones.	Al leer una situación problemática los estudiantes son capaces de identificar que se trata de una situación que involucra fracciones.

	otros registros. (Verettoni, 2010)		Lectura correcta de una fracción de la forma a/b .
Representaciones con manipulativos	Conjunto de materiales físicos que se caracterizan por ofrecer a los estudiantes la obtención de conocimiento a través de experiencias tangibles con objetos a través de su manipulación.	Material tangible como barras de fracciones que ayudan al estudiante a adquirir el concepto de fracción como un número mayor o menor que uno, a representar y sumar fracciones de igual y diferente denominador, representar fracciones equivalentes y fracciones mixtas.	Sumar fracciones de igual y diferente denominador con barras de fracciones. Simplificar fracciones con barras de fracciones. Encontrar fracciones equivalentes con barras de fracciones.
Tratamiento de un registro de representación	El tratamiento de una representación es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada. (Duval, 2004)	Transformación realizada dentro de un sistema de representación de fracciones; verbal, simbólico, gráfico o con material manipulativo.	Simplificar y sumar fracciones dentro del sistema simbólico y con material manipulativo.
Conversión de un registro de representación.	La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra	Transformación de una fracción o suma de fracciones de un registro de representación simbólico a gráfico, verbal, o empleando material manipulativo.	Dada una fracción en registro de representación simbólica expresarla empleando material manipulativo.

representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. (Duval, 2004)	Dada una fracción representada con material manipulativo expresarla en registro de representación simbólico o gráfico.
---	---

Fuente: Elaboración propia

3.5 Fuentes de Información

Este estudio se llevó a cabo en la institución International School Tegucigalpa, la cual cuenta con los niveles de pre-escolar, primaria y secundaria con aproximadamente 1200 estudiantes en total. International School Tegucigalpa es una escuela bilingüe acreditada por los entes internacionales, Asociación Internacional de Escuelas Cristianas (ACSI) y advancED en la cual el idioma principal de instrucción es inglés. En el nivel de primaria cuenta con tres secciones de 20 a 25 estudiantes en cada una.

La población de este estudio estuvo constituida por estudiantes de quinto grado. Este nivel consta de un total de 70 estudiantes divididos en 3 secciones de 20-25 estudiantes en cada sección. El estudio fue realizado con una muestra de 21 estudiantes de ambos sexos, con una edad promedio de 11 años, escogiendo una de las tres secciones y tomando consideraciones de factibilidad de la temática curricular abordada en este nivel. Las fracciones son requeridas en los grados subsiguientes incluyendo los niveles escolares superiores. Se consideró, por la naturaleza del estudio, atendiendo a los principios de una investigación de corte cualitativo, un muestreo por conveniencia (Hernández Sampieri, 2014:390).

Las fuentes de información primarias utilizadas en este estudio fueron los datos obtenidos en la investigación de campo como prueba diagnóstica, secuencias de aprendizaje, información audiovisual, y la fuente de información secundaria incluyó consulta bibliográfica especializada en libros, revistas, tesis y artículos de investigación.

3.6 Estrategia de recolección de datos

La recolección de datos en esta investigación se llevó a cabo como se detalla a continuación.

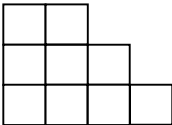
- Observación de campo: esta técnica se utilizó para recolectar datos con el propósito de explorar y describir el ambiente donde se desarrolló el estudio y así responder las preguntas de estudio. El investigador participó activamente en las tareas y situaciones, se realizaron siete observaciones que tuvieron una duración de unos 40 minutos aproximadamente cada una. Los estudiantes participantes en el estudio sabían que estaban siendo observados. Se llevó un registro de las observaciones realizadas por escrito y audiovisual, así como también las hojas de trabajo desarrolladas por cada grupo (ver anexo cuatro).
- Prueba Diagnóstica: esta prueba fue diseñada con el objetivo de conocer los conocimientos previos de los estudiantes, consistió de 13 ítems cada uno con un propósito definido (ver tabla 9), así para el caso el ítem 1 consistió en identificar la fracción representada en lenguaje pictórico en un conjunto discreto dado. El ítem 2 en convertir la fracción dada en registro de representación verbal a registro de representación pictórico. El ítem 9 en realizar un tratamiento a una fracción dada para encontrar una fracción equivalente a la misma. Todos los ítems se describen más adelante.

La validación de los instrumentos en una investigación tal como lo menciona Hernández Sampieri (2014:200) es el grado en que un instrumento mide realmente la variable que se quiere medir.

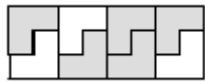
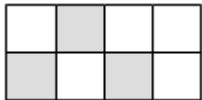
En este estudio se realizó una validación de expertos o *face validity*, la cual se refiere al grado en que aparentemente un instrumento mide la variable en cuestión, de acuerdo con “voces calificadas”. Se encuentra vinculada a la validez de contenido y se establece mediante la evaluación del instrumento ante expertos. (Hernández Sampieri, 2014:204). En este sentido los expertos encargados en validar los instrumentos del estudio fueron profesores de matemática con amplia experiencia de la Universidad Católica del Maule, Chile.

A continuación, se presenta una tabla resumen de la prueba diagnóstica.

Tabla 9 *Resumen de prueba diagnóstica*

Ítem	Descripción	Objetivo
¿Qué fracción del conjunto de contadores está sombreado? a. 3 séptimos b. 3 de 4 c. $\frac{7}{3}$ d. 7 tercios 	Se presenta un conjunto de 7 contadores donde 3 de ellos están sombreados en color negro.	Identificar la fracción representada en lenguaje pictórico en un conjunto discreto dado.
Coloree dos tercios en la siguiente figura. 	Se presenta una figura asimétrica de forma escalonada donde el primer peldaño tiene 4 cuadrados, en el segundo peldaño 3 cuadrados, y en el tercer peldaño 2 cuadrados. El	Convertir la fracción dada en registro de representación verbal a registro de representación pictórico

Nombre cada una de las siguientes fracciones presentadas. Realícelo en palabras y símbolos.



Circule el número mayor de todos. Explique su respuesta.
1 tercio, 1 cuarto,
1 sexto, 1 quinto

Circule el número mayor de todos. Explique su respuesta.

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$

estudiante debe colorear
1/3 de la figura dada.

Se presentan 4 figuras geométricas con partes sombreadas. Los estudiantes deben escribir la fracción representada pictóricamente en representación aritmética y verbal.

Convertir una fracción dada en lenguaje pictórico en lenguaje aritmético y verbal.

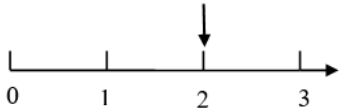
Se presentan 4 fracciones dadas en lenguaje verbal. El estudiante debe identificar la fracción mayor.

Comparar fracciones dadas en lenguaje verbal.

Se presentan 4 fracciones escritas en representación aritmética. El estudiante debe identificar la fracción más grande del conjunto dado.

Comparar fracciones dadas en lenguaje aritmético.

Circule la fracción menor de cada uno de los siguientes pares. Explique su elección a) $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{7}$ c) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{10}$	En este problema se presentan 3 pares de fracciones. Un par de fracciones contiene igual numerador y diferente denominador, no múltiplos entre sí. El segundo par de fracciones tienen diferente numerador e igual denominador, y el tercer par de fracciones tiene diferente numerador y denominador, siendo los denominadores múltiplos entre sí.	Comparar dos fracciones dadas en representación aritmética con igual denominador y con diferente denominador.
Escriba las siguientes fracciones en orden ascendente (de menor a mayor). Explique porque las ordenó de esa manera. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$	Se presenta un conjunto de 5 fracciones en lenguaje aritmético, cuatro de ellas tienen denominadores múltiplos entre sí. La tarea del estudiante es ordenar el conjunto de fracciones de menor a mayor.	Ordenar las fracciones dadas en lenguaje aritmético de menor a mayor.
Adrian puso una marca sobre esta recta numérica. ¿Corresponde la marca a la fracción $\frac{2}{3}$?	En este problema se presenta una recta numérica dividida en 3 partes con una marca indicando sus dos	Identificar fracciones dada su representación en lenguaje gráfico.

SI o NO (<i>circule</i>). <i>Exlique su respuesta.</i> 	terceras partes. El estudiante tendrá la tarea de decidir si la marca indica $\frac{2}{3}$ de la recta y explicar el porqué de su decisión.
En cada caso escriba el número que falta. Explique su respuesta. a) $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{18}$ b) $\frac{3}{12} = \frac{1}{\quad}$	En este problema se presenta dos pares de fracciones equivalentes. En un par de fracciones se desconoce el numerador de una fracción que hace las dos fracciones equivalentes. En el otro par se desconoce el denominador de una de las fracciones que hace de las dos fracciones equivalentes. Realizar un tratamiento a una fracción dada para encontrar una fracción equivalente a la misma.
Jacobo gastó $\frac{1}{4}$ de su dinero y Sara gastó $\frac{1}{2}$ de su dinero. ¿Será posible para Jacobo haber gastado más dinero que Sara? Explique su respuesta.	Aquí se presenta una situación problemática donde se proporciona la fracción de la cantidad de dinero gastada por dos personas, el trabajo del estudiante será averiguar quién de las dos gastó más dinero comparando las dos fracciones dadas. Realizar tratamiento para encontrar y comparar fracciones equivalentes.

En una repostería, $\frac{3}{8}$ de harina es usada para hacer pan, y $\frac{2}{8}$ de la harina es usada para hacer pasteles. ¿Qué fracción de la harina ha sido usada?	En este problema se presenta una situación problemática que involucra dos fracciones semejantes. Para obtener la solución del problema el estudiante tendrá que sumar las fracciones dadas.	Resolver una situación problemática que involucra fracciones semejantes.
Encuentre un medio, un cuarto, y un tercio de cada uno de los siguientes números si es posible. Escriba su respuesta sobre la línea. Si no es posible ponga una x junto a la letra, y explique porque no es posible.	Aquí se presenta una situación problemática donde se proporciona la cantidad de kilómetros que se recorrerá en una carrera de estaciones de igual distancia, y la fracción recorrida por cada corredor por cada estación. La tarea del estudiante será averiguar la cantidad de corredores necesarios para completar la carrera.	Resolver una situación problemática que involucra multiplicación de fracciones o suma recursiva de fracciones.
Encuentre un medio, un cuarto, y un tercio de cada uno de los siguientes números si es posible. Escriba su respuesta sobre la línea. Si no es posible colocar una x junto a la letra, y explique porque no es posible.	En este problema se presenta un set de 4 números. La tarea del estudiante es encontrar la mitad, la tercera y la cuarta parte del número dado.	Realizar tratamiento para encontrar el producto de fracciones.

Fuente: Elaboración propia

- Secuencias didácticas de aprendizaje: el estudio consistió en siete secuencias didácticas elaboradas con propósitos definidos para lograr los objetivos de la investigación. Por ejemplo, la secuencia didáctica 1 fue diseñada empleando un registro de representación pictórico con el objetivo de que los estudiantes realizaran la conversión de ese registro al registro aritmético. Además, identificar fracciones equivalentes en registro de representación pictórico y aritmético.

La secuencia didáctica 4 consistió en una serie de sumas de fracciones con diferente denominador en registro pictórico. Las tareas a desarrollar por los estudiantes consistieron en representar las sumas empleando material manipulativo, luego convertir las fracciones en un registro aritmético y hacer tratamientos para resolver cada problema presentado. Todas las secuencias didácticas de aprendizaje se describen posteriormente. Estas secuencias didácticas de aprendizaje fueron validadas a criterio de juicio de expertos. A continuación, se presenta la descripción y objetivos de cada secuencia didáctica de aprendizaje.

Tabla 10 *Secuencia de aprendizaje 1*

Secuencia didáctica de aprendizaje 1
Descripción
La actividad uno estuvo diseñado en un registro de representación pictórico. Se les proporcionó a los estudiantes un conjunto de 6 círculos congruentes divididos de la siguiente manera: El primer círculo está dividido en 2 partes con una de sus partes sombreada; el segundo círculo está dividido en 6 partes iguales, 3 de las cuales están sombreadas; el tercer círculo está dividido en 4 partes iguales con una de sus partes sombreada; el cuarto círculo está dividido en 8 partes iguales con dos de esas partes sombreadas; el quinto círculo está dividido en cinco partes iguales con cuatro de sus partes sombreadas; y el sexto círculo está dividido en 10 partes iguales con 8 de esas partes sombreadas.
Objetivos

- Convertir una fracción dada en registro de representación pictórico a un registro de representación aritmético.
- Identificar fracciones equivalentes dadas en un registro de representación pictórico.
- Identificar fracciones equivalentes escritas en registro aritmético.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 11 *Secuencia didáctica de aprendizaje 2*

Secuencia didáctica de aprendizaje 2
Descripción En esta actividad se presentan dos representaciones pictóricas de fracciones. La primera consiste en 16 círculos ubicados de tal manera que forman un cuadrado donde cada fila y columna tiene 4 círculos. Del conjunto total de los 16 círculos, 4 están coloreados representando así la fracción $\frac{4}{16}$. Entre las consignas a realizar por los estudiantes deben reagrupar los círculos para representar la fracción $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$. La segunda parte de la consigna consiste en un rectángulo dividido en 6 partes iguales con tres de esas partes sombreadas, que representan la fracción $\frac{3}{6}$ o $\frac{1}{2}$. Se solicita a los estudiantes realizar divisiones en el rectángulo para representar la fracción $\frac{6}{12}$ y $\frac{9}{18}$. Objetivos • Realizar tratamientos con representaciones pictóricas en la resolución de problemas que involucran fracciones. • Identificar fracciones equivalentes dadas en una representación pictórica. • Encontrar fracciones equivalentes en un lenguaje aritmético y pictórico. • Convertir fracciones equivalentes de una representación aritmética a una representación pictórica.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12 *Secuencia didáctica de aprendizaje 3*

Secuencia didáctica de aprendizaje 3
Descripción En esta actividad se presentan 3 rectas numéricas. La primera recta numérica está dividida en 3 partes iguales, la segunda recta en 6 partes iguales y la tercera recta en 8 partes iguales. Para estas rectas se le solicita al estudiante graficar las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{8}$ respectivamente. Por último una cuarta recta numérica que no está dividida, en la cual se le pide al estudiante que grafique la fracción $\frac{3}{5}$.

Para lo anteriormente señalado en cada uno de los aspectos de la actividad se les brindó a los estudiantes barras de fracciones como material manipulable para que modelen cada situación.

Objetivos

- Representar fracciones en la recta numérica.
- Reconocer fracciones, dada su representación en la recta numérica.
- Representar fracciones usando material manipulable.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13 *Secuencia didáctica de aprendizaje 4*

Secuencia didáctica de aprendizaje 4
Descripción En esta actividad se presenta dos representaciones pictóricas. La primera consiste en un conjunto de 12 círculos ordenados en un rectángulo con dos filas y seis columnas, seis círculos rojos, tres azules, dos verdes, y uno anaranjado. Las consignas a realizar son encontrar las fracciones representadas por cada conjunto de círculos de cada color, y encontrar la suma de todas las fracciones encontradas en la representación pictórica. La segunda parte consiste en una representación pictórica de un número mixto. Se solicita a los estudiantes escribir la fracción representada como un número mixto, como una fracción impropia y como suma de fracciones. Como apoyo para la resolución de la situación problemática los estudiantes emplearon barras de fracciones, como material manipulativo. Objetivos • Convertir fracciones propias e impropias dadas en una representación pictórica a una representación aritmética. • Representar fracciones con material manipulable dadas en un registro de representación pictórico y aritmético.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 14 *Secuencia didáctica de aprendizaje 5*

Secuencia didáctica de aprendizaje 5
Descripción En esta actividad se presenta una serie de sumas de fracciones en un registro pictórico. Estas fracciones tienen diferente denominador, múltiplos entre sí. Para el desarrollo de cada aspecto de esta actividad se les proporciona a los estudiantes barras de fracciones para modelar la situación usando material manipulable. De esa manera podrán encontrar fracciones equivalentes que luego escriben en lenguaje aritmético. Objetivos • Realizar suma de fracciones con diferente denominador. • Representar sumas de fracciones utilizando material manipulable. • Convertir una suma de fracciones dada en una representación pictórica a una representación aritmética.
Fuente: Elaboración propia

Tabla 15 *Secuencia didáctica de aprendizaje 6*

Secuencia didáctica de aprendizaje 6
Descripción En esta actividad se presentan tres situaciones problemáticas relacionadas con suma y resta de fracciones. La primera situación consiste en encontrar la cantidad de leche que se gastó en un café un día sábado; sabiendo que durante ese día se empleó media caja de cartón de leche entera y un tercio de una caja de leche descremada. En la segunda situación se requiere saber cuánta cantidad de canela hay más que nueces, necesitó Andrea para realizar un <i>pie</i>; conociendo que empleó un tercio de una cucharada de canela y un cuarto de cucharada de nueces. Y la tercera situación consiste en encontrar cuánta más cantidad de harina que de azúcar necesitó Katy para realizar galletas, conociendo que ella empleó $2\frac{2}{3}$ de taza de harina y $1\frac{1}{2}$ taza de azúcar. Para resolver y representar cada una de estas situaciones propuestas se les proporcionó a los estudiantes barras de fracciones. Objetivos • Resolver situaciones problemáticas que involucran fracciones. • Convertir una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones dada en lenguaje verbal en un lenguaje aritmético.

-
- Emplear material manipulable para representar una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones.
 - Realizar tratamientos en lenguaje aritmético y pictórico para resolver problemas que involucran suma y resta de fracciones.
-

Fuente: Elaboración propia

Tabla 16 *Secuencia didáctica de aprendizaje 7*

Secuencia didáctica de aprendizaje 7
Descripción En esta actividad se presenta una situación problemática que consiste en una receta para hacer un pastel que necesita 6 huevos. María es quien realiza el pastel. Para ello, tiene un cartón con 12 huevos. Se solicita al estudiante encontrar la fracción que representa la cantidad de huevos empleados en la receta, en una representación pictórica como aritmética. En la misma actividad parte 2 se proporciona ciertas variaciones a la situación problemática planteada inicialmente, como, por ejemplo, una nueva receta que requiere 8 huevos en vez de 6, y para otra receta que requiera un cuarto de la docena para poder realizar el pastel. Para lo anteriormente señalado en los diferentes aspectos de la actividad se les proporciona a los estudiantes contadores de colores para que representen la situación problemática con cada una de sus respectivas variaciones. Objetivos • Convertir una situación problemática que involucra fracciones dada en lenguaje verbal a una representación pictórica. • Realizar tratamientos dentro de una representación pictórica. • Emplear manipulativos para la resolución de problemas.

Fuente: Elaboración propia

3.7 Análisis de datos

El análisis de los datos de esta investigación se fundamentó en técnicas cualitativas. En primera instancia, se revisó el material recolectado por medio de las hojas de trabajo de los estudiantes, de los registros de campo y de las grabaciones, se organizaron y se clasificaron de acuerdo al propósito de la investigación.

Luego se procedió a la codificación de los datos recolectados asignándoles categorías de análisis con el propósito de tener una descripción más completa de los datos, se resumieron y se eliminó información irrelevante para el estudio. La información recabada en la prueba diagnóstica y secuencias de aprendizajes se presentó mediante algunas tablas y figuras. Para el análisis de las secuencias didácticas se dividió a los estudiantes en 5 grupos A, B, C, D y E respectivamente tal y como se realizó en la recolección de datos.

Posteriormente se comenzó con la interpretación de los significados de la categoría de análisis asignada en el proceso anterior (codificación de datos en un segundo nivel). Se identificaron similitudes y diferencias entre las categorías, y relación entre éstas. Así pues, la técnica de análisis de datos fue mediante interpretaciones semánticas provistas por las rúbricas de evaluación construida para cada ítem y que fueron avaladas tanto en lo metodológico, disciplinar y de investigación.

En este capítulo se abordó el marco metodológico de la tesis, comenzando con el enfoque y tipo de investigación en que se fundamentó el estudio, así como también su diseño correspondiente. Seguidamente se explicó las fuentes de información y la estrategia de recolección de los datos para el estudio. Finalmente se explicó la forma en cómo se realizó el análisis de los resultados obtenidos en la investigación.

Capítulo 4 : Resultados del Estudio

- 4.1 Resultados y análisis de la etapa diagnóstica
 - 4.1.1 Análisis cualitativo de la prueba diagnóstica
- 4.2 Resultados y análisis de las secuencias didácticas de aprendizaje
 - 4.2.1 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 1 por grupo
 - 4.2.2 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 2 por grupo
 - 4.2.3 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 3 por grupo
 - 4.2.4 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 4 por grupo
 - 4.2.5 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 5 por grupo
 - 4.2.6 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 6 por grupo
 - 4.2.7 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 7 por grupo

Este capítulo contiene los resultados del estudio. En primer lugar, se presentan los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica aplicada; seguidamente, se aborda el análisis de cada una de las siete actividades desarrolladas en la etapa de ejecución. Se presenta el análisis de cada grupo de trabajo, así como un resumen al final de cada actividad.

4.1 Resultados y análisis de la etapa diagnóstica

A continuación, se presenta el análisis de la prueba diagnóstica, en primera instancia la rúbrica elaborada para evaluar cada ítem de la prueba que se aplicó a los estudiantes de quinto grado en una primera fase de la investigación, seguidamente los resultados de la misma. Para una mejor descripción de los resultados obtenidos se proponen cuatro categorías: adecuado si la respuesta que proporciona el estudiante atiende a lo solicitado en la consigna; inadecuado, si la respuesta no atiende a lo solicitado; parcialmente adecuado, si el procedimiento realizado por el estudiante muestra ciertos elementos correctos a lo solicitado; y la categoría de no respondió, si el estudiante no presentó ningún desarrollo o evidencia a la consigna propuesta.

Tabla 17 Rúbrica de evaluación de los ítems de la prueba diagnóstica.

Ítem	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Ítem 1	Identifica correctamente la fracción que corresponde.	El estudiante identifica cualquiera de las otras opciones propuestas en la consigna.	No aplica	El estudiante no selecciona ninguna de las cuatro opciones provistas.
Ítem 2	El estudiante representa la fracción solicitada realizando una	El estudiante no presenta la fracción solicitada.	No aplica	El estudiante no colorea ningún cuadrado en la

	conversión de un registro de representación verbal a un registro de representación pictórico. (Colorea 3 de los 9 cuadrados proporcionados en el diagrama)	(Colorea menos o más de tres cuadrados en la figura)		figura proporcionada.
Ítem 3	Escriben la fracción en un registro de representación tanto aritmético como verbal de manera correcta correspondiente a cada una de las cuatro representaciones pictóricas dadas.	La fracción identificada en cada una de las representaciones pictóricas dadas no es la fracción pertinente en lenguaje verbal o lenguaje aritmético.	Escriben la fracción en lenguaje aritmético o verbal correspondiente a por lo menos dos de las cuatro representaciones pictóricas dadas.	No identifican ninguna de las cuatro fracciones dada en lenguaje pictórico en lenguaje aritmético o lenguaje verbal.
Ítem 4	Identifican la fracción mayor de cuatro fracciones dadas en lenguaje verbal.	No identifican la fracción mayor del conjunto de las cuatro fracciones dadas en lenguaje verbal.	No aplica	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 5	Identifican la fracción mayor de cuatro fracciones expresadas	No identifican la fracción mayor del conjunto de las cuatro	No aplica	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.

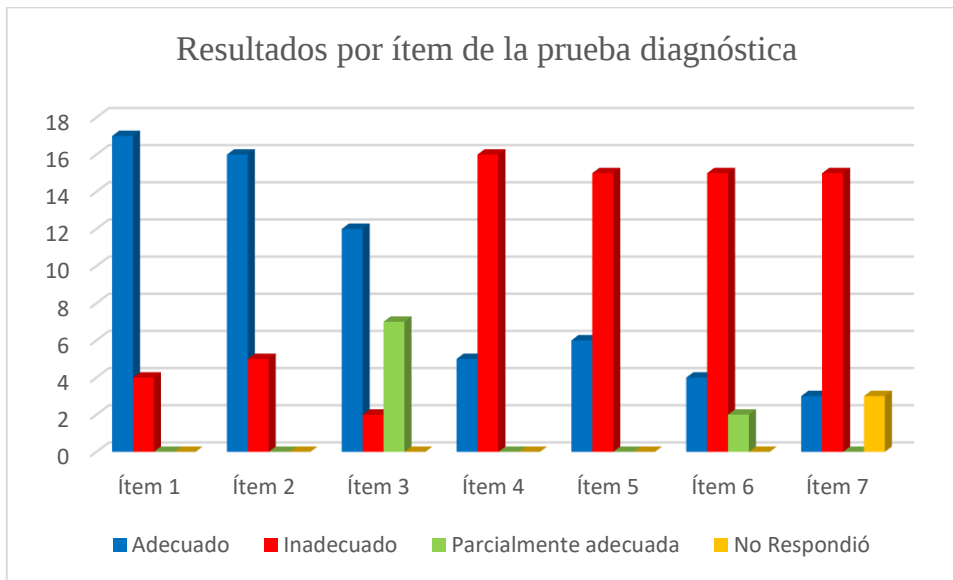
	mediante un registro de representación aritmético.	fracciones dadas en lenguaje aritmético.		
Ítem 6	Comparan y seleccionan la fracción menor de dos fracciones expresadas en un registro de representación aritmético.	Ninguna respuesta contiene los requerimientos solicitados en el problema.	Por lo menos dos de los problemas presentados están correctos.	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 7	Las cinco fracciones expresadas en un registro de representación aritmético son ordenadas correctamente de menor a mayor.	Las cinco fracciones expresadas en un registro de representación aritmético no son ordenadas correctamente de menor a mayor.	Por lo menos 3 fracciones de las cinco fracciones expresadas en un registro de representación aritmético son ordenadas correctamente de menor a mayor.	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 8	La respuesta es afirmativa en cuanto a la fracción representada sobre la recta numérica corresponde a la fracción dos tercios.	La respuesta es negativa en cuanto a la fracción representada sobre la recta numérica corresponde a la fracción dos tercios.	No aplica	No selecciona ninguna de las dos opciones provistas.

Ítem 9	Realizan tratamientos dentro del registro de representación aritmético para encontrar el numerador y el denominador requerido en una de las dos fracciones dadas de modo que las dos fracciones sean equivalentes.	El numerador y denominador encontrados en las fracciones no son los apropiados para que las fracciones sean equivalentes.	Realizan tratamientos dentro del registro de representación aritmético y responden apropiadamente a uno de los dos ejercicios propuestos.	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 10	La respuesta a la situación problemática planteada es correcta. (Sara gastó más dinero que Jacob)	La respuesta a la situación problemática planteada es incorrecta.	No aplica	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 11	La respuesta a la situación problemática planteada es correcta. (Se han gastado cinco octavos de harina en la repostería)	La respuesta a la situación problemática planteada es incorrecta.	Hay evidencia de tratamientos en la resolución del problema, aunque no se pudo encontrar la respuesta correcta.	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.
Ítem 12	Emplean registros de representación aritméticos o pictóricos, y realizan	La respuesta a la situación problemática planteada es incorrecta.	Emplean registros de representación aritméticos o pictóricos, y realizan	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.

	tratamientos dentro de estos registros para resolver la situación problemática planteada correctamente.		tratamientos dentro de estos registros para resolver la situación problemática planteada aunque no hayan llegado a la solución.	
Ítem 13	Todas las respuestas del conjunto de 4 ejercicios propuestos de encontrar la mitad, un tercio, y un cuarto de ese número son correctas.	Todas las respuestas del conjunto de 4 ejercicios propuestos de encontrar la mitad, un tercio, y un cuarto de ese número son incorrectas.	Por lo menos seis respuestas del conjunto de 4 ejercicios propuestos son correctas.	No hay evidencia de la resolución del ejercicio.

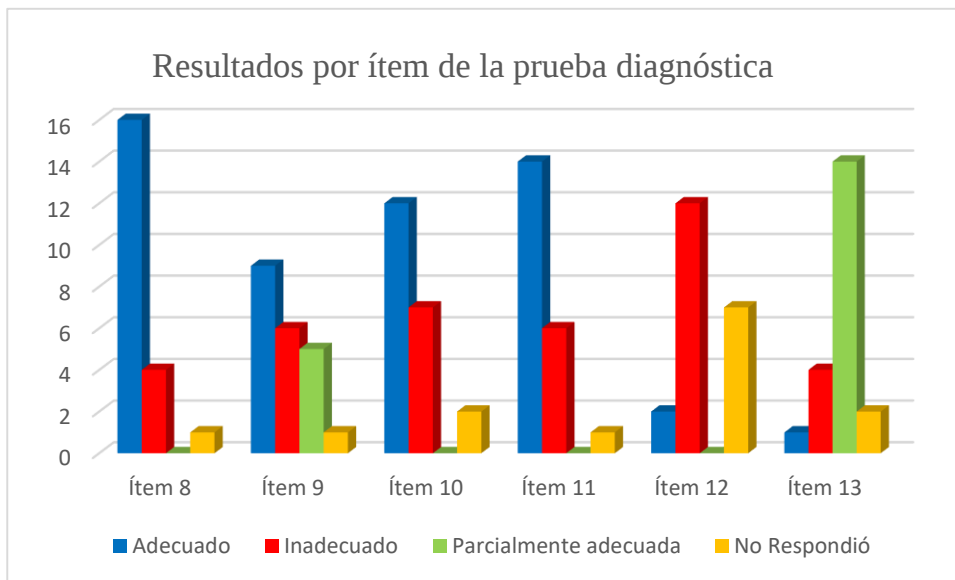
Fuente: Elaboración propia

Gráfica 2 *Resultados de la prueba diagnóstica*



Fuente: Elaboración propia

Gráfica 3 *Resultados de la prueba diagnóstica*

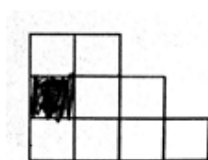


4.1.1 Análisis de la prueba diagnóstica

A continuación, se presenta un análisis de algunos ítems de la prueba diagnóstica aplicada.

El ítem 2 cuyo objetivo fue convertir una fracción dada en registro de representación verbal a un registro de representación pictórico. Entre los hallazgos encontrados de acuerdo a la rúbrica de evaluación de la prueba diagnóstica (tabla 17 el 76.2% de los estudiantes respondieron adecuadamente, y el 23.8% de los estudiantes respondió de manera inadecuada mostrando un error reincidente, representar la fracción un noveno, en vez de la fracción, un tercio. Ver la siguiente figura.

Figura 12 Representación pictórica errónea de la fracción $1/3$



Fuente: Elaboración propia

En el ítem 3 se propuso convertir una fracción dada en lenguaje pictórico, en lenguaje aritmético y verbal. Con respecto a esta consigna, el 57.1% de los estudiantes respondió adecuadamente; esto es, realizaron la conversión de la fracción proporcionada en registro de representación pictórica a un registro de representación aritmético y verbal. El 9.5% respondió de manera inadecuada, mostrando errores tales como; al escribir la fracción en el registro de representación aritmético confundieron el significado del numerador con el denominador. Por otro lado, el 33.4% de los estudiantes respondió parcialmente adecuado, es decir, fueron capaces de convertir por lo menos dos de las cuatro fracciones. Se evidenciaron errores como, el denominador correspondiente a las fracciones en la representación aritmética no era el apropiado; al escribir la fracción en representación verbal, el deletreo no fue correcto.

El ítem 4 tuvo como objetivo la comparación de cuatro fracciones presentadas en un registro de representación verbal. La consigna propuso identificar la fracción mayor en ese conjunto de fracciones. Los resultados del análisis reflejaron que el 23.8% de los estudiantes respondió

adecuadamente identificando la fracción un tercio como la fracción mayor del conjunto de fracciones proporcionado. Así un estudiante explica que un tercio es la fracción mayor porque esta fracción está dividida en menos partes que las otras; otro estudiante argumenta que un tercio es la fracción mayor porque el denominador es menor que los otros denominadores. En contraste el 76.2% de los estudiantes respondió inadecuadamente; todos, excepto uno, respondió que la fracción mayor es un sexto debido a que es la fracción con el denominador mayor.

En el ítem 7 cuyo objetivo fue ordenar ascendentemente un conjunto de cinco fracciones con diferente denominador expresado en un registro de representación aritmético. El 14.3% de los estudiantes respondió adecuadamente a la consigna. Uno de los estudiantes argumentó que para poder ordenar las fracciones se comparan los denominadores, y la fracción con menor denominador será la mayor. En contraste, un 71.4% respondió de forma inadecuada ordenando las fracciones de forma descendente, manifestando que debido a que todas las fracciones tienen el mismo numerador. Para los estudiantes, la fracción menor es la fracción con el menor denominador de todas, y la mayor es la fracción con el mayor denominador. Cabe señalar que el 14.3% de los estudiantes no respondió a la consigna solicitada.

El ítem 9 tuvo como propósito encontrar el numerador o el denominador de una de dos fracciones dadas de modo que sean fracciones equivalentes, utilizando para ello un tratamiento dentro del registro de representación aritmético. El 43.0% de los estudiantes respondió adecuadamente a la consigna empleando tratamientos, así para encontrar el denominador en el primer par de fracciones equivalentes, un estudiante empleó la multiplicación. En el segundo par de fracciones para encontrar el denominador que hace las dos fracciones equivalentes, empleó tratamientos de división. Un 29.0% de los estudiantes respondió de manera inadecuada, un 24.0% respondió parcialmente y un 4.0% no respondió a la consigna.

El ítem 12 cuyo propósito fue resolver una situación problemática que involucra fracciones en un registro de representación verbal realizando, 10.0% de los estudiantes respondió adecuadamente, un tratamiento observado fue tomar la fracción seis octavos y simplificarla a la fracción tres cuartos, concluyendo así que se necesitan seis corredores en la carrera, como se observa en la figura ocho. El 57.0% de los estudiantes respondió de manera inadecuada y el 33.0% no respondió a la consigna.

Figura 13 Resolución de una situación problemática con fracciones en registro verbal

Una carrera de relevos se realiza en estaciones de $\frac{1}{8}$ km cada una. Cada corredor completa una estación. ¿Cuántos corredores se requieren para recorrer una distancia de $\frac{3}{4}$ km?

$$\frac{0}{8} \div 2 = \frac{0}{4} \quad \frac{6}{8} \div 2 = \frac{3}{4} \quad 6 \text{ runners}$$

Fuente: Elaboración propia

4.2 Resultados y análisis de las secuencias didácticas de aprendizaje

En el apartado 3.6. Estrategias de recolección de datos, se presentaron las tablas 10 a la 16 en las cuales muestran la descripción y los objetivos de cada secuencia didáctica de aprendizaje referente a cada una de éstas.

A continuación, se presenta el análisis de resultados de las siete secuencias didácticas por grupo de trabajo.

4.2.1 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 1 por grupo

Grupo A

Los cinco estudiantes que integraron el grupo A, concluyeron que los 6 círculos presentados eran congruentes, pero que todos los círculos están divididos de diferente manera. También los estudiantes fueron capaces de convertir las fracciones dadas en un registro de representación

pictórico a un registro aritmético, además, identificaron que había tres pares de fracciones equivalentes expresadas tanto en un registro de representación aritmético como pictórico. Agruparon las fracciones equivalentes en registro de representación aritmético encontradas, con su respectiva representación pictórica.

Grupo B

Los cuatro integrantes del grupo B concluyeron que los círculos presentados, estaban divididos en diferente manera, pero que tenían la misma forma y tamaño. Ellos argumentaron que no era posible agrupar los círculos que representan las fracciones en registro pictórico de acuerdo al área sombreada, pues cada círculo representa una fracción diferente. Así que este grupo fue capaz de convertir las fracciones dadas en registro de representación pictórico, a registro de representación aritmético. Además, lograron identificar un par de tres fracciones equivalentes en la consigna propuesta. Sin embargo, al identificar las fracciones equivalentes, tanto en el registro de representación pictórico, como aritmético resultó una tarea difícil para este grupo.

Grupo C

Este grupo pudo identificar que las áreas sombreadas de los círculos representan diferentes fracciones en registro de representación pictórica. Ellos fueron capaces de realizar tratamientos en el sistema de representación pictórico, evidenciado al agrupar los pares de círculos correspondientes a cada par de fracciones equivalentes. Realizaron la conversión de las fracciones del registro de representación pictórico al aritmético. También se aprecia en sus desarrollos, el uso de tratamientos dentro del registro de representación aritmético para encontrar y agrupar las fracciones equivalentes. Este grupo, a diferencia de los demás, alcanzó los objetivos propuestos en la actividad.

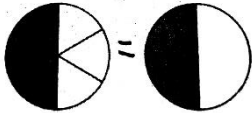
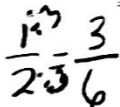
Grupo D

Este grupo en su desarrollo a la consigna propuesta, fue capaz de realizar la conversión del registro de representación pictórico al registro de representación aritmético de las fracciones presentadas. También ellos agruparon los círculos que representan con su área sombreada fracciones equivalentes, así el área sombreada del círculo uno y dos representan fracciones equivalentes porque la mitad del círculo está sombreada. Los círculos tres y cuatro representan las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{8}$ respectivamente, así que los estudiantes las identificaron como fracciones equivalentes en vista que ambas representan un cuarto del área del círculo sombreada. Sin embargo, con respecto a las fracciones representadas por el área sombreada de los círculos cinco y seis, ellos identificaron las fracciones que corresponden al área no sombreada como fracciones equivalentes, que no era lo solicitado en la consigna.

Grupo E

Este grupo identificó que el área sombreada de los círculos representa partes de un todo, y que cada círculo está dividido de diferente manera. También ellos fueron capaces de agrupar los círculos de acuerdo a la misma área sombreada representada, aunque todos estaban divididos de forma diferente. Por otro lado, ellos también realizaron las conversiones del registro de representación pictórico al aritmético de las fracciones presentadas. Sin embargo, se observó la dificultad de encontrar las fracciones equivalentes en registro de representación aritmético obtenidas de la conversión realizada previamente.

Tabla 18 Resumen del desarrollo de la actividad uno

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
En la resolución del problema de esta actividad las representaciones empleadas por los estudiantes fueron pictóricas y aritméticas.	Todos los estudiantes de los cinco grupos realizaron la conversión de registro pictórico al aritmético.	Tratamiento en registro pictórico  Tratamiento en registro aritmético 	Nivel de comprensión 3 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a lo reportado por las producciones de los estudiantes de los cinco grupos de trabajo, se puede sintetizar lo siguiente:

Fueron capaces de convertir a un registro aritmético las fracciones representadas en un registro pictórico, tres de los cinco grupos identificaron que había tres pares de fracciones equivalentes después de haberlas convertido al registro aritmético.

El grupo tres empleó tratamientos en registro aritmético para poder identificar las fracciones equivalentes, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 14 Tratamientos con fracciones equivalentes en registro aritmético

$$\frac{1^{\cancel{2}}}{2^{\cancel{3}}} \frac{3}{6}, \frac{1^{\cancel{2}}}{4^{\cancel{2}}} \frac{2}{8}, \frac{4^{\cancel{2}}}{5^{\cancel{2}}} \frac{8}{10}$$

Fuente: Elaboración propia

Por lo expuesto anteriormente y de acuerdo a los cinco niveles de comprensión de Hitt (1988) tabla1, los cinco grupos, alcanzaron un nivel de comprensión tres, es decir, conversión, con la preservación de significado, de un registro de representación a otro.

4.2.2 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje dos por grupo

Grupo A

El trabajo realizado por este grupo muestra evidencia que ellos trataron de realizar tratamientos en el registro de representación pictórico, de la fracción $\frac{4}{16}$ presentada en ambos registros de representación pictórico y aritmético, ellos fueron capaces de realizar tratamientos para tratar de representar las fracciones $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$ equivalentes a la fracción $\frac{4}{16}$ (ver figura 15, pág. 99). Para obtener la fracción $\frac{2}{8}$ agruparon los 16 círculos en dos grupos de ocho con dos de ellos de otro color. Para representar la fracción $\frac{1}{4}$ agruparon los 16 círculos en cuatro conjuntos con cuatro círculos con uno, uno de los conjuntos era de color diferente a los restantes (Ver figura 16, pág. 99). Sin embargo, los tratamientos realizados por los estudiantes no preservan el significado de equivalencia entre las tres fracciones mencionadas, para el caso, en la representación de la fracción $\frac{1}{4}$ los estudiantes dividieron los 16 contadores en cuatro conjuntos y seleccionaron un contador de otro color en cada uno de los cuatro conjuntos individualmente para representar dicha fracción, no obstante, la fracción representada es $\frac{1}{4}$ para cada conjunto individualmente, pero no representa $\frac{1}{4}$ del conjunto

de los 16 contadores. Los estudiantes emplearon manipulativos (contadores de dos colores) para representar la situación problemática, tal como se muestra en las siguientes figuras.

Figura 15 Tratamientos para tratar de representar las fracciones $2/8$ y $1/4$ equivalentes a $4/16$



Fuente: Elaboración propia

Figura 16 Estudiantes empleando manipulativos para tratar de representar fracciones equivalentes



Fuente: Elaboración propia

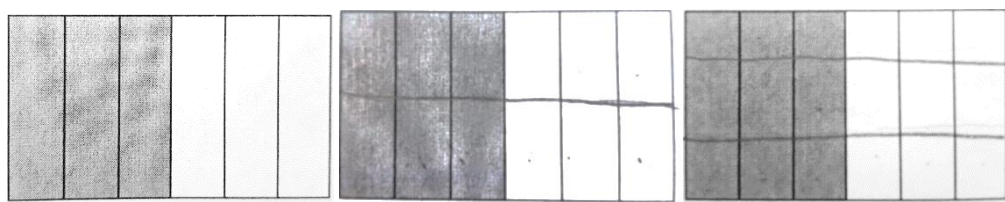
Grupo B

Las evidencias del trabajo realizado por este grupo muestra que ellos fueron capaces de realizar tratamientos en el registro de representación pictórico para tratar de representar las fracciones $\frac{2}{8}$ y

$\frac{1}{4}$ equivalentes a $\frac{4}{16}$, presentaron los mismos inconvenientes que el grupo A al tratar de representar

la equivalencia de las tres fracciones. Con respecto a la segunda consigna de representar la fracción $\frac{6}{12}$ y $\frac{9}{18}$ en un registro de representación pictórico dada la fracción $\frac{3}{6}$, ellos dividieron el primer y segundo rectángulo en 12 y 18 regiones más, respectivamente tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 17 Tratamientos para representar la equivalencia de las fracciones $\frac{3}{6}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{18}$



Fuente: Elaboración propia

Además, realizaron la conversión del registro de representación pictórico al aritmético de dichas fracciones. No obstante, este grupo no pudo encontrar las fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ que se solicitaba en la tercera consigna a realizar, en los errores encontrados se puede apreciar que, ellos solamente sumaron el número uno al numerador para tratar de encontrar las fracciones equivalentes a dicha fracción (ver figura 18).

Figura 18 Tratamientos para tratar de encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ en registro aritmético

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3}$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo C

De acuerdo al trabajo desarrollado por este grupo se puede apreciar que ellos realizaron los tratamientos respectivos para tratar de encontrar las fracciones $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$ equivalentes a la fracción $\frac{4}{16}$, procedieron de la misma manera que el grupo A y B. Este fue el único grupo en representar

mediante un registro pictórico otra fracción no equivalente a la fracción $\frac{4}{16}$ tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 19 Representación pictórica de la fracción 8/16



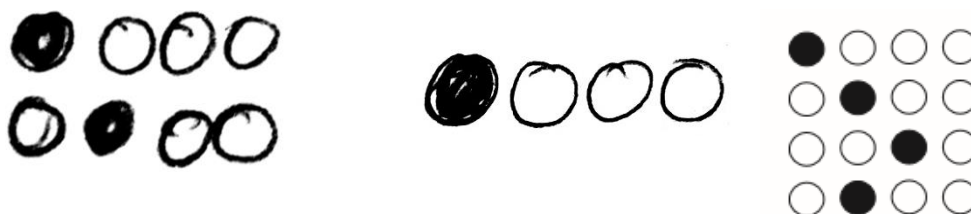
Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la segunda consigna a realizar, ellos realizaron la conversión de la fracción dada en un registro pictórico a un registro aritmético, también realizaron los respectivos tratamientos para encontrar las fracciones equivalentes $\frac{6}{12}$ y $\frac{9}{18}$ a la fracción $\frac{3}{6}$, dividiendo el rectángulo en 12 y 18 partes respectivamente de modo similar que el grupo B. Con respecto a la tercera consigna, encontrar 4 fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$, ellos no respondieron correctamente, entre los errores encontrados, se puede apreciar que sumaron dos a cada denominador y uno a cada numerador.

Grupo D

Este grupo, al igual que los grupos anteriores, realizó tratamientos en el registro pictórico para tratar de representar las fracciones $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$. Las representaciones pictóricas de estas fracciones no preservan el significado de la representación pictórica $\frac{4}{16}$ dada en el problema original. Aunque estas fracciones son equivalentes en su representación aritmética, no lo son en su representación pictórica.

Figura 20 Representación pictórica de la fracción $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{4}{16}$



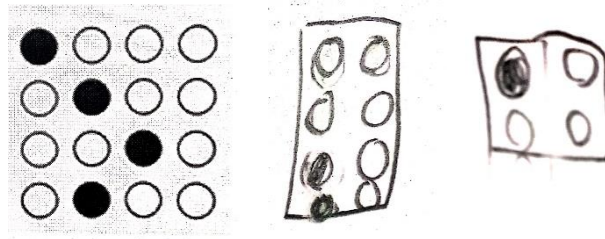
Fuente: Elaboración propia

De igual modo en la segunda consigna, ellos realizaron los respectivos tratamientos, tanto, en un registro de representación aritmético como pictórico para encontrar las fracciones equivalentes a la fracción dada, representada en un registro pictórico. Se puede apreciar en su desarrollo las conversiones entre los registros de representación pictórico y aritmético. Con respecto a la tercera consigna ellos no fueron capaces de encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ como se solicitaba, pero si encontraron fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Grupo E

De conformidad al trabajo realizado por este grupo, se puede observar que en la primera consigna ellos realizaron tratamientos en el registro de representación pictórico para tratar de encontrar las fracciones equivalentes a la fracción $\frac{4}{16}$ (ver figura 21, pág. 103). Presentaron el mismo inconveniente que los grupos anteriores al tratar de resolver esta consigna. En la segunda consigna, ellos pudieron encontrar las fracciones equivalentes solicitadas a la fracción $\frac{3}{6}$ presentada en registro pictórico, realizando tratamientos (realizaron divisiones para obtener más regiones) dentro de este mismo registro. No obstante, las conversiones del registro de representación pictórico al aritmético de las fracciones no son adecuadas. Finalmente, ellos fueron capaces de encontrar fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{3}$ en registro de representación aritmético correctamente (ver figura 22, pág. 103).

Figura 21 Tratamientos para tratar de representar las fracciones $2/8$ y $1/4$ equivalentes a $4/16$



Fuente: Elaboración propia

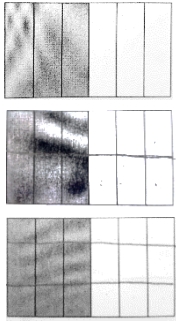
Figura 22 Fracciones equivalentes a $1/3$ en registro aritmético

$$\frac{2}{6} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{4}{12}$$

Fuente: Elaboración propia

Para el desarrollo de esta actividad todos los grupos emplearon contadores de dos colores como material manipulable tal como se muestra en la figura 16 pág. 99. Los cinco grupos resolvieron inadecuadamente la primera consigna de esta actividad empleando manipulativos y al realizar tratamientos en un registro pictórico, sin embargo, los tratamientos empleados por los estudiantes en un registro aritmético fueron adecuados (ver figura 22). La segunda consigna fue resuelta adecuadamente por cuatro de los cinco grupos empleando tratamientos tanto en un registro pictórico como aritmético, cumpliendo así las tres actividades inherentes a las semiosis planteada por Duval. Por otro lado, en el desarrollo de esta actividad los estudiantes de cuatro grupos lograron una articulación coherente entre dos sistemas de representación en la segunda consigna correspondiente a un nivel cuatro conforme a los cinco niveles de comprensión de Hitt (1988) tabla 1.

Tabla 19 Resumen del desarrollo de la actividad dos

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
Empleo de manipulativos para tratar de representar las fracciones equivalentes $\frac{4}{16}, \frac{2}{8}, y \frac{1}{4}$ respectivamente. 	En esta actividad los estudiantes de los cinco grupos fueron capaces de realizar la conversión de un registro pictórico al aritmético y viceversa.	Tratamientos realizados por los estudiantes en un registro pictórico para representar las fracciones $\frac{3}{6}, \frac{6}{12}, y \frac{9}{18}$. 	Nivel de comprensión 4 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

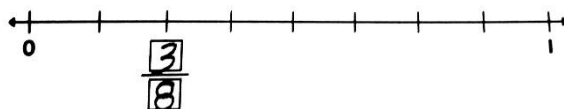
4.2.3 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 3 por grupo

Grupo A

De acuerdo al trabajo desarrollado por este grupo, ellos fueron capaces de identificar la fracción $\frac{1}{3}$ en la recta numérica provista, argumentando que debido a que la recta numérica estaba dividida en tres regiones iguales. La consigna solicitó que colocaran la fracción correspondiente a la primera división de la recta, a lo cual respondieron la fracción $\frac{1}{3}$. Sin embargo, la parte dos y tres análoga con los objetivos de la primera parte, ellos no las respondieron adecuadamente, tal como

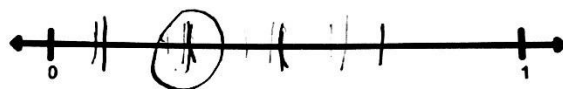
se muestra en la figura 23. En la parte cuatro se solicitó ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{3}{5}$ cuya consigna no fue resuelta adecuadamente tal como se muestra en la figura 24.

Figura 23 Ubicación incorrecta de la fracción $\frac{2}{8}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

Figura 24 Representación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica

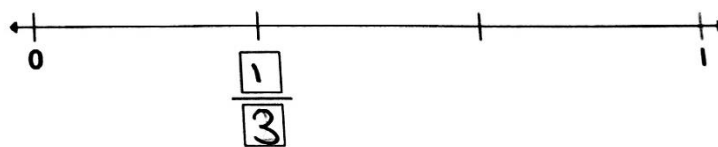


Fuente: Elaboración propia

Grupo B

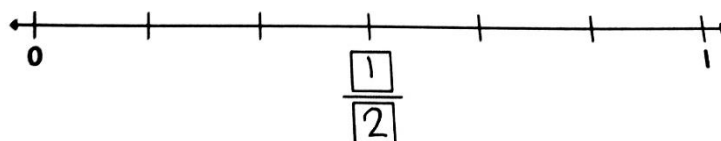
Las evidencias del trabajo realizado por este grupo, muestra que, ellos fueron capaces de ubicar la fracción en el punto de la recta numérica correspondiente en las primeras dos rectas numéricas, tal como se muestra en las figuras.

Figura 25 Representación de la fracción $\frac{1}{3}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

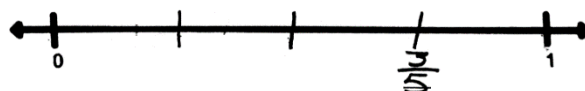
Figura 26 Representación de la fracción $\frac{3}{6}$ y su equivalente $\frac{1}{2}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

Así pues, en la primera recta ellos identificaron la fracción $\frac{1}{3}$, y en la segunda recta, identificaron la fracción $\frac{1}{2}$ afirmando además, que esta fracción es equivalente a la fracción $\frac{3}{6}$ argumentando que la marca correspondiente a esa fracción estaba justo en la mitad de la recta numérica dada. A diferencia de los apartados anteriores, en el apartado cuatro se solicitó que representaran la fracción $\frac{3}{5}$ en una recta que requería la división de los segmentos apropiados. En esta consigna se evidenció dificultad al graficar la fracción $\frac{3}{5}$ sobre la recta, tal como dividir la recta numérica en cuatro regiones solamente en vez de las cinco regiones requeridas para resolver el problema apropiadamente así como se muestra en la figura a continuación.

Figura 27 Representación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica

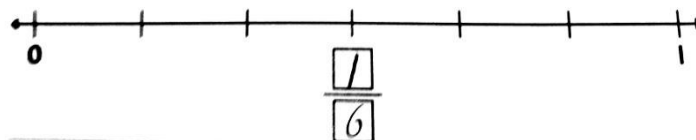


Fuente: Elaboración propia

Grupo C

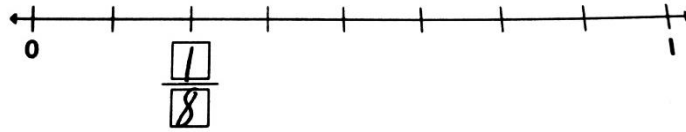
De acuerdo al desarrollo presentado por este grupo, se puede evidenciar que ellos fueron capaces de resolver la primera consigna propuesta correctamente identificando la fracción $\frac{1}{3}$ en la marca correspondiente en la recta numérica. Sin embargo, este grupo no respondió correctamente las otras consignas.

Figura 28 Representación incorrecta de la fracción $\frac{1}{6}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

Figura 29 Representación incorrecta de la fracción $\frac{1}{8}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

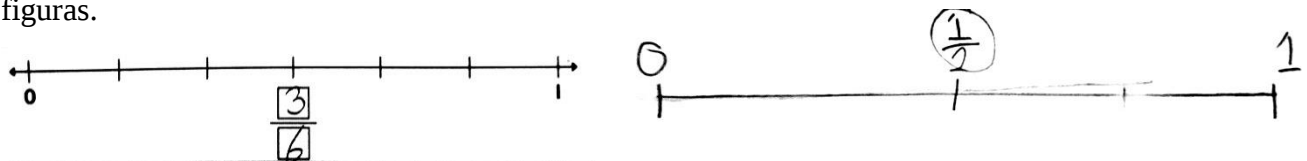
En las figuras anteriores se aprecia la dificultad que tuvieron los estudiantes al representar fracciones en la recta numérica. Identificaron de manera correcta el denominador correspondiente a cada fracción, no así el numerador.

Grupo D

El trabajo presentado por este grupo muestra que fueron capaces de resolver correctamente las primeras tres consignas presentadas. De manera que, ellos ubicaron la fracción $\frac{1}{3}$ sobre la recta numérica dividida en tres partes iguales, la fracción $\frac{3}{6}$ en la recta numérica dividida en seis partes iguales, y la fracción $\frac{2}{8}$ en la recta numérica dividida en ocho partes iguales. Realizaron también, una representación gráfica de la fracción equivalente $\frac{1}{4}$, tal como se muestra en las siguientes

Figura 30 Representación de la fracción $\frac{3}{6}$ y la fracción equivalente $\frac{1}{2}$ en la recta numérica

figuras.



Fuente: Elaboración propia

Figura 31 Representación de la fracción $\frac{2}{8}$ y la fracción equivalente $\frac{1}{4}$ en la recta numérica



Fuente: Elaboración propia

No obstante, ellos no fueron capaces de graficar correctamente, sobre la recta numérica la fracción $\frac{3}{5}$, ellos dividieron la recta numérica en cuatro regiones iguales, en vez de cinco regiones. En los apartados anteriores ellos presentaron sus argumentos en un registro verbal.

Grupo E

De acuerdo a la evidencia del trabajo realizado por este grupo, ellos solamente fueron capaces de resolver correctamente la primera consigna. En la segunda y tercera consigna, identificaron correctamente la fracción $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{8}$ respectivamente. No obstante, ellos no fueron capaces de graficar la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica, presentando argumentos inadecuados en el registro pictórico tal como se ilustra en la figura 32. Sin embargo sus argumentos en el registro verbal son adecuados, así por ejemplo, ellos saben que la recta debe ser dividida en cinco regiones pues el denominador de la fracción es cinco.

Figura 32 Ubicación incorrecta de la fracción $\frac{3}{5}$ en la recta numérica

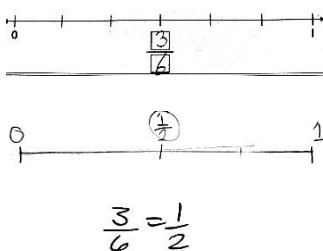


Fuente: Elaboración propia

Al observar el trabajo realizado por los cinco grupos de estudiantes, todos fueron capaces de resolver la primera consigna que consistió en ubicar en la recta numérica dada la fracción $\frac{1}{3}$. Con respecto a la segunda consigna la cual consistió en ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{3}{6}$ o su

equivalente $\frac{1}{2}$ solamente dos grupos la resolvieron adecuadamente. Los estudiantes tuvieron dificultad en identificar la cantidad de segmentos en que la recta numérica estaba dividida y cuyo número correspondía al denominador de la fracción solicitada. De modo similar sucedió con la tercera consigna que consistió en ubicar sobre la recta numérica la fracción $\frac{2}{8}$ la cual solamente un grupo pudo resolverla adecuadamente. La cuarta consigna que consistió en graficar la fracción $\frac{3}{5}$, los estudiantes tenían que realizar las particiones apropiadas para graficar dicha fracción, ningún grupo pudo resolver adecuadamente lo solicitado en este apartado. Por lo anterior y de acuerdo con los niveles de comprensión de Hitt (1988) los estudiantes alcanzaron un nivel dos, es decir, la identificación de las diferentes representaciones de un concepto.

Tabla 20 *Resumen del desarrollo de la actividad tres*

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes emplearon representaciones gráficas, aritméticas y verbales.	Las conversiones realizadas por los estudiantes de los cinco grupos en esta actividad fueron de registro gráfico a aritmético y viceversa.	Emplearon tratamientos en registro aritmético y gráfico como se muestra a continuación. 	Nivel de comprensión de Hitt 2 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

4.2.4 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 4 por grupo

Grupo A

De acuerdo al trabajo presentado por este grupo, fueron capaces de resolver la primera consigna, convirtiendo cada una de las fracciones de un registro de representación pictórico a un registro aritmético. En su trabajo no se evidencia el empleo de tratamientos para encontrar fracciones equivalentes. Por otro lado, en su desarrollo muestran que al sumar las cuatro fracciones dadas en una representación pictórica, la suma es $\frac{12}{12}$ o la unidad. No obstante, el grupo no pudo resolver la segunda consigna adecuadamente. Esta consistió en realizar la conversión de una fracción en registro pictórico al aritmético. La representación pictórica de la consigna se presentó mediante dos cuadrados congruentes, divididos a su vez en cuatro partes iguales. El primer cuadrado se presentó coloreado completamente, y el segundo coloreado solamente la cuarta parte. Los estudiantes argumentaron inadecuadamente que la fracción representada correspondía a la fracción $\frac{5}{2}$, porque a juicio de ellos, cinco partes en total estaban coloreadas y había dos cuadrados, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 33 Conversión incorrecta de registro de representación pictórica a aritmética de un número mixto

Escriba la fracción impropia representada en la siguiente figura. (Cada cuadrado representa una unidad)



$$\frac{5}{2}$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo B

El trabajo realizado por el grupo dos muestras que fueron capaces de resolver la primera consigna correctamente, ellos realizaron la conversión respectiva del registro de representación pictórico al aritmético identificando las fracciones solicitadas, mostradas en la siguiente figura.

Figura 34 Conversión de fracciones de un registro pictórico al aritmético

	Refiérase a la figura de la izquierda y responda las siguientes interrogantes. a. ¿Qué fracción nombra la parte roja? $\frac{6}{12}$ b. ¿Qué fracción nombra la parte azul? $\frac{3}{12}$ c. ¿Qué fracción nombra la parte verde? $\frac{2}{12}$ d. ¿Qué fracción nombra la parte anaranjada? $\frac{1}{12}$
--	--

Fuente: Elaboración propia

Luego, en una subdivisión del apartado unos realizaron de manera correcta la suma de las fracciones encontradas, verificando que está es igual a la unidad, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 35 Suma de fracciones en registro aritmético

Sume las fracciones encontradas en la parte a, b, c, y d. $\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$ whole	Sume las fracciones equivalentes que nombran la parte roja, azul, verde y anaranjada. 1 whole
---	---

Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la segunda consigna, la resolvieron parcialmente correcta, ya que realizaron la conversión del registro pictórico al aritmético de la fracción en cuestión, identificando el número mixto $1\frac{1}{4}$, sin embargo, no fueron capaces de convertir la fracción dada a una fracción impropia.

Grupo C

De acuerdo a la evidencia de este grupo, respondieron de manera correcta a la primera consigna, realizaron la conversión del registro pictórico al aritmético de las fracciones solicitadas, encontraron también la suma de dichas fracciones expresándola como $\frac{12}{12}$. La segunda consigna no fue resuelta adecuadamente, se solicitó realizar la conversión de una fracción mixta a un registro aritmético dada en un registro pictórico, la representación pictórica consistió en dos cuadrados congruentes divididos en cuatro partes iguales, cada uno representando una unidad, los estudiantes respondieron que la fracción correspondiente era $\frac{5}{8}$, pues a su juicio en total habían 8 cuadrados y 5 de ellos pintados.

Grupo D

Conforme al trabajo presentado por este grupo, se constata que fueron capaces de resolver correctamente la primera consigna, es decir, realizaron la conversión del registro pictórico al aritmético de las fracciones solicitadas. Además, en esta consigna realizaron tratamientos en el registro de representación aritmético para escribir las fracciones equivalentes a las fracciones encontradas. En lo que respecta a la segunda consigna, también resolvieron correctamente, ya que realizaron la conversión del registro de representación pictórico de la fracción al registro aritmético, escribiendo la fracción impropia $\frac{5}{4}$, el número mixto $1\frac{1}{4}$, y la suma de dos fracciones $\frac{4}{4}$ y $\frac{1}{4}$. Tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 36 Conversión de registro pictórico a un aritmético de una fracción mixta

Escriba la fracción representada en la siguiente figura. (Cada cuadrado representa una unidad)		
Escriba una fracción impropia.	Escriba un número mixto	Escriba su respuesta como suma de fracciones.
$\frac{5}{4}$	$1 \frac{1}{4}$	$\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a los argumentos presentados, los estudiantes del grupo cuatro expresaron que la conversión más difícil fue escribir la fracción como una fracción impropia. Dentro de la misma consigna realizaron otra representación pictórica de la situación después de haber empleado barras de fracciones como material manipulativo.

Figura 37 Representación en un registro pictórico de la fracción mixta $1 \frac{1}{4}$

De las tres formas solicitadas de escribir la fracción. ¿Cuál fue la más difícil para usted?
Write an improper fraction.
Use barras de fracciones para representar la fracción. Realice un dibujo.

Fuente: Elaboración propia

Grupo E

De acuerdo al trabajo presentado por este grupo fueron capaces de resolver la primera consigna adecuadamente realizando la conversión de la fracción dada en registro pictórico al aritmético.

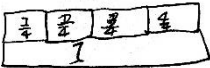
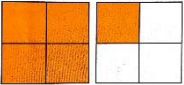
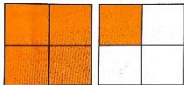
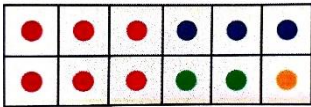
Encontraron cada fracción solicitada, pero a diferencia del grupo cuatro ellos no realizaron tratamientos para escribir las fracciones equivalentes respectivas.

Con respecto a la segunda consigna este grupo al igual que el anterior fue capaz de resolverla correctamente, es decir, ellos realizaron la conversión del registro pictórico al registro aritmético de la fracción dada escribiendo la fracción como una fracción propia y un número mixto.

Conforme a lo expuesto anteriormente, los cinco grupos fueron capaces de resolver la primera consigna de esta actividad, la cual consistió en realizar la conversión de fracciones a un registro aritmético dadas en un registro pictórico. Los estudiantes de un grupo en particular, además de realizar la conversión del registro pictórico al aritmético emplearon tratamientos en este último registro para determinar las fracciones equivalentes a las fracciones encontradas. Por otro lado, la segunda consigna que consistió en convertir una fracción mixta dada en registro pictórico a uno aritmético fue resuelta adecuadamente por dos grupos solamente. Les resultó difícil a los estudiantes realizar la conversión de la representación pictórica a la aritmética debido a que se trató de la representación de una fracción mixta. Tres grupos no fueron capaces de escribir la fracción impropia adecuadamente, y dos grupos no escribieron la fracción como un número mixto.

Así que, conforme al desarrollo mostrado de esta actividad, los estudiantes fueron capaces de articular coherentemente dos registros de representación pictórico y aritmético correspondiente a un nivel de comprensión cuatro de acuerdo a Hitt (1988) en la primera consigna.

Tabla 21 *Resumen del desarrollo de la actividad cuatro*

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
Las representaciones empleadas por los estudiantes para el desarrollo de esta actividad fueron pictóricas y aritméticas.  	Los estudiantes de los cinco grupos realizaron conversiones de registro de representación pictórica a un registro aritmético.  $\frac{5}{4}$	Los estudiantes emplearon tratamientos en los registros de representación aritmética.  $\frac{5}{4} \quad \left \quad 1 \frac{1}{4} \quad \left \quad \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \right. \right.$  $\frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$	Nivel de comprensión de Hitt 4 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

4.2.5 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 5 por grupo

Grupo A

De acuerdo al trabajo presentado por este grupo, los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente dos de las tres consignas presentadas.

Para resolver estas consignas ellos emplearon barras de fracciones mediante material manipulativo que se les proporcionó. Para la segunda consigna que consistió en encontrar la suma de $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$. Ellos emplearon 1 barra de fracciones correspondiente a la fracción $\frac{1}{2}$, seguidamente

descubrieron que esta fracción es equivalente a $\frac{2}{4}$ empleando dos barras de fracciones de $\frac{1}{4}$ tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 38 Empleo de manipulativos para representar la suma $1/2 + 2/4$



Fuente: Elaboración propia

Para resolver la tercera consigna $\frac{3}{5} + \frac{8}{10}$ ellos emplearon 3 barras de fracciones correspondientes a $\frac{1}{5}$ y encontraron que una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ es $\frac{6}{10}$, posteriormente procedieron a poner juntas las barras de fracciones que representan $\frac{6}{10}$ y $\frac{8}{10}$ encontrando que la suma de estas dos fracciones es $\frac{14}{10}$, que luego procedieron a simplificarla. Posteriormente, ellos realizaron la conversión a un registro aritmético para presentar su resultado, tal como se aprecia en la siguiente figura.

Figura 39 Empleo de manipulativos y registro aritmético en la resolución de problemas con fracciones



Fuente: Elaboración propia

Es evidente el empleo de tratamientos y conversiones por parte de este grupo al resolver estas consignas.

Grupo B

De acuerdo al trabajo presentado por el grupo número dos, ellos resolvieron correctamente las tres consignas propuestas, para resolver la primera consigna que consistió encontrar la suma $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ dada en un registro de representación pictórica, ellos emplearon las barras de fracciones correspondientes a $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, encontrando que la fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ es $\frac{6}{8}$, así que $\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ tal como se muestra en la figura.

Figura 40 Empleo de barras de fracciones para representar la suma $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$

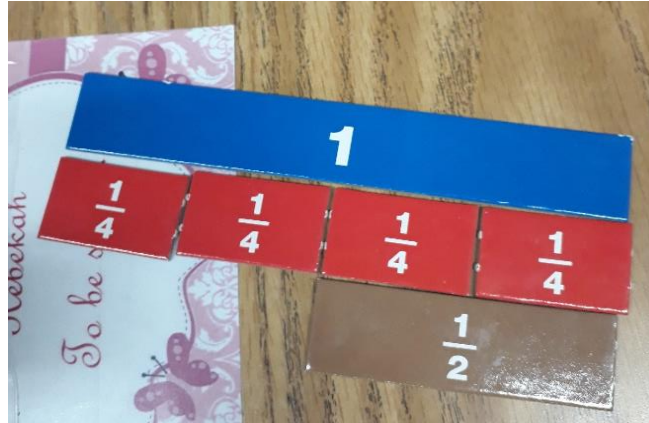


Fuente: Elaboración propia

Ellos también realizaron la conversión al registro aritmético para presentar la solución.

Del mismo modo procedieron a resolver la segunda consigna $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$, emplearon las barras de fracciones correspondientes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y la unidad para representar la situación dada en un registro pictórico. Encontraron que la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$ y que $\frac{2}{4} + \frac{2}{4}$ hacen la unidad (ver siguiente figura).

Figura 41 Empleo de barras de fracciones para representar la suma $1/2 + 2/4$



Fuente: Elaboración propia

Grupo C

De acuerdo al trabajo presentado por el grupo tres, resolvieron al igual que el grupo dos las tres consignas de manera correcta, a diferencia que ellos realizaron la conversión del registro pictórico al aritmético de cada una de las fracciones; luego, procedieron a realizar los respectivos tratamientos a cada una de las fracciones para encontrar fracciones equivalentes, y así encontrar cada una de las sumas solicitadas.

Para el caso, al resolver la consigna tres $\frac{3}{5} + \frac{8}{10}$ emplearon tratamientos dentro del registro aritmético, para encontrar la fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ con denominador 10, multiplicaron ambos numerador y denominador por dos obteniendo así la fracción $\frac{6}{10}$, luego procedieron a sumar las dos fracciones, obteniendo la fracción impropia $\frac{14}{10}$, expresaron esta fracción como un número mixto $1\frac{4}{10}$, y finalmente simplificaron la fracción mixta, obteniendo $1\frac{2}{5}$. (Ver figura a continuación).

Figura 42 Tratamientos en registro aritmético para resolver $3/5 + 8/10$

$$\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{10} + \frac{8}{10} = \frac{14}{10} \text{ or } 1 \frac{4}{10} \div 2 = \frac{2}{5} \boxed{1 \frac{2}{5}}$$

Fuente: Elaboración propia

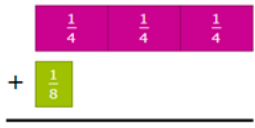
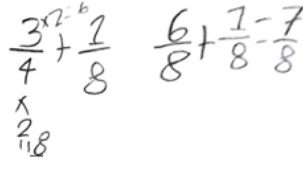
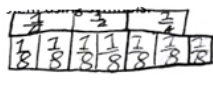
Grupo D

El grupo número cuatro, al igual que los dos grupos anteriores, resolvió correctamente las tres consignas presentadas, ellos realizaron conversiones entre el registro de representación pictórico al aritmético, emplearon tratamientos dentro del registro de representación aritmético, y también emplearon las barras de fracciones como material manipulable para poder resolver cada una de las situaciones problemáticas.

Grupo E

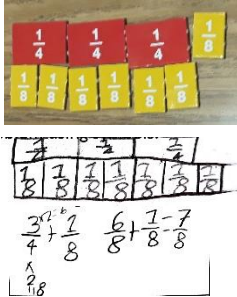
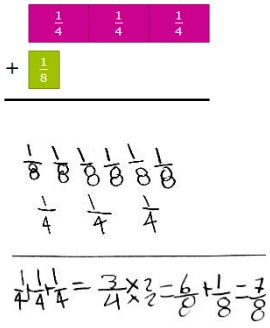
De igual forma, el grupo número cinco resolvió correctamente las tres consignas presentadas, empleando conversiones de registro pictórico al aritmético y viceversa, para el caso al resolver el problema $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ dado en registro pictórico. Primero realizaron la conversión al registro aritmético y realizaron un tratamiento en dicho registro, obteniendo la expresión equivalente $\frac{6}{8} + \frac{1}{8}$, encontrando así la suma $\frac{7}{8}$, posteriormente procedieron a convertir esta nueva fracción a un registro pictórico como se muestra en la siguiente figura.

Figura 43 Conversiones y tratamientos para resolver la operación $3/4 + 1/8$

Use el siguiente modelo para sumar las fracciones.  + _____	Use barras de fracciones para representar el problema y realice un dibujo. 
Reescriba y responda el problema empleando símbolos aritméticos. $\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ 	

Fuente: Elaboración propia

Tabla 22 Resumen de los resultados de la actividad cinco

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
Para la resolución de los problemas en esta actividad los estudiantes emplearon manipulativos, representaciones pictóricas y aritméticas. 	Las conversiones realizadas por los estudiantes fueron las que van de un registro pictórico a un registro aritmético.	En la resolución de los problemas de esta actividad los estudiantes emplearon tratamientos en un registro aritmético. 	Nivel de comprensión de Hitt 4 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

Para resolver cada consigna planteada en esta actividad, los estudiantes emplearon barras de fracciones como material manipulable. La primera consigna consistió en la suma de las fracciones

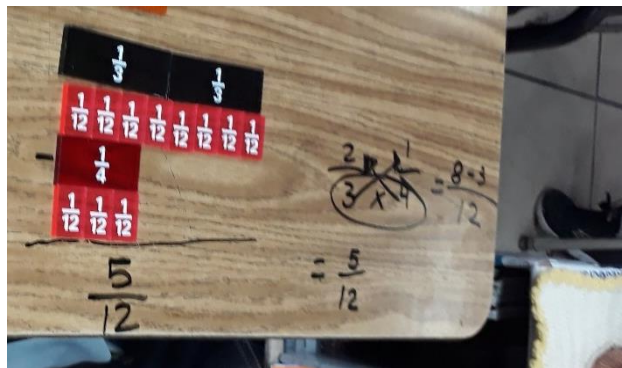
$\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ dada en un registro de representación pictórica, cuatro de los cinco grupos resolvieron adecuadamente esta consigna, realizaron la conversión de la suma al registro de representación aritmético. También emplearon tratamientos en el registro aritmético para poder resolver la consigna solicitada, tal como se muestra en la figura 42, pág. 119. De igual manera, procedieron a resolver la segunda y tercera consigna. De acuerdo a lo anterior y los niveles de comprensión de Hitt (1988) (ver tabla 1) los estudiantes alcanzaron un nivel cuatro en esta actividad, es decir, una articulación coherente entre dos sistemas de representación.

4.2.6 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 6 por grupo

Grupo A

De acuerdo al trabajo presentado por el grupo número uno, se aprecia que fueron capaces de resolver las tres situaciones problemáticas presentadas, realizaron la conversión de las fracciones involucradas en los problemas en un registro verbal a un registro aritmético. Para resolver la situación problemática dos, identificaron las fracciones involucradas en el problema, luego procedieron a realizar la conversión de dichas fracciones a un registro aritmético, seguidamente, realizaron un tratamiento dentro de este registro para poder encontrar la solución a la situación problemática propuesta. También emplearon barras de fracciones para comprobar su respuesta obtenida previamente empleando tratamientos en el registro aritmético tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 44 Estudiantes empleando barras de fracciones para resolver $2/3 - 1/4$ y tratamientos realizados por estos estudiantes en registro de representación aritmético



Fuente: Elaboración propia

Para resolver la tercera situación problemática, ellos identificaron las fracciones mixtas involucradas en el problema; luego, procedieron a convertirlas a fracciones impropias en el registro aritmético; finalmente, realizaron los respectivos tratamientos, tal como se muestra en la siguiente figura para encontrar la respectiva solución.

Figura 45 Tratamiento realizado por los estudiantes para resolver $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}$

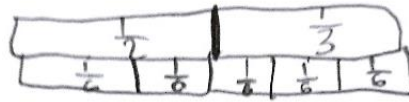
$$\frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{16-9}{6} = \frac{7}{6} \quad 1\frac{1}{6}$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo B

Con respecto al grupo dos, ellos fueron capaces de resolver las primeras dos de las tres situaciones problemáticas correctamente. Al resolver la primera situación problemática emplearon las barras de fracciones como material manipulable, luego realizaron una representación pictórica del planteamiento de la operación $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ tal como se muestra en la figura 46, pág. 123. También realizaron sumas de fracciones equivalentes con igual denominador en un registro aritmético para encontrar la solución al problema (ver figura 47, pág. 123).

Figura 46 Representación pictórica de $1/2 + 1/3$



Fuente: Elaboración propia

Figura 47 Tratamiento en registro aritmético de la suma $1/2 + 1/3$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo C

Conforme al trabajo presentado por el grupo tres, respondieron correctamente la segunda y tercera situación problemática. Para resolver el segundo problema convirtieron las fracciones dadas en un registro verbal a un registro aritmético; luego, procedieron a realizar tratamientos en el registro de representación aritmético para encontrar fracciones equivalentes con igual denominador y así poder encontrar la solución al problema; posteriormente, realizaron una representación pictórica asociada a las fracciones equivalentes encontradas.

Figura 48 Representación pictórica y tratamientos en registro aritmético para resolver $2/3 - 1/4$

Use barras de fracciones para representar el problema y realice un dibujo.	
Reescriba las fracciones en fracciones equivalentes.	
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$ $\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$	
Realice la operación y resuelva el problema.	
$\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$	

Fuente: Elaboración propia

Para resolver la tercera situación problemática, la cual involucraba una resta de fracciones mixtas, emplearon tratamientos en el registro de representación aritmético. Primero reescribieron la fracción mixta a una fracción impropia; luego, procedieron a encontrar las fracciones equivalentes con igual denominador; seguidamente, realizaron la diferencia entre estas dos fracciones; y finalmente, simplificaron la solución encontrada tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 49 Tratamientos en un registro aritmético para resolver $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l} \frac{6+2}{2 \times 3} \quad \frac{8 \times 2}{3 \times 2} = \frac{16}{6} \\ \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{4}{6} \end{array} \quad \frac{16}{6} - \frac{4}{6} = \frac{12}{6} \text{ or } 2$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo D

El grupo cuatro fue capaz de resolver las tres situaciones problemáticas correctamente, convirtieron las fracciones involucradas en cada uno de los problemas de un registro verbal a un registro aritmético, escribiendo las fracciones en registro aritmético procedieron a realizar tratamientos para encontrar la respectiva solución a cada problema (ver figura 50). También emplearon barras de fracciones como apoyo en la resolución de cada problema.

Figura 50 Tratamientos en registro aritmético para resolver $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}$

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Fuente: Elaboración propia

Grupo E

De igual manera que el grupo cuatro, el grupo cinco fue capaz de resolver las tres situaciones problemáticas planteadas, realizando conversiones de un registro verbal a un registro aritmético y

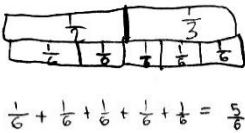
realizando tratamientos dentro del registro aritmético. Se auxiliaron de barras de fracciones para la resolución de cada uno de los problemas presentados.

Para realizar esta actividad todos los grupos emplearon barras de fracciones como material manipulable. Las tres consignas presentadas fueron expresadas en un registro de representación verbal. Con respecto a la primera consigna, cuatro de los cinco grupos la resolvieron adecuadamente. Realizaron la respectiva conversión del registro verbal al registro aritmético, emplearon también tratamientos en este registro para la resolución de la situación problemática, dos de estos cuatro grupos resolvieron esta consigna en un registro pictórico.

La segunda consigna fue resuelta adecuadamente por los cinco grupos de estudiantes; todos realizaron la conversión del registro verbal al aritmético para su resolución y a la vez emplearon los respectivos tratamientos en este registro. De la misma manera que la primera consigna, dos grupos emplearon adicionalmente el registro pictórico para la resolución de la situación problemática. Del mismo modo, procedieron en la resolución de la tercera consigna, la cual fue resuelta adecuadamente por cuatro de los cinco grupos.

En los marcos de las observaciones anteriores y de acuerdo con los niveles de comprensión de Hitt (ver tabla 1) dos de los cinco grupos alcanzaron un nivel de articulación coherente entre los registros de representación verbal, pictórico y aritmético en esta actividad.

Tabla 23 *Resumen del desarrollo de la actividad seis*

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes emplearon manipulativos, representaciones verbales, pictóricas y aritméticas. 	Los estudiantes para la resolución de los problemas de esta actividad realizaron conversiones de un registro verbal a un aritmético, de un verbal a un pictórico, y de un pictórico a un aritmético.	Los estudiantes emplearon tratamientos en un registro de representación aritmético y pictórico. $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$	Nivel de comprensión de Hitt 4 (Ver tabla 1)

Fuente: Elaboración propia

4.2.7 Resultados y producciones de secuencia didáctica de aprendizaje 7 por grupo

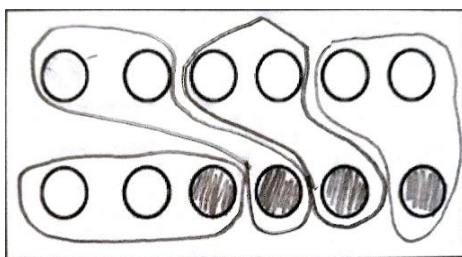
Grupo A

El trabajo realizado por el grupo uno muestra que ellos fueron capaces de resolver correctamente dos las tres situaciones problemáticas presentadas. En la primera consigna se solicitó remover seis elementos del conjunto de 12. Convirtieron la fracción restante $\frac{6}{12}$ del conjunto dado en un registro de representación pictórico, a un registro aritmético, también identificaron las fracciones equivalentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$.

En la segunda situación problemática se les solicito remover 8 elementos del conjunto total de 12. Representaron la fracción $\frac{4}{12}$ de elementos restantes en un registro pictórico, y a la vez

realizaron un tratamiento dentro de este mismo registro para tratar de representar la fracción $\frac{1}{3}$ equivalente a $\frac{4}{12}$ tal como se muestra en la figura 41 no obstante, el tratamiento realizado por los estudiantes representa $\frac{1}{3}$ en los cuatro conjuntos individualmente, pero, no representa $\frac{1}{3}$ del conjunto formado por los doce círculos. Realizaron también la conversión de estas fracciones en registro pictórico al registro aritmético.

Figura 51 Representación de la fracción 4/12 en registro pictórico y tratamiento para tratar de encontrar la fracción equivalente 1/3



Fuente: Elaboración propia

Con relación a la tercera consigna, se solicitó a los estudiantes encontrar $\frac{1}{4}$ de la docena, ellos resolvieron el problema en una representación pictórica coloreando tres círculos del conjunto de 12.

Grupo B

Del mismo modo que el grupo uno, este grupo resolvió correctamente dos de las tres situaciones problemáticas propuestas. Para resolver estos problemas, emplearon contadores de dos colores.

En la situación uno, se les solicitaba encontrar la fracción restante de remover 6 elementos de un conjunto de 12, ellos respondieron que la fracción correspondiente es $\frac{6}{12}$, o su equivalente $\frac{1}{2}$. En la situación dos se solicitó representar la fracción restante, removiendo ocho elementos de un

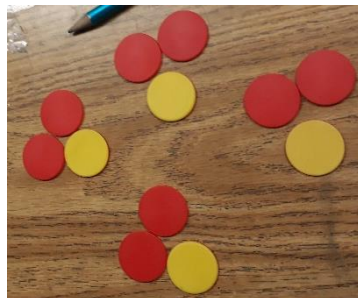
conjunto de doce. Emplearon contadores para representar esta fracción y para tratar de encontrar una fracción equivalente a la misma, tal como se aprecia en las siguientes figuras. En la figura 42 se aprecia un error similar al grupo A, la representación muestra $\frac{1}{3}$ en cada uno de los cuatro conjuntos individualmente, pero no $\frac{1}{3}$ de conjunto total de 12.

Figura 52 Representación de la fracción 4/12 empleando material manipulativo



Fuente: Elaboración propia

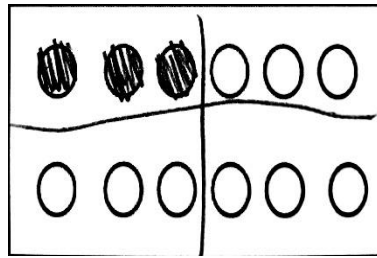
Figura 53 Representación incorrecta de la fracción 1/3 de un conjunto de 12 elementos



Fuente: Elaboración propia

En la situación tres se solicitaba encontrar un cuarto de una docena, ellos resolvieron esta consigna en un registro de representación pictórico, dividiendo el conjunto de 12 elementos en cuatro partes iguales y pintando uno de ellos, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 54 Representación pictórica de $\frac{1}{4}$ de una docena



Fuente: Elaboración propia

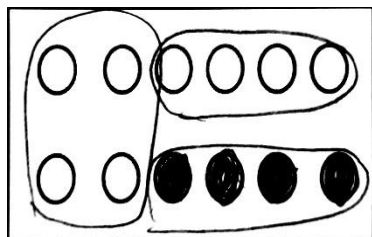
Grupo C

En concordancia con el trabajo presentado por el grupo C, respondieron adecuadamente a dos de las tres consignas presentadas igualmente que el grupo A Y B, completando la representación pictórica proporcionada y realizando la conversión respectiva a un registro aritmético. Al igual que el grupo anterior emplearon manipulativos para la resolución de las situaciones problemáticas.

Grupo D

De acuerdo al trabajo presentado por los estudiantes del grupo cuatro, se evidencia que fueron capaces las tres consignas correctamente, no tuvieron ninguna dificultad al realizar la representación pictórica y su respectiva conversión al registro aritmético de las situaciones problemáticas planteadas, sin embargo, Este grupo resolvió adecuadamente la segunda consigna que consistía en encontrar la fracción restante de un conjunto de 12 elementos después de remover 8 elementos de él. Los estudiantes resolvieron esta consigna en un registro pictórico dividiendo el conjunto en tres partes iguales y coloreando uno de ellos (ver figura 55, pág. 130), de ese modo determinaron que las fracciones $\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes.

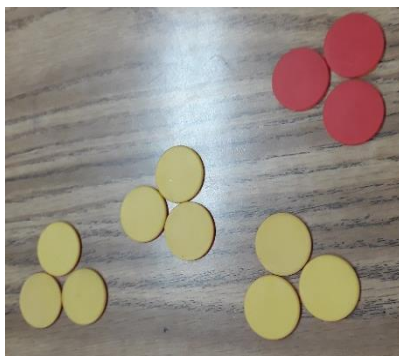
Figura 55 Representación pictórica de $\frac{1}{3}$ de una docena ($\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$)



Fuente: Elaboración propia

En la tercera consigna se solicitó encontrar un cuarto de una docena, para resolverla los estudiantes emplearon manipulativos, dividieron los doce elementos en cuatro conjuntos iguales seleccionando uno de ellos con otro color tal como se muestra en la figura 56. Determinando así, que tres elementos son $\frac{1}{4}$ de una docena, y además que las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

Figura 56 Representación de $\frac{1}{4}$ de una docena empleando manipulativos



Fuente: Elaboración propia

Grupo E

El grupo cinco respondió adecuadamente dos de las situaciones problemáticas presentadas en un registro verbal completando la representación pictórica proporcionada, realizaron la conversión al registro aritmético y emplearon tratamientos en este último registro.

En la primera consigna se solicitó representar la fracción restante al quitar seis elementos de un conjunto de 12. Para representar la solución al problema, la fracción $\frac{6}{12}$ los estudiantes emplearon contadores de dos colores tal como se muestra en la siguiente figura.

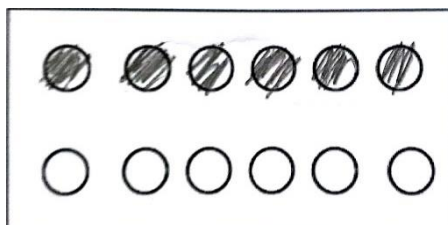
Figura 57 Representación de la fracción 6/12 empleando manipulativos



Fuente: Elaboración propia

Realizaron la representación pictórica respectiva de la solución, y también convirtieron la solución a un registro aritmético, luego empleando tratamientos encontraron la fracción $\frac{1}{2}$ equivalente a la misma tal como se muestra la figura a continuación.

Figura 58 Representación pictórica de la fracción 6/12



Fuente: Elaboración propia

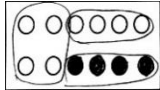
Los estudiantes resolvieron la segunda consigna adecuadamente similarmente al grupo D, dividieron el conjunto de 12 elementos en tres conjuntos iguales y colorearon uno de ellos. Resolvieron el problema tanto en un registro pictórico como aritmético. La tercera consigna fue resuelta inadecuadamente, se solicitó encontrar $\frac{1}{4}$ de una docena, los estudiantes trataron de resolver la consigna en un registro pictórico coloreando cuatro círculos de los 12.

Para resolver la actividad siete se proporcionó a los estudiantes material manipulable, contadores de dos colores. La situación problemática fue dada en lenguaje verbal, la tarea de los estudiantes consistió en realizar la conversión del registro verbal a un registro pictórico y aritmético.

Los cinco grupos resolvieron adecuadamente la primera parte de la situación problemática. Realizaron la respectiva conversión del registro verbal a uno pictórico y aritmético, al mismo tiempo fueron capaces de emplear tratamientos en ambos registros de representación para responder a las interrogantes planteadas. La segunda parte de esta actividad fue resuelta adecuadamente por dos de los cinco grupos, y la tercera parte de la situación problemática solamente tres de los cinco grupos la resolvieron adecuadamente. Entre los errores encontrados se observó la dificultad al convertir la situación problemática del lenguaje verbal al lenguaje pictórico y al realizar tratamientos en este último registro de representación.

Por lo anteriormente expresado y en concordancia con los niveles de comprensión de Hitt (1988) (ver tabla 1) los estudiantes en esta actividad alcanzaron un nivel de comprensión tres, es decir, transformación, con la preservación de significado, de un sistema de representación a otro.

Tabla 24 *Resumen del desarrollo de la actividad siete*

Representaciones	Conversiones	Tratamientos	Nivel de comprensión
En esta actividad los estudiantes emplearon representaciones pictóricas, aritméticas y verbales.	Los estudiantes realizaron tres conversiones: De un registro verbal a un pictórico, de un pictórico a aritmético y de aritmético a pictórico.	Los estudiantes realizaron tratamientos en un registro de representación pictórico y aritmético tal como se muestra en la figura.	Nivel de comprensión Hitt 3 (ver tabla 1)
			

Fuente: Elaboración propia

En este capítulo, se presentaron los resultados del estudio, el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica que consistió en 13 ítems y también el análisis de los resultados de las siete secuencias didácticas trabajadas por los cinco grupos participantes en la investigación.

Conclusiones

Para la investigación se consideraron aspectos teóricos como ser los elementos de las representaciones semióticas de Duval(1999, 2004, 2006); registros de representación, conversiones y tratamientos. También se consideró los cinco niveles de comprensión de Hitt (1988) y las diferentes interpretaciones del concepto de fracción y se determinaron las siguientes conclusiones.

Con respecto al primer objetivo de la investigación; explorar los conocimientos previos, dificultades y errores que presentan los estudiantes de quinto grado en la resolución de problemas que involucran fracciones, se observó que los estudiantes tuvieron dificultades en ubicar fracciones en la recta numérica, no identificando apropiadamente el numerador y el denominador correspondiente a cada fracción en la recta. Además, fueron evidentes los errores al graficar las fracciones sobre la recta, ya que los estudiantes no realizaron las divisiones apropiadas en la recta numérica correspondiente al denominador de una fracción.

También en los desarrollos de los estudiantes se reflejaron dificultades en el empleo de tratamientos en la resolución de problemas en un registro de representación pictórica. Por otro lado, los estudiantes mostraron inconsistencias en cuanto a la interpretación del significado de la fracción como parte-todo y las fracciones impropias en una representación en registro pictórico.

Con respecto al segundo objetivo del estudio; identificar los registros de representación que emplean los estudiantes en la resolución de problemas que involucran fracciones, los registros de representación predominantes en la resolución de problemas que involucran fracciones en los estudiantes de quinto grado de la escuela International school fueron:

a. Registro pictórico: Rectas numéricas, dibujos que incluyen figuras geométricas como ser, círculos y rectángulos.

b. Registro aritmético: Empleo de símbolos convencionales para representar una fracción en la forma $\frac{a}{b}$ o $a\frac{b}{c}$ a, b, c no igual a cero.

c. Registro verbal: situación problemática enunciada en palabras y las argumentaciones realizadas por los estudiantes.

El tercer objetivo de investigación, determinar las conversiones que realizan los estudiantes de quinto grado entre los diversos sistemas de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones. Las conversiones más frecuentes realizadas por los estudiantes fueron: la conversión de un registro de representación pictórico a un registro aritmético, la conversión de un registro verbal a un registro aritmético, la conversión de un registro aritmético a un registro pictórico, y la conversión de un registro aritmético a un registro verbal.

El cuarto objetivo de investigación que consistió en describir el tratamiento que realizan los estudiantes dentro de un mismo registro de representación en la resolución de problemas que involucran fracciones. Los tratamientos empleados por los estudiantes al resolver las consignas, muestra que ellos emplearon diversos tratamientos en cada uno de los registros de representación. Para el caso, tal como se muestra en la figura 55, página 130, en el registro pictórico el tratamiento que ellos emplearon fue una reagrupación de los círculos dados para determinar la fracción $\frac{1}{3}$ equivalente a $\frac{4}{12}$. En el registro aritmético tal como se muestra en las figuras 48y 49, páginas 123 y 124 respectivamente, los estudiantes emplearon la multiplicación como un tratamiento para encontrar fracciones equivalentes con el mismo denominador para poder efectuar la suma

respectiva y la división para poder simplificar las fracciones resultantes. Se observó además el empleo de sumas recursivas para encontrar la suma de dos fracciones, después de haber realizado la conversión del registro pictórico tal como se muestra en la figura 47, pág. 123.

Con referencia al objetivo cinco, evaluar en qué manera el empleo de los manipulativos contribuyen en la resolución de problemas que involucran fracciones, se observó que: Los estudiantes emplearon los manipulativos para representar una situación problemática dada en un registro de representación pictórico, aritmético y verbal. En el trabajo presentado por los estudiantes se evidenció que el empleo de estos manipulativos facilitó la comprensión y la resolución de los problemas propuestos. Por ejemplo, al resolver sumas y restas de fracciones, los estudiantes emplearon barras de fracciones para encontrar las fracciones equivalentes y resolver la suma o resta respectivamente tal como se muestra en las figuras 40 y 41, páginas 117 y 118 respectivamente. Además, el uso de estos manipulativos potencializó el empleo de tratamientos en otros registros de representación de una manera más versátil tal como se muestra en la figura 39, pág. 116 y 44 pág. 122.

El objetivo de investigación seis alude a los significados de las fracciones más utilizados por los estudiantes en la resolución de problemas con fracciones. Los estudiantes utilizaron el significado parte-todo y el de medida en la resolución de los problemas propuestas. Por ejemplo en la actividad cuatro se proporcionó una representación pictórica que consistió en un conjunto de 12 círculos de cuatro colores diferentes, ubicados de forma rectangular (ver figura 34, pág. 111), los estudiantes emplearon el significado parte-todo para determinar la fracción correspondiente a cada color del conjunto. El significado de medida fue empleado por los estudiantes al resolver los problemas de la actividad tres por ejemplo donde se solicitó ubicar y graficar fracciones en la recta numérica.

Recomendaciones

Introducir a los estudiantes desde edades tempranas al desarrollo intuitivo del concepto de fracción, Fazio & Siegler (2011) argumentan que niños de kinder en edades de cuatro años comprenden intuitivamente la noción de compartir y proporcionalidad. Los niños pueden repartir elementos de un conjunto en cantidades iguales, por ejemplo, ellos pueden repartir ocho confites a cuatro personas. En esta misma línea de pensamiento, un niño de cinco años es capaz de repartir un elemento único en varias partes, por ejemplo, una barra de chocolate, más adelante a la edad de seis años los niños tienen la capacidad de poder realizar equivalencias de proporcionalidad representadas por objetos de forma geométricas de la vida cotidiana, por ejemplo $\frac{1}{2}$ de una pizza es igual a $\frac{1}{2}$ de una caja de chocolates. Por lo expuesto anteriormente, es oportuno aprovechar y potencializar las habilidades intuitivas que los niños poseen para aprender el concepto de fracción, que servirán de base sólida para desarrollar el concepto formal en grados superiores.

A la escuela International School se le recomienda implementar el uso del basto material manipulable con que cuenta en los grados de primaria, ya que de acuerdo con los principios y estándares para la educación matemática, en el estándar de números y operaciones, establece que la representación de números con diversos materiales concretos debe ser una de las tareas primordiales de la instrucción matemática en los grados de primaria. En particular, la habilidad de razonamiento y comprensión del concepto de fracción podría desarrollarse a medida que los estudiantes utilicen material manipulable para representar fracciones.

Se recomienda fomentar el empleo de diversos registros de representación desde edades tempranas. Tal como se expone en los principios y estándares de educación matemática en lo

concerniente a representación. Los programas de instrucción matemática desde prekindergarten hasta undécimo grado deberían promover en todos los estudiantes crear y emplear representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas, así como también seleccionar, aplicar y realizar conversiones entre diversas representaciones matemáticas para resolver problemas, de modo que las representaciones constituyan elementos esenciales en el aprendizaje de las matemáticas, tanto en la aprehensión de conceptos y las relaciones entre ellos, como también en la comunicación de los mismos.

A la Dirección de Postgrado de la UPNFM se recomienda dar seguimiento al tema de este trabajo de investigación, pues es un tema muy amplio y relevante para continuar siendo estudiado.

Referencias Bibliográficas

- Gaetano, J. (2014). The effectiveness of using manipulatives to teach. *Rowan University, Rowan Digital Works*.
- NWEA (Northwest Evaluation Association). (2018). *Class Report*. Portland.
- Parra , M. Á., & Flores , R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación MatEMática*, vol. 20, núm. 1, pp. 31-52.
- Schleicher, A. (2015). *PISA Results in Focus*. OECD.
- (UPNFM), U. P. (2017). *Sistema de Líneas Institucionales de Investigación 2017-2018*. Tegucigalpa: COIMPRES.
- Amaya , T., Pino, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Matemática Educativa*.
- Amaya, T., & Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación Matemática*.
- Benítez, A. A., & García, M. L. (2014). Estudio de la primera representación en la resolución de problemas. *CLAME*, 261-291.
- Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza, Editorial.

- Carpenter, T. P. (1981). *Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Castro, M. G., Gonzales, M. D., Flores, S., Ramirez, O., Cruz, M. D., & Fuentes, M. C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I . *Redalyc*.
- DCNB. (2000). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica*. Tegucigalpa: LITHOPRESS INDUSTRIAL.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Graficas Univalle.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *LA GACETA DE LA RSME*.
- Fazio , L., & Siegler , R. (2011). Enseñanza de las fracciones . *Series didacticas educativas*, 8.
- Flores , R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, vol. 17, núm. 2, 7-34.
- García , B., Granier, M., & Moreno, G. (2013). Formación de docentes en el uso de recursos. *Redalyc*, 100-106.

- García, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal.
- Gómez, G. (2006). *El uso de la computadora en la manipulación y conversión de los registros de representación para el estudio de la función lineal*. Tegucigalpa: Tesis de maestría.
- Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación* . México : McGRAW-HILL .
- Hitt, F. (1988). Function, Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior JMB*, 123-134.
- Leones , M., Baruzzi, G., Scorzo, P., & Rivas, N. (2016). Un Análisis de los Resultados del Segundo y Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*.
- Linares, A. (2008). Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y de Vigotsky. *Universidad Autónoma de Barcelona*.
- Marroquín, C. (2009). *Construcción del concepto ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de primer semestre de ingeniería agroindustrial*. Tegucigalpa: Tesis de maestría.
- Mullis , I., Martin , M., Foy, P., & Hooper, M. (2015). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics* . Boston : IEA TIMSS&PIRLS.
- NCTM. (2000). *Principles and standars for school mathematics*. The National Council of Teacher of Mathematics, Inc.

- Newstead, k., & Murray, H. (1998). *Young Student's Constructions of fractions*. Mathematics Learning and Teaching Initiative, South Africa.
- Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico, D. F.: Trillas.
- Polya, G. (1997). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- (2000). *Principles and Estandars for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Quispe, W., & Gallardo, J. (2009). UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRENSIÓN DE LA FRACCIÓN EN PERÚ A TRAVÉS DE LOS LIBROS DE TEXTO. *Investigación en Educación Matemática XIII*, 391-392.
- Ríos, Y. J. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática . *Omnia*, 11-33.
- Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, C. (2014). *Metodologia de la Investigacion*. Mexico D.F.: McGraw-Hill Interamericana.
- Sandoval , Y. (2010). *Las representaciones geométricas como herramientas para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollado con alumnos de octavo grado*. Tegucigalpa.
- Streetland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematic Education: A Paradigm of Develomental Research* . Netherlands : Kluwer Academic publishers.
- Trigo, L. (1997). Principios y métodos de la resolución de Problemas. *Editorial*.

- Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso. *Educación Matemática*, vol. 9, núm. 3, 5-17.
- Valenzuela, M. (2012). Uso de materiales didácticas manipulativas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.
- Verettoni, M. (2010). Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*.
- Wong, M., & Evans, D. (2007). Students' Conceptual Understanding of Equivalent Fractions. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice — Volume 2*, 377-379.
- Yusof, J. (2013). The Role of Manipulatives in Enhancing Pupils' Understanding on. *International Journal for Infonomics (IJI)*, 754.

Anexos

Anexo 1. Prueba diagnóstica

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

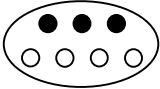
Prueba diagnóstica

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

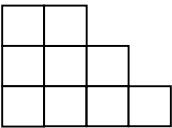
INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabajando de manera ordenada.

1.

¿Qué fracción del conjunto esta coloreado? 	a. 3 séptimos b. 3 de 4 c. $\frac{7}{3}$ d. 7 tercios
---	--

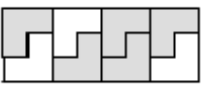
2.

Coloree dos tercios en la siguiente figura.



3.

Nombre cada una de las siguientes fracciones presentadas. Realícelo en palabras y símbolos.

			
Símbolos:	Símbolos:	Símbolos:	Símbolos:
Palabras:	Palabras:	Palabras:	Palabras:

4.

Circule el número mayor de los cuatro números. Explique su respuesta.

1 tercio,	1 cuarto,	1 sexto,	1 quinto
Explicación: _____			

5.

Circule el número mayor. Explique su respuesta.

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$
Explicación: _____

6.

Circule la fracción menor de cada uno de los siguientes pares. Explique su respuesta.		
a) $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$ Explicación: _____	b) $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{7}$ Explicación: _____	c) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{10}$ Explicación: _____

7.

Escriba las siguientes fracciones en orden ascendente (de menor a mayor). Explique porque las ordeno de esa manera. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$
Explicación: _____

8.

Adrián ubicó una marca sobre la recta numérica mostrada. ¿Corresponde la marca a la fracción $\frac{2}{3}$? SI o NO (Circule). Explique su respuesta. 

Explicación: _____

9.

Escriba el número correspondiente en cada ecuación. Explique su respuesta.

a) $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{18}$

Explicación:

b) $\frac{3}{12} = \frac{1}{\quad}$

Explicación:

10.

Jacobo gastó $\frac{1}{4}$ de su dinero y Sara gastó $\frac{1}{2}$ de su dinero. ¿Es posible que Jacobo gastara más dinero que Sara? Explique su respuesta.

11.

En una repostería $\frac{3}{8}$ de la harina es usada para preparar pan y $\frac{2}{8}$ de la harina es usada para preparar pasteles. ¿Qué fracción de la harina ha sido usada en la repostería?

12.

Una carrera de relevos se realiza en estaciones de $\frac{1}{8}$ km cada una. Cada corredor completa una estación. ¿Cuántos corredores se requieren para recorrer una distancia de $\frac{3}{4}$ km?

13.

Encuentre la mitad, un cuarto, y un tercio de los siguientes números de ser posible. Escriba su respuesta sobre la línea proporcionada. De no ser posible, ponga una cruz sobre la letra y explique por qué.			
a) 12	b) 24	c) 15	d) 16
a. _____	a. _____	a. _____	a. _____
b. _____	b. _____	b. _____	b. _____
c. _____	c. _____	c. _____	c. _____

Anexo 2. Secuencias didácticas de aprendizaje

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

Secuencia # 1

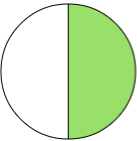
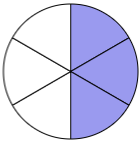
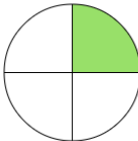
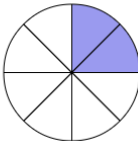
Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

Problema 1:

La siguiente tabla contiene 6 círculos del mismo tamaño. Por favor, responda las siguientes preguntas.

					
Círculo #1	Círculo #2	Círculo #3	Círculo #4	Círculo #5	Círculo #6
a. ¿Qué observa en los círculos?					

b. ¿Cuál es la diferencia entre cada círculo? ¿En qué son parecidos?

c. ¿Puede agrupar los círculos de acuerdo a su área sombreada? ¿Qué círculos puede agrupar, si los hay?

d. Escriba una fracción que represente el área sombreada en cada círculo.

Círculo #1	Círculo #2	Círculo #3	Círculo #4	Círculo #5	Círculo #6
—	—	—	—	—	—

Escriba las parejas de fracciones equivalentes.

¿Cómo las encontró?

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en matemática educativa VIII Promoción

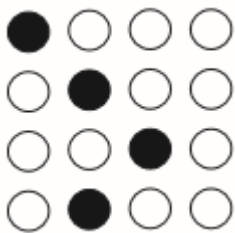
Secuencia # 2

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

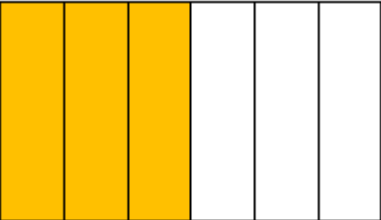
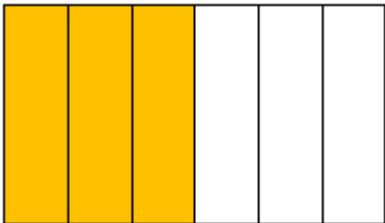
INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

1.

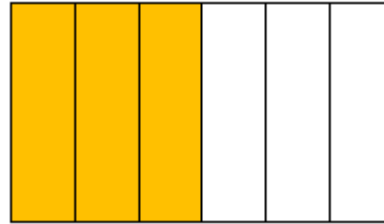
La siguiente figura muestra la fracción $\frac{4}{16}$ 	¿Cómo podría reagrupar los círculos para representar la fracción $\frac{2}{8}$? Realice un dibujo y explique su respuesta.
---	--

¿Cómo podría reagrupar los círculos para representar la fracción $\frac{1}{4}$? Realice un dibujo y explique su respuesta.	¿Hay alguna otra fracción representada en la figura? Explique su respuesta
---	--

2.

	Refiérase a la figura proporcionada y responda las siguientes preguntas. a. ¿Qué fracciones están representadas en la figura? b. ¿Cómo encontró esas fracciones? Explique
¿Cómo dividiría el rectángulo para representar la fracción $\frac{6}{12}$? Explique	
	

¿Cómo dividiría el rectángulo para representar la fracción $\frac{9}{18}$? Explique



Escriba las fracciones equivalentes que representan la región sombreada en el rectángulo.

3.

Encuentre cuatro fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{3}$.

¿Cómo encontró las fracciones? Explique.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

Secuencia # 3

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

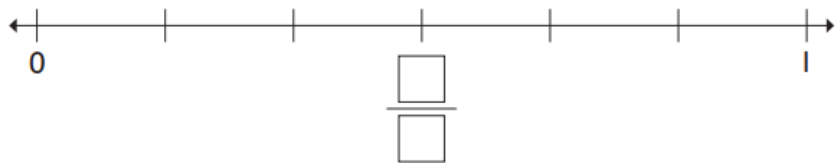
INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

Use barras de fracciones y escriba la fracción correspondiente.

1.


¿En cuántas partes está dividida la recta numérica? _____
¿Cómo encontró la fracción? _____

2.



¿En cuántas partes está dividida la recta numérica?

¿Cómo encontró la fracción?

¿Hay una fracción equivalente a la fracción encontrada? Explique

3.



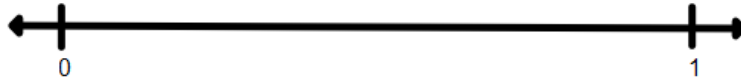
¿En cuántas partes está dividida la recta numérica?

¿Cómo encontró la fracción?

¿Hay una fracción equivalente a la fracción encontrada? Explique

4. Use la recta numérica proporcionada y grafique la fracción dada.

a $\frac{3}{5}$



¿En cuántas partes dividió la recta numérica? Explique

¿Cómo grafico la fracción dada?

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

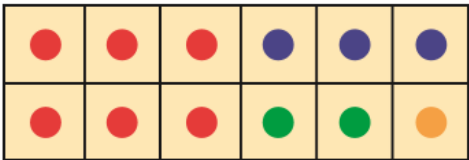
Secuencia # 4

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

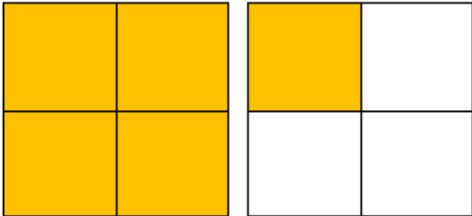
INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

1.

	Refiérase a la figura de la izquierda y responda a las siguientes interrogantes. a. ¿Qué fracción(s) nombra(n) la parte roja? b. ¿Qué fracción(s) nombra(n) la parte azul? c. ¿Qué fracción(s) nombra(n) la parte verde?
---	--

	d. ¿Qué fracción(s) nombra(n) la parte anaranjada?
Sume las fracciones encontradas en la parte a, b, c y d.	Sume las fracciones equivalentes que representan la parte roja, azul, verde y anaranjada.

2.

Escriba la fracción impropia representada en la siguiente figura. (Cada cuadrado representa una unidad) 		
Escriba una fracción impropia	Escriba un número mixto	Escriba una suma de fracciones
¿Qué forma de escribir la fracción le resulto más difícil? Explique		
Use barras de fracciones para representar la fracción. Realice una figura.		

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

Secuencia # 5

Nombre del estudiante: _____

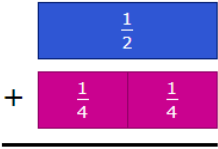
Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

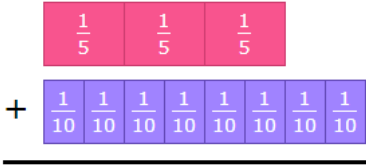
1.

Use el siguiente modelo para sumar las fracciones. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $+$ $\frac{1}{8}$
--

2.

Use el siguiente modelo para sumar las fracciones. 	Use barras de fracciones para representar la suma y realice un dibujo.
Reescriba y responda el problema empleando símbolos aritméticos. — + —	

3.

Use el siguiente modelo para sumar las fracciones. 
Use barras de fracciones para representar la suma y realice un dibujo.
Reescriba y responda el problema empleando símbolos aritméticos. — + —
¿Qué tipo de fracción encontró?
¿Podría realizar otro diagrama?



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

Secuencia # 6

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

1.

En la cafetería de Andrea se hacen lates con leche entera o leche descremada. El sábado, en la cafetería de Andrea se gastaron media caja de leche entera y un tercio de caja de leche descremada. ¿Cuánta leche se gastó el sábado en la cafetería de Andrea?



Escriba la operación para resolver el problema.

Use barras de fracciones para representar el problema. Realice un dibujo.

Reescriba las fracciones empleando fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Realice la operación y resuelva el problema.
¿Cómo resolvió el problema? Explique.

2.

Andrea hizo un pastel de manzana. Usó dos tercios de una cucharada de canela y una cuarta parte de una cucharada de nuez moscada. ¿Cuánto más canela que nuez moscada usó Andrea?	
Escriba la operación para resolver el problema.	
Use barras de fracciones para representar el problema. Realice un dibujo.	
Reescriba las fracciones empleando fracciones equivalentes con el mismo denominador.	
Realice la operación y resuelva el problema.	
¿Cómo resolvió el problema? Explique.	

Katy hizo galletas. Ella usó $2\frac{2}{3}$ de tazas de harina y $1\frac{1}{2}$ de tazas de azúcar. ¿Cuánta más harina que azúcar utilizó Katy?



Escriba la operación para resolver el problema.

Use barras de fracciones para representar el problema. Realice un dibujo.

Reescriba las fracciones empleando fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Realice la operación y resuelva el problema.

¿Cómo resolvió el problema? Explique.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN



International School
Experience & Quality Education
H O N D U R A S

Maestría en Matemática Educativa VIII Promoción

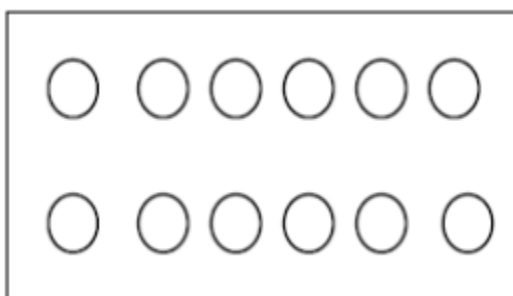
Secuencia # 7

Nombre del estudiante: _____

Fecha: _____

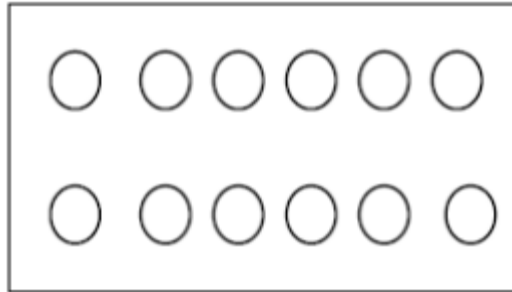
INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan los siguientes problemas. Resuelva cada uno de ellos como usted considere apropiado. Deje constancia de todo su trabajo. De preferencia use lápiz gráfico y trabaje de manera ordenada.

1. María está horneando un pastel y tiene 12 huevos. La receta requiere seis huevos. Retira seis huevos del cartón que le dió su maestro. Sombrea los huevos restantes en la imagen de la caja de huevos de abajo.



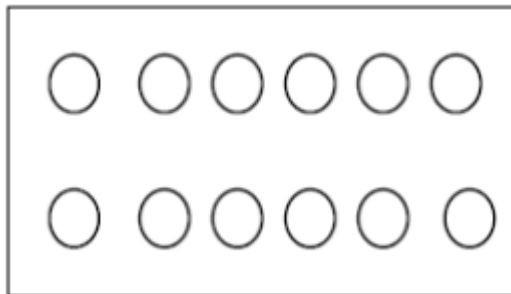
- ¿Qué fracción de todo el conjunto es 6?
- ¿Qué fracción del conjunto fue removida?
- ¿Qué otras fracciones se refieren al diagrama de arriba?

2. Comience con un conjunto completo de 12 huevos. Una receta ahora requiere ocho huevos. Retire ocho huevos de su conjunto. Sombree los huevos restantes en la imagen de la caja de huevos de abajo.



- a. ¿Qué fracción de todo el conjunto es 4?
- b. ¿Qué fracción del conjunto fue removida?
- c. ¿Qué otras fracciones se refieren al diagrama de arriba?

3. Comience con un conjunto completo de 12 huevos. Una receta requiere $\frac{1}{4}$ de docena de huevos. Sombree el número de huevos necesarios en la imagen a continuación.



- a. ¿Cómo decidió sombrear $\frac{1}{4}$ de una docena?
- b. ¿Qué otras fracciones son iguales a $\frac{1}{4}$?

Anexo 3. Rúbricas de evaluación de las secuencias didácticas de aprendizaje

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 1

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes realizan la conversión de cada una de las fracciones dadas en registro pictórico a uno aritmético.	Los estudiantes no realizan la conversión de ninguna fracción dada en registro pictórico a uno aritmético.	Los estudiantes realizan la conversión de por lo menos cuatro de las fracciones dadas en registro pictórico a uno aritmético.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes identifican los tres pares de fracciones equivalentes en registro pictórico.	Los estudiantes no identifican las fracciones equivalentes en registro pictórico.	Los estudiantes identifican por lo menos un par de fracciones equivalentes en registro pictórico.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes identifican los tres pares de fracciones equivalentes en registro aritmético.	Los estudiantes no identifican los tres pares de fracciones equivalentes en registro aritmético.	Los estudiantes identifican por lo menos un par de fracciones equivalentes en registro aritmético.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 2

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes realizan tratamientos en la resolución de problemas con fracciones en un registro pictórico.	Los estudiantes no emplean tratamientos razonables en la resolución de problemas con fracciones en un registro pictórico.	No aplica.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes identifican fracciones equivalentes en registro pictórico y aritmético.	Los estudiantes no identifican las fracciones equivalentes en registro pictórico ni aritmético.	Los estudiantes identifican fracciones equivalentes en uno de los dos registros solicitados.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.				

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 3

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes representan fracciones en la recta numérica.	Los estudiantes no son capaces de representar fracciones en la recta numérica.	Los estudiantes representan en la recta numérica por lo menos dos de las cuatro fracciones solicitadas.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes identifican fracciones dada su representación en la recta numérica.	Los estudiantes no identifican fracciones dada su representación en la recta numérica.	Los estudiantes identifican en la recta numérica dos de las tres fracciones solicitadas.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes representan fracciones empleando material manipulable (barras de fracciones).	Los estudiantes no representan fracciones empleando material manipulable (barras de fracciones).	No aplica.	No aplica.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 4

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes realizan conversiones de fracciones propias e impropias de un registro de representación pictórico a uno aritmético.	Los estudiantes no son capaces de realizar conversiones de fracciones propias e impropias de un registro de representación pictórico a uno aritmético.	No aplica.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes realizan tratamientos en una representación pictórica y aritmética para encontrar fracciones equivalentes.	Los estudiantes no son capaces de realizar tratamientos en una representación pictórica o aritmética para encontrar fracciones equivalentes.	Los estudiantes realizan tratamientos al menos en un registro aritmético o pictórico para encontrar fracciones equivalentes.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes emplean material manipulable para representar fracciones dadas en un registro aritmético o pictórico.	Los estudiantes no son capaces de emplear material manipulable para representar fracciones dadas en un registro aritmético o pictórico.	No aplica.	No aplica.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 5

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes emplean material manipulativo para resolver problemas de suma de fracciones con diferente denominador.	Los estudiantes no son capaces de emplear material manipulativo para resolver problemas de suma de fracciones con diferente denominador.	No aplica.	No aplica.
Objetivo 2	Los estudiantes realizan conversiones de un registro pictórico a un aritmético en la resolución de problemas que involucran suma de fracciones con diferente denominador.	Los estudiantes no son capaces de realizar conversiones de un registro pictórico a un aritmético en la resolución de problemas que involucran suma de fracciones con diferente denominador.	Los estudiantes realizan conversiones de un registro pictórico a un aritmético en la resolución de por lo menos dos de los tres problemas que involucran suma de fracciones con diferente denominador.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes emplean tratamientos en un registro pictórico y aritmético en la resolución de problemas que involucran suma de fracciones con diferente denominador.	No aplica	Los estudiantes emplean tratamientos al menos en un registro pictórico o aritmético en la resolución de problemas que involucran suma de fracciones con diferente denominador.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 6

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes resuelven una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones realizando conversiones de un registro verbal a un aritmético.	Los estudiantes no son capaces de realizar conversiones de un registro verbal a un aritmético para resolver una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones.	No aplica.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes emplean material manipulativo para resolver una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones.	Los estudiantes no son capaces de emplear material manipulativo para resolver una situación problemática que involucra suma y resta de fracciones.	No aplica.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes emplean tratamientos en un registro pictórico y aritmético en la resolución de problemas que involucran suma y resta de fracciones.	No aplica.	Los estudiantes emplean tratamientos al menos en un registro pictórico o aritmético en la resolución de problemas que involucran suma y resta de fracciones.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Rúbrica de evaluación de la secuencia didáctica 7

Objetivos	Adecuado	Inadecuado	Parcialmente adecuada	No Respondió
Objetivo 1	Los estudiantes resuelven una situación problemática que involucra fracciones realizando conversiones de un registro verbal a un pictórico.	Los estudiantes no son capaces de resolver una situación problemática que involucra fracciones realizando conversiones de un registro verbal a un pictórico.	Los estudiantes resuelven por lo menos dos de las tres situaciones problemáticas planteadas.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 2	Los estudiantes emplean material manipulativo (contadores de dos colores) para resolver una situación problemática que involucra fracciones.	Los estudiantes no son capaces de emplear material manipulativo (contadores de dos colores) para resolver una situación problemática que involucra fracciones.	No aplica.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.
Objetivo 3	Los estudiantes realizan tratamientos en una un registro de representación pictórico en la resolución de un problema con fracciones.	Los estudiantes no son capaces de realizar tratamientos en una un registro de representación pictórico en la resolución de un problema con fracciones.	Los tratamientos empleados por los estudiantes no conducen a encontrar la solución del problema, sin embargo, son válidos en matemáticas.	El estudiante no proporciona ninguna evidencia de lo solicitado en la consigna.

Fuente: Elaboración propia con base a juicio de expertos.

Anexo 4. Fotos de las secuencias didácticas.





