Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

“Obstáculos epistemológicos; influencia en la comprensión de la ecuación cuadrática”

Tesista

Lic. Marlon Jesús Oliva Romero

Asesor de Tesis

PhD. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, *noviembre de 2019*

Obstáculos epistemológicos; influencia en

la comprensión de la ecuación cuadrática

Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

“Obstáculos epistemológicos; influencia en la comprensión de la ecuación cuadrática”

Tesista

Lic. Marlon Jesús Oliva Romero

Asesor de Tesis

PhD. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, *noviembre de 2019*

AUTORIDADES

Dr. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA**
Rector

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO**
Vicerrector Académico

M.Sc. **NAHUM ALFREDO VALLADARES CARRANZA**
Vicerrector Administrativo

Dra. **ROSARIO BUEZO VELÁZQUEZ.**
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA.**
Vicerrector del CUED

M.Sc. **BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA**.
Secretaria General

Ph.D. **ESTELA ROSINDA ÁLVAREZ MARTÍNEZ**
Directora de Postgrado

Tegucigalpa M.D.C., noviembre de 2019

Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, como requisito para optar al grado académico de máster/magister [1] en Matemática Educativa.

Tegucigalpa M.D.C., noviembre de 2019

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a) presidente(a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a)

Marlon Jesús Oliva Romero
Tesista

Dedicatoria

En memoria de mis abuelos Olga Argentina Mejía Salazar y Oscar Oliva Paz.

Agradecimiento

Agradezco a Dios por haberme permitido escalar un peldaño más en mi vida profesional, por darme la oportunidad de superar cada uno de los obstáculos y dificultades presentes ante el desarrollo de este trabajo de investigación.

A mis padres, por hacer de mí una persona de bien, por enseñarme, prepararme a través de sus sabios consejos para luchar, perseverar por cada una de mis metas propuestas, por su apoyo incondicional ante las adversidades presentes en mi vida, sobre todo por depositar su confianza y fe en mi persona.

A cada uno de los docentes que han contribuido en mi formación profesional, al PhD. Marvin Roberto Mendoza Valencia, por su valioso apoyo como asesor de tesis.

Marlon Oliva

Índice

Índice de figuras

Indice de Tablas

Indice de Gráficas

Glosario

Este apartado se ha diseñado con el fin proveer al lector, todas las herramientas necesarias para la comprensión de este proyecto de investigación, pues en él se muestra una lista o catálogo de palabras que serán definidas, explicadas o comentadas para poder orientar al lector sobre las concepciones en las cuales son empleadas esta lista de palabras.

1. Comprensión: este término es empleado en la parte de análisis con el fin de referir al mismo como la superación de un obstáculo epistemológico, es decir cuando un alumno logre desarrollar un ejercicio sin cometer errores se dice que comprende el objeto de estudio en cuestión.
2. Ingeniería didáctica: esta es la metodología de investigación que rige el proceso de investigación de esta tesis.
3. Obstáculo epistemológico: entiéndase como el conocimiento que posee el estudiante que se muestra correcto en determinada área del conocimiento pero que, al ampliar el dominio del mismo, este deja de ser adecuado provocando un entorpecimiento en el proceso de aprendizaje.
4. Secuencia didáctica: está compuesta por situaciones didácticas que pretende lograr un cambio cognitivo en el alumno y al mismo tiempo identificar sus falencias, debilidades y posibles obstáculos epistemológicos.
5. Situación didáctica: es el producto de la interacción del alumno con el objeto de estudio, es decir, es la metodología que se emplea para que dicha interacción se lleve a cabo.
6. Validación de hipótesis: entiéndase como el proceso de validación interno de la Ingeniería Didáctica mediante el cual se aprueban las situaciones didácticas

(instrumentos) mediante la confrontación del análisis a priori versus el análisis a posteriori.

7. Variables macro didácticas: estas variables se consideran a nivel general, es decir son las que permite o ayudan a controlar el medio ambiente donde se desarrollará la secuencia didáctica, así como los materiales a emplear y la organización del aula etc.
8. Variables micro didácticas: estas son las que permiten controlar las situaciones didácticas de manera más específica, gracias a estas variables podemos comprobar si las situaciones elaboradas permiten alcanzar los objetivos planteados en la secuencia didáctica.

Introducción

Con base en la revisión exhaustiva de trabajados de investigación que giran alrededor de la ecuación cuadrática, la noción de obstáculo epistemológico y los informes de rendimiento académico proporcionados por la Secretaría de Educación, se puede afirmar que la ecuación cuadrática es sin duda alguna uno de los conceptos matemático que trae consigo un mayor grado de dificultad de aprendizaje, estos conflictos son inherentes al propio concepto más otros factores asociados como los obstáculos epistemológicos. El presente trabajo tiene como propósito identificar la influencia de dichos obstáculos epistemológicos en la comprensión de la ecuación cuadrática en los alumnos de noveno grado del Centro De Educación Básica General Francisco Morazán desde la mirada de la Didáctica Fundamental Francesa siguiendo la Teoría de las Situaciones de Guy Brousseau.

Para el desarrollo de esta investigación se ha trabajado con una sección de noveno grado, la cual consta de 20 alumnos en el cuarto parcial del año 2018. Con el objetivo de caracterizar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos. Como resultado de esta investigación, se diseñó una secuencia didáctica siguiendo la metodología de investigación propuesta por Michèle Artigue llamada Ingeniería Didáctica, dicha secuencia didáctica está constituida por cuatro situaciones didácticas que permiten identificar y caracterizar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos, al mismo tiempo permite identificar sus debilidades y fortalezas. La secuencia didáctica fue validada al realizarse la confrontación entre en análisis a priori y a posteriori. En consideración a los hallazgos encontrados en dicha investigación se proponen alternativas para solucionar los problemas detectados y así poder contribuir a la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje en las ecuaciones cuadráticas.

Las matemáticas, han formado parte de nuestra cultura a lo largo del tiempo, tanto social como históricamente, por ende, la sociedad misma debe de ser capaz de apreciarlas y comprenderlas. Con el trascurrir de los años, se ha hecho notoria la necesidad de un dominio más amplio de las ideas y destrezas matemáticas en los distintos ámbitos profesionales presentes en nuestra sociedad que el que se requería hace unos cuantos años. La toma de decisiones demanda comprensión, producción y edición de mensajes de todo tipo; en la información que se maneja en nuestro diario vivir, se observa que cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que ameritan conocimientos matemáticos para poder interpretarlos. Por ello, es necesario estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan.

Después de realizar las lecturas pertinentes sobre el desempeño en matemática en el ámbito nacional, latinoamericano e internacional consultando algunas fuentes como ser: Informe de resultados de las pruebas de fin de años, brindado por la Secretaría de Educación. (Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias TIMSS, realizado en 2015), la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura) en su Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) "Aportes para la enseñanza de la Matemática" en 2016.

En cada uno de los informes antes mencionados se brinda evidencia que nos permite identificar que se cuenta con una gran debilidad en el bloque de álgebra, esto a causa de la falta de comprensión por parte de los estudiantes. Ante lo anterior expuesto y con base en la evidencia empírica de la práctica docente impartida en los salones de clases, se ve reflejada la falta de comprensión por parte de los estudiantes en relación a los contenidos de la clase de matemática. En este mismo orden de ideas se logró identificar que los obstáculos epistemológicos influyen en gran manera en la compresión de los alumnos sobre el objeto de estudio.

La pertinencia de este trabajo de investigación radica en la necesidad de abordar el objeto de estudio desde la mirada de la didáctica fundamental francesa (Teoría de las Situaciones Didácticas) centrada en el obstáculo epistemológico. Por consiguiente, nace la siguiente interrogante. ¿Existen obstáculos epistemológicos en los estudiantes a la hora de resolver problemas que requieren de una ecuación cuadrática? En caso de que estos obstáculos existan ¿Serán superables?, ¿Cómo se pueden superar los obstáculos presentes en los estudiantes?

Este trabajo de tesis se encuentra en la línea de investigación denominada Estudios Disciplinares, debido a que esta, tiene como objeto de estudio aquellos problemas y situaciones relacionadas directamente con las ciencias puras (humanas o naturales), ciencias aplicadas, desarrollo tecnológico, prestación de servicios, innovación y producción; ya sea en sus ámbitos académicos como en los profesionales, en correspondencia con áreas o campos temáticos de interés y especialidad de las diferentes unidades académicas de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) y de sus integrantes como colectivo y en forma individual.

Para la realización de este trabajo de investigación, se acudió al Centro de Educación Básica General Francisco Morazán (CEBGFM). Se contó con la participación de una sección de noveno grado comprendida por 20 estudiantes en el periodo escolar 2018. Se han desarrollado 4 sesiones de trabajo con una duración de 60 minutos cada una, con el fin de obtener la información necesaria para poder dar respuesta a los objetivos planteados.

Este trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo uno se detalla todo el planteamiento del problema, es decir, de dónde nació la idea de dicha investigación, a qué necesidad responde para quiénes se ha elaborado, a quiénes beneficia, el para qué, el por qué, así como los objetivos y la justificación de la ejecución del estudio.

En el segundo capítulo, titulado Marco Teórico, se profundiza sobre las perspectivas teóricas acerca de las cuales está fundamentado este trabajo de investigación, las diferencias entre la noción de obstáculo epistemológico abordado por Bachelard y por Brousseau, así mismo se hace un recorrido histórico sobre el objeto de estudio matemático en investigación.

En el capítulo tres se establece el enfoque de investigación, el tipo de estudio, tipo de diseño, las categorías de análisis, la población, muestra y cada una de las fases para el diseño de la secuencia didáctica (en este capítulo se aborda la fase preliminar y la fase de diseño).

Para el cuarto capítulo se tomó a bien dejar la fase experimental y la fase de validación, debido a que el capítulo cuatro trata de la recolección y análisis de datos, que es lo que las fases mencionadas previamente se encargan de hacer en la metodología de la ingeniería didáctica.

Para finalizar con el capítulo cinco, en él se presentan las conclusiones y recomendaciones que nacen como resultado de este trabajo de investigación, así como el aporte de una secuencia didáctica compuesta por cuatro situaciones didácticas.

Capítulo 1: Construcción del Objeto de Estudio

El siguiente apartado es la base de esta tesis, pues en él se define, estructura y afina de manera formal la idea de investigación. Se parte de lo general a lo particular, es decir se abordará la idea de investigación desdé un aspecto global que incluye datos estadísticos del estado actual del rendimiento académico en matemáticas, luego se presentan los datos estadísticos a nivel nacional haciendo énfasis en el rendimiento del bloque de álgebra en los alumnos del tercer ciclo. Además, se exponen de manera breve las perspectivas teóricas que sirven como fundamento de investigación y cómo estas influyen en el rendimiento académico del estudiante.

1.1. Planteamiento del problema

Históricamente las matemáticas han ocupado un puesto vital en las mallas curriculares; ya sea a nivel medio, superior o universitario. Esto se debe, en medida a su facultad para desarrollar el pensamiento lógico, también sirve para hacer frente a las adversidades diarias de la vida cotidiana, pues estas están presentes en todo lo que nos rodea, e incluso para el aprendizaje de otras asignaturas. Sin embargo, la esencia de las matemáticas no radica en que estén presentes en todo lo que nos rodea, sino que también contribuye al desarrollo del pensamiento analítico, crítico y al razonamiento.

Aun teniendo en cuenta que las matemáticas son esenciales para nuestro diario vivir nos preguntamos. ¿Por qué los estudiantes obtienen un bajo rendimiento en matemática? Y es que basta con echar un vistazo a nuestras estadísticas para poder identificar y darnos cuenta, que el desempeño en matemática a nivel nacional no es precisamente uno de los mejores a nivel latinoamericano. A través de estudios más específicos se ha logrado observar las debilidades presentes en los estudiantes por cada uno de los distintos campos (bloques), donde se evidencia que se cuentan con debilidades en el apartado de álgebra.

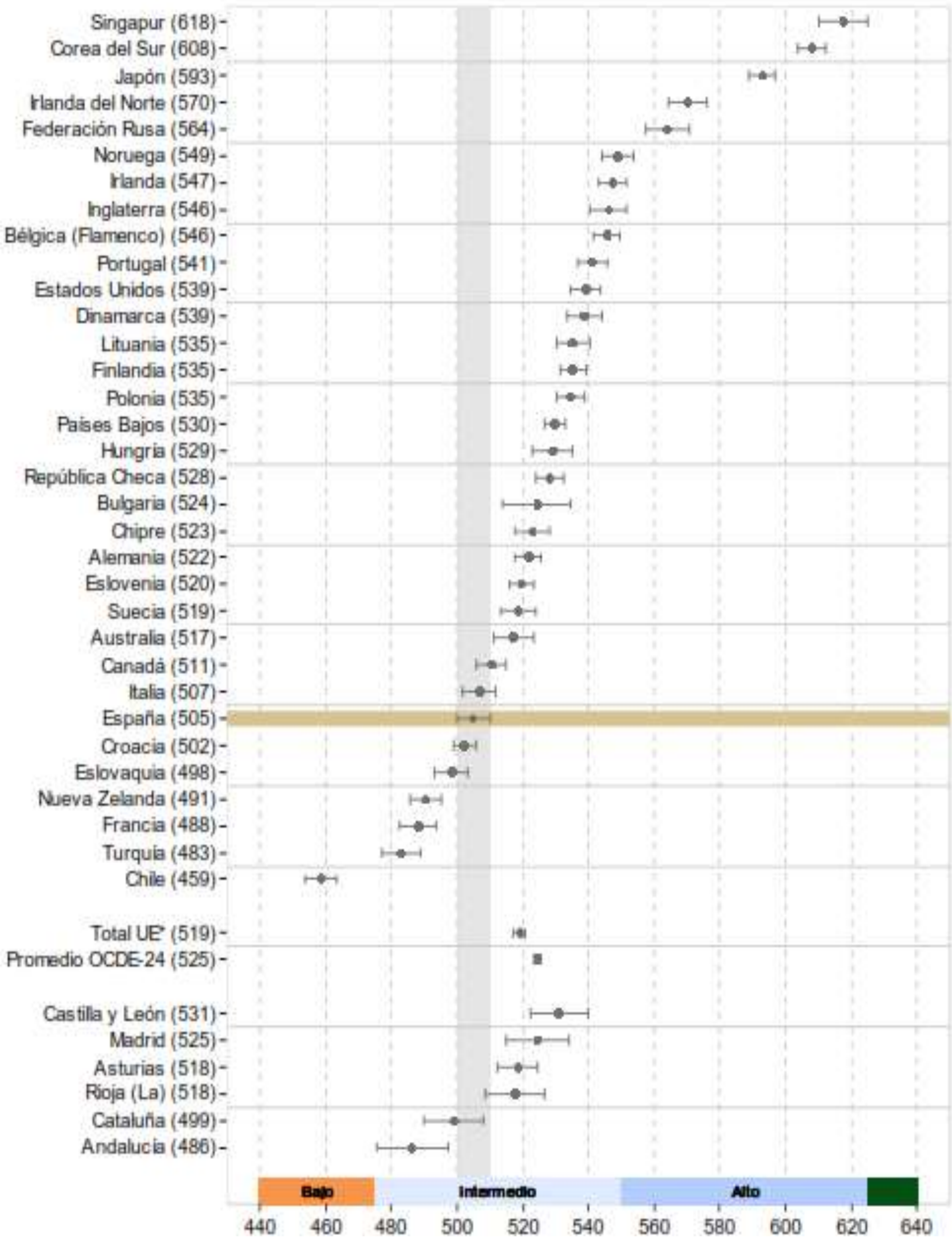
Sin embargo, antes de proceder a brindar información de manera específica, se brinda un panorama más general de manera internacional sobre el rendimiento en matemáticas. Para lo cual se cita a el Ministerio de educación Cultura y Deporte (2016) en su Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (2015) (TIMSS) donde se establecen cinco niveles de rendimiento en cada una de las competencias evaluadas. Estos están delimitados por unos puntos de referencia internacionales fijados en 400, 475, 550 y 625. La distribución de los ítems en los distintos niveles, según su dificultad, permite describir el grado de adquisición de la competencia correspondiente a cada uno de ellos. Los niveles de rendimiento son los siguientes:

Tabla 1 Niveles de rendimiento de matemáticas recogidos en el Marco teórico TIMSS

Niveles de rendimiento	Puntuación
Nivel bajo	De 400 a 475 puntos
Nivel intermedio	De 475 a 550 puntos
Nivel alto	De 550 a 625 puntos
Nivel avanzado	625 puntos o más

Es necesario añadir a estos cuatro niveles un quinto nivel, *muy bajo*, correspondiente a las puntuaciones inferiores a 400 puntos, por debajo de los cuales se entiende que no se ha producido un aprendizaje eficaz.

A continuación, se muestra un gráfico con los resultados obtenidos por cada uno de los países sometidos a evaluación por el Ministerio de educación Cultura y Deporte (2016) en su Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (2015) (TIMSS)



Gráfica 1 Promedios globales en matemáticas (TIMSS) (2015)

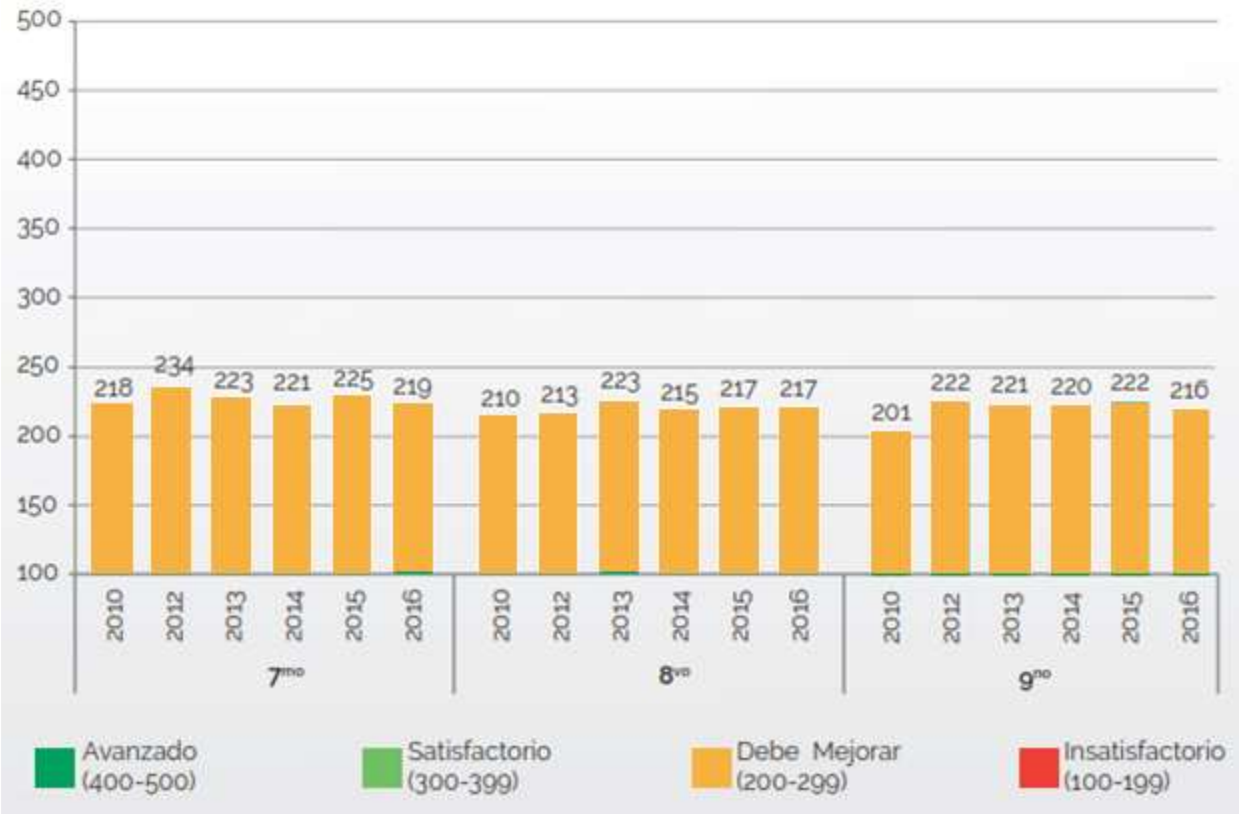
En este mismo orden de ideas en el contexto hondureño, según Secretaría de Educación. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH, (2016) se evaluaron 80,357 estudiantes por niveles de desempeño (insatisfactorio, debe mejorar, satisfactorio y avanzado) y una escala de puntuación estandarizada (100-500) de los cuales 25,584 pertenecen a el tercer ciclo de educación básica. En Matemáticas, en el tercer ciclo, en la escala de puntuación estandarizada, durante el período comprendido 2010-2016, el avance más importante se registra en noveno grado que ascendió 15 puntos. En todos los grados, los estudiantes se ubican en el nivel Debe Mejorar, lo cual se ve reflejado a continuación.

Tabla 2 Detalle de la muestra aleatoria de centros educativos por departamento, indicando el tipo de centro y la cantidad de alumnos evaluados. Secretaría de Educación, MIDE (2016)

No.	Departamentos	1° a 6° grado (Centros)	7° a 9° grado (Centros)	Total (Centros)	1° a 6° grado (Alumnos)	7° a 9° grado (Alumnos)	Total (Alumnos)
1	Atlántida	18	12	30	3,263	1,646	4,909
2	Colón	18	10	28	1,815	666	2,481
3	Comayagua	26	12	38	2,806	1,262	4,068
4	Copán	19	8	27	2,836	605	3,441
5	Cortés	53	46	99	11,017	6,373	17,390
6	Choluteca	31	12	43	2,505	1,523	4,028
7	El Paraíso	29	13	42	3,171	1,728	4,899
8	Francisco Morazán	49	30	79	10,102	5,515	15,617
9	Gracias A Dios	7	4	11	692	215	907
10	Intibucá	21	7	28	1,447	468	1,915
11	Islas de la Bahía	3	3	6	244	117	361
12	La Paz	17	7	24	1,256	781	2,037
13	Lempira	27	9	36	2,193	581	2,774
14	Ocotepeque	7	4	11	786	202	988
15	Olancho	31	16	47	2,260	809	3,069
16	Santa Bárbara	27	13	40	2,962	1,120	4,082
17	Valle	11	6	17	1,319	415	1,734
18	Yoro	30	13	43	4,099	1,558	5,657
Total		424	225	649	54,773	25,584	80,357

Tabla 3 Correspondencia entre nivel de desempeño ***y Escala de Puntuación Estandarizada*** *Secretaría de Educación, MIDE (2016)*

Nivel de Desempeño	Escala de 100 a 500
Insatisfactorio:	100 – 199
Debe Mejorar:	200 – 299
Satisfactorio:	300 – 399
Avanzado:	400 – 500



Gráfica 2 Escala de puntuación estandarizada (100 a 500). Matemáticas, 7° a 9° grado. 2010 a 2016

Por otro lado, es necesario buscar las causas o factores por las cuales se están presentando estos resultados en el rendimiento académico y específicamente en matemáticas, existen diversas causas o factores que inciden en el rendimiento académico. Sin embargo, en este trabajo de investigación se enfoca en tratar los factores cognitivos, es decir, en la manera como el alumno percibe e interpreta el saber matemático. Este estudio se llevó a cabo bajo la perspectiva teórica de la Didáctica Fundamental Francesa centrada en el “obstáculo epistemológico”.

Entiéndase por obstáculo epistemológico a todo conocimiento funcional dentro de un dominio determinado, pero que al extrapolarlo comienza a convertirse en un conocimiento disfuncional, pues no permite al estudiante plantear las estrategias de resolución adecuadas para solventar la problemática planteada. Mas específicamente se puede hacer referencia a lo que sucede cuando el alumno sabe encontrar la raíz cuadrada de un número natural, las estrategias que posee son correctas en el dominio de los números naturales, pero, ¿qué sucede si se amplía el conjunto numérico? ¿será posible encontrar todas las raíces cuadradas de los números enteros con las estrategias aprendidas para encontrar las raíces cuadradas de los números naturales?

A lo expuesto anteriormente es a lo que se le conoce como obstáculo epistemológico y se enfatizará en indagar en qué medida estos influyen en la comprensión del objeto matemático y por ende en el rendimiento académico de los estudiantes. Para Bachelard (2000) los obstáculos epistemológicos son el “acto mismo de conocer; donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discernimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos” (p. 15)

Por otro lado, Brousseau conceptualiza obstáculos epistemológicos como “un conocimiento, en el sentido de que se le dio un camino para tratar un conjunto de situaciones. Este conocimiento da resultados correctos o benéficos apreciables en un cierto dominio, pero se revela incorrecto o totalmente inapropiado en un área nueva o más grande” (p. 18)

Otro ejemplo muy claro es cuando se enseña la sustracción con números naturales, al estudiante; en este punto se le dice que no puede realizar una resta, si el sustraendo en mayor que el minuendo, sin embargo, al estudiar los números enteros al estudiante se le demuestra que es posible realizar una resta si el sustraendo en mayor que el minuendo. Es aquí donde el conocimiento anterior se vuelve un obstáculo epistemológico para adquirir un nuevo conocimiento en el ámbito de los números enteros. De esta forma el conocimiento funcional en un contexto es disfuncional dentro de otro más amplio, en el cual se torna un obstáculo epistemológico.

Debido a lo antes expuesto y a evidencia empírica de la práctica docente impartida en los salones de clases, se ve reflejada la falta de comprensión por parte de los estudiantes en relación a los contenidos de la clase de matemática. Con base en los estudios realizados por Rodríguez (2008) en su escrito titulado "El desarrollo científico: una lucha entre las cegueras del conocimiento y los obstáculos epistemológicos" así como Naranjo y Moran (2011) en su trabajo titulado "Los Obstáculos Epistemológicos en el Proceso de Aprendizaje del Límite de Funciones Matemáticas" y Cid (2016) en su trabajo titulado "Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos", donde se estudió sobre obstáculos epistemológico y su influencia en la comprensión de objeto de estudio, se identifica que los obstáculos epistemológicos influyen en gran medida sobre la misma.

Es ahí donde se hace énfasis en esta tesis, pues se necesita abordar los obstáculos epistemológicos presentes en los estudiantes a la hora de resolver problemas que requieran de una ecuación cuadrática en una variable.

La pertinencia de este trabajo de investigación radica en la necesidad de abordar el objeto de estudio desde la mirada de la didáctica fundamental francesa (Teoría de las Situaciones Didácticas) centrada en el obstáculo epistemológico, pues de las diversas investigaciones realizadas y mencionadas anteriormente aún no se ha encontrado ninguna que aborde esta relación. Ante lo anterior expuesto nace la siguiente interrogante. ¿Existen obstáculos epistemológicos en los alumnos del noveno grado de la escuela general Francisco Morazán a la hora de resolver problemas que requieren de una ecuación cuadrática? En caso de que estos obstáculos existan ¿Serán superables?, ¿Cómo se pueden superar los obstáculos presentes en los alumnos?

1.2. Objetivos

Este trabajo de investigación se realiza con estudiantes de noveno grado, del Centro de Educación Básica General Francisco Morazán del departamento de Valle, municipio de Nacaome, en el cuarto parcial del año 2018, donde se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

1.2.1. Objetivo General

1.2.1.1. Caracterizar los obstáculos epistemológicos que enfrentan los estudiantes de educación básica para comprender situaciones que involucren una ecuación cuadrática.

1.2.2 Objetivos Específicos

1.2.1.2. Determinar los conocimientos previos en temas relacionados con la ecuación cuadrática.

1.2.1.3. Diseñar situaciones didácticas que requieran de una ecuación cuadrática.

1.2.1.4. Analizar los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes en la comprensión de la resolución de la ecuación cuadrática.

1.2.1.5. Validar los resultados obtenidos a través de las situaciones didácticas.

1.3. Preguntas de investigación

1.3.1. ¿Cuáles son los conocimientos previos relacionados con la ecuación cuadrática que poseen los alumnos de noveno grado?

1.3.2. ¿Con qué habilidades cuentan los estudiantes de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?

1.3.3. ¿Cuáles son los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?

1.3.4. ¿Cómo se interpretan los resultados obtenidos de la implementación de la situación didáctica en los alumnos de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?

1.4. Justificación

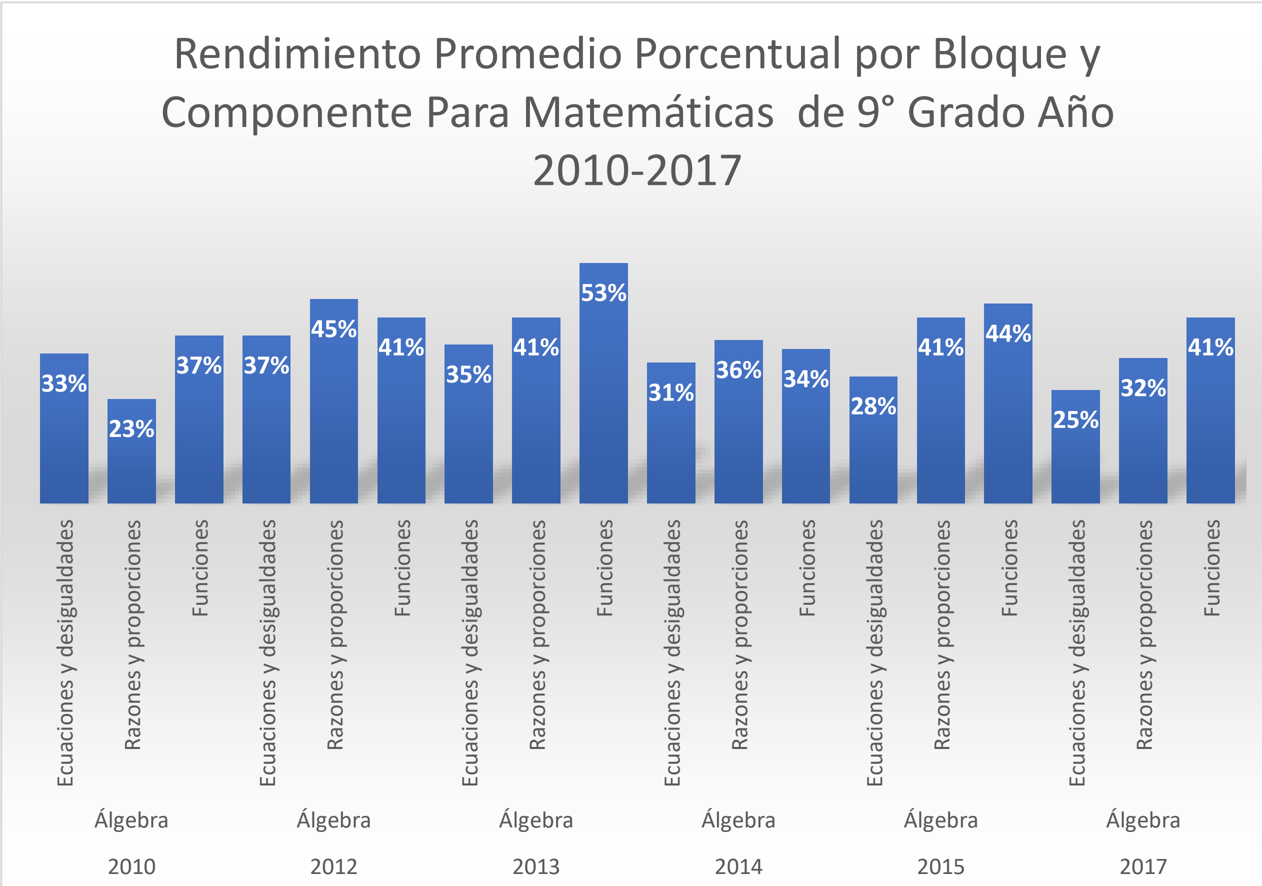
La historia de las matemáticas y la enseñanza de las mismas (didáctica de las matemáticas) están estrechamente relacionadas, esto debido a que su conocimiento facilita al alumno y al profesor poder apreciar las matemáticas como una actividad que está integrada en su cultura de una manera versátil de acuerdo con las necesidades y creencias de cada momento. Lo anterior expuesto se ve reflejado en el trabajo de Llobet y Piquet (2005) titulado “Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas”, donde expone de manera breve el recorrido histórico del cálculo de la raíz cuadrada, así como los obstáculos presentes en el cálculo y aproximación de la misma, además manifiesta que el algoritmo implementado está siendo reemplazado por la calculadora lo que dificulta que el estudiante pueda comprender el concepto de la misma.

En ese mismo sentido según Malisani (1999) en el desarrollo histórico del lenguaje algebraico, se evidencia con frecuencia que los matemáticos manifiestan ciertas ambigüedades para operar en determinadas situaciones con nuevos objetos abstractos, por ejemplo: por un lado, se observa la falta de aceptación de los números negativos como coeficientes o raíces de las ecuaciones, por el otro, si esos números son necesarios para completar el proceso de resolución de un problema entonces vienen utilizados en esta función. Desde el punto de vista de la investigación histórico-epistemológica, sería interesante estudiar si estas ambigüedades operativas se manifiestan debido a obstáculos epistemológicos que representan los números negativos.

Con base en lo anterior expuesto y en algunas investigaciones proporcionadas por la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas en autoría de Cornu (1983), Sierpinska (1985) han demostrado que ciertas dificultades de los alumnos se pueden encontrar entre los obstáculos detectados en la historia. Más precisamente, los elementos que permiten identificar estos obstáculos se deben buscar en el análisis de las resistencias que surgieron en el desarrollo histórico y en los debates que les han permitido superarlas.

Por lo anterior expuesto y con base en los escritos de (Gairín y Escolano, 2009) y (Gómez, 2006) se puede a firma que, en la actualidad se introduce en los centros educativos el álgebra a muy temprana edad, lo cual dificulta el aprendizaje de la misma, ya que el manejo aritmético de los estudiantes no es suficiente. La aritmética nos es solamente la aplicación de algoritmos, sino que también abarca el manejo significativo de las magnitudes y las operaciones con ella. La proporcionalidad, que sería un buen banco de pruebas en el que poner en juego todos estos conocimientos, se convierte a menudo en una aplicación mecánica de la regla de tres con la que es muy fácil caer en tentación de introducir una incógnita y adelantar la entrada en escena del álgebra según manifiestan

De igual forma, la Secretaría de Educación en sus informes nacionales de desempeño en Español y Matemáticas (S.E. 2010-2017) proporciona información que reflejan las debilidades existentes en los estudiantes. Tal y como se describe en la gráfica 2, se evidencia de manera general que es necesario elaborar o diseñar nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje que permitan elevar los niveles de desempeño. A continuación, se muestra una gráfica en la cual se brinda el rendimiento promedio porcentual por bloque y componente para matemáticas de noveno grado que permitirá obtener un mejor panorama y así poder enfocar el objeto de estudio de este trabajo de investigación.



Gráfica 3 Rendimiento Promedio Porcentual Por Bloque y Componente Para Matemáticas de 9° Grado.

Fuente: Elaboración propia con base en los informes nacionales de desempeño académico en español y matemática S.E. (2010-2017)

Con base en el gráfico ilustrado anteriormente se observa que es necesario efectuar reformas en las estrategias de enseñanza-aprendizaje implementadas para abordar la temática pertinente al bloque de álgebra y específicamente en el componente de ecuaciones y desigualdades. Es debido a este déficit, que se desarrollará esta investigación en el Centro de Educación Básica General Francisco Morazán ubicado en el departamento de Valle, Municipio de Nacaome, donde se cuenta con 40 estudiantes de noveno grado. Con el fin que contribuir a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de la aplicación de secuencias didácticas que permitan establecer caminos para poder:

1. Encontrar los errores recurrentes y mostrar que ellos se agrupan alrededor de concepciones.
2. Encontrar los obstáculos en la historia de las matemáticas
3. Confrontar los obstáculos históricos con los obstáculos de aprendizaje y establecer su carácter epistemológico (Alarcón, 2005, p.69).

Y que estos a su vez permitan franquear los obstáculos epistemológicos presentes en los estudiantes del noveno grado.

En el marco de las observaciones realizadas para poder llevar a cabo lo antes mencionado será necesario abordar el objeto de estudio desde la perspectiva teoría de la didáctica fundamental francesa centrada en el obstáculo epistemológico, esto con el fin de implementar nuevas estrategias de enseñanza aprendizaje tal y como lo demuestra (Ávila, Parra y Ávila 2012) en su trabajo titulado "Epistemología y Didáctica de la Matemática" donde concluye que : Un constructo teórico, especialmente útil para la Didáctica, es el de obstáculo epistemológico que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

Además, se cuenta con el trabajo (Cid, 2016) en su investigación que lleva por nombre "Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos", quien manifiesta que: las propuestas de enseñanza de los números negativos basadas en modelos concretos, aun cuando pueden ser adecuadas para franquear el primer obstáculo refuerzan a cambio el segundo obstáculo epistemológico, precisamente, aquel que fue necesario superar para construir el concepto actual de número negativo.

En razón de lo antes expuesto, la estrategia que se diseña con este trabajo de tesis pretende identificar los obstáculos epistemológicos presentes en los estudiantes a la hora de resolver problemas que requieran de la solución de ecuaciones cuadráticas. De este modo resultará más sencillo identificar las herramientas o estrategias didácticas (secuencias didácticas) pertinentes para combatir estos obstáculos epistemológicos presente en los alumnos, por ende, obteniendo mejores resultados en el proceso enseñanza-aprendizaje y el rendimiento académico.

Este proyecto de investigación pretende beneficiar directamente a los 40 estudiantes de noveno grado y a los docentes del Centro de Educación Básica General Francisco Morazán, ubicado en el departamento de Valle, municipio de Nacaome, específicamente en el barrio El Centro donde se desarrolló esta investigación e indirectamente a todo docente interesado en contribuir a la mejora de la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general que pretenden identificar los posibles obstáculos epistemológicos presentes en sus alumnos.

Capítulo 2: Marco Teórico

El marco teórico que se desarrolla continuación, permite conocer los conceptos básicos necesarios para poder de comprender manera clara el desarrollo de este proceso de investigación. Primero se partirá de la teoría que abrió paso a esta investigación (la Didáctica Fundamental Francesa) haciendo un pequeño recorrido histórico de todas las corrientes teóricas que se albergan en ella. En segundo lugar, se explica de manera breve la Teoría de las Situaciones Didácticas creada por Guy Brousseau y cada una de las situaciones que integran la misma.

En ese mismo orden, en tercer lugar, se aborda a la Ingeniería Didáctica elaborada por Michèle Artigue donde se elabora un breve resumen de cada una de las fases que componen esta teoría, cabe mencionar que la ingeniería didáctica también se puede implementar como metodología de investigación. En el cuarto lugar, se expone la noción de obstáculo epistemológico, tanto de Gastón Bachelard, como de Guy Brousseau y al final se establecen las diferencias entre cada uno de ellos.

Para finalizar se realiza un recorrido histórico sobre la ecuación cuadrática, donde se exponen a sus máximos exponentes y también las civilizaciones que se destacaron dentro del área del álgebra.

2.1 Didáctica fundamental francesa

En el contexto histórico de la didáctica de la matemática se ven reflejadas tres etapas que han marcado cambios de vital importancia en el proceso evolutivo de la misma, la etapa pre científica, la didáctica clásica y la didáctica fundamental. La etapa pre científica se caracteriza porque en ella se considera a la enseñanza como un arte o un don, es decir, es algo con lo que se nace. Una habilidad nata del docente para transmitir el conocimiento matemático que posee de una manera clara y precisa permitiendo así que su receptor (alumno) adquiera los conocimientos de matemáticas que se le pretenden trasmitir.

En razón de lo antes expuesto, Gascón (1998) manifiesta que en la etapa pre científica “se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista” (p.2), caracterizando a ésta como un arte difícil de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Aún con el pasar de los años se conserva esta idea en nuestro ámbito escolar representando una concepción precientífica de la enseñanza que continúa desempeñando un papel muy significativo en nuestro ámbito escolar.

Por consiguiente, se dio lugar a la etapa clásica, donde el enseñar matemática dejó de ser exclusivamente para aquellos que poseían el don de transmitir estos conocimientos matemáticos, a una etapa donde se establece como objeto de estudio la relación que existe entre quien enseña y aprende. De esta manera pasó a ser considerada como una ciencia de la educación, priorizando en los estudios de los métodos de comunicación, el conocimiento del docente, el cómo se aprende. En este punto, la visión de enseñanza pasa a adquirir una concepción del aprendizaje como un proceso psico-cognitivo influenciado por factores sociales.

En la didáctica clásica, se puede distinguir dos enfoques:

a) Un primer enfoque, centrado en el pensamiento del alumno, bajo la influencia de los trabajos de David Ausubel en 1968 sobre “el aprendizaje significativo” que, poco a poco llevaron a pensar en el “aprendizaje específicamente matemático”, donde el objetivo básico es el conocimiento matemático del alumno y su evolución.

b) Un segundo enfoque, centrado en el pensamiento del profesor y su formación profesional docente, de cómo influye sus preconceptos y errores conceptuales en el aprendizaje de los alumnos. Se sigue considerando a la didáctica de la matemática como un saber técnico, pero ahora fundamentada por la psicología educativa, la historia de la matemática, la epistemología de la matemática, la pedagogía y la sociología. (Contreras, 2012, p.22).

En este mismo orden de ideas la didáctica fundamental francesa nace, cuando el Francés Guy Brousseau hace sus primeros escritos de su famosa Teoría de las Situaciones en los años 70. En esta teoría se plasma por primera vez una relación entre la didáctica y la matemática, es decir, se comienza a enfocar en la construcción de un modelo didáctico explícitamente matemático. Brousseau se enfoca en definir un conocimiento matemático mediante la interacción (situación) que le permita al individuo construir su conocimiento generando situaciones que a su vez producen situaciones a-didácticas que permiten desarrollar una representación del conocimiento.

Cabe destacar que en la didáctica juegan un papel vital el profesor, el alumno y el saber matemático, en la cual, la Teoría de las Situaciones enfatiza en la relación didáctica alumno-profesor. Asimismo, la Teoría de las Situaciones ha servido como pilar fundamental para la didáctica de la matemática moderna, es decir, gracias a la Teoría de las Situaciones han surgido nuevas teorías sobre didáctica de la matemática como ser: la ingeniería didáctica de Regine Douady y Michèle Artigue, la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vernaug, la teoría de la transposición didáctica de Yves Chevallard entre otras.

Como se mencionó anteriormente, si en la Didáctica de la Matemática se estudia la relación profesor-alumno, se da origen a la Teoría de las Situaciones de Brousseau, sin embargo, con el pasar de los años han surgido nuevas y diversas teorías didácticas, fundamentadas en la Teoría de las Situaciones. Una de estas teorías es la ingeniería de la didáctica de Regine Douady y Michèle Artigue, para lo cual se cita textualmente a sus creadores con el fin de dar una definición de su teoría.

> "Esta metodología de la Ingeniería Didáctica se basa en un control a *priori* de las situaciones que se ponen en juego dentro del proceso experimental. Este control se efectúa a través de un análisis a *priori* que busca precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores. En seguida, en el análisis *a posteriori*, este análisis *a priori* se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado" (Artigue, Douady, y Moreno, 1995, p.12).

En este mismo orden de ideas, cuando se enfatiza en la relación didáctica saber-profesor, se abre paso a la teoría de la transposición didáctica donde su creador Yves Chevallard proporciona cuatro definiciones de las cuales se ha seleccionado el número tres para efectos de esta investigación.

> "un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica" (Chevallard, 1998, p.16).

Si se observa el saber matemático como un producto de ciertas particularidades ya que: surge en condiciones históricas particulares, se enmarca en elementos epistemológicos particulares y se instaura como respuesta a problemas específicos. Todos estos factores antes mencionados no pueden ser integrados en la didáctica, es por esta razón, que el saber matemático sufre cambios y transformaciones que permitan su incorporación de una manera más amena y agradable en el ámbito escolar. Este proceso de selección, reconstrucción y adaptación del saber matemático para ser enseñado en el ámbito escolar es en esencia la transposición didáctica.

Por otro lado, si la relación a estudiar es el saber-alumno se abre paso a la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud, director de investigación del Centro Nacional de investigación Científica (CNRS), discípulo de Piaget. La teoría de los campos conceptuales es para Vergnaud (1990) una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas (p.1) Vergnaud reconoce igualmente que su teoría de los campos conceptuales fue desarrollada también a partir del legado de Vygotsky. Eso se percibe, por ejemplo, en la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos.

En el siguiente gráfico, se muestra un resumen del estado actual de la didáctica de la matemática.

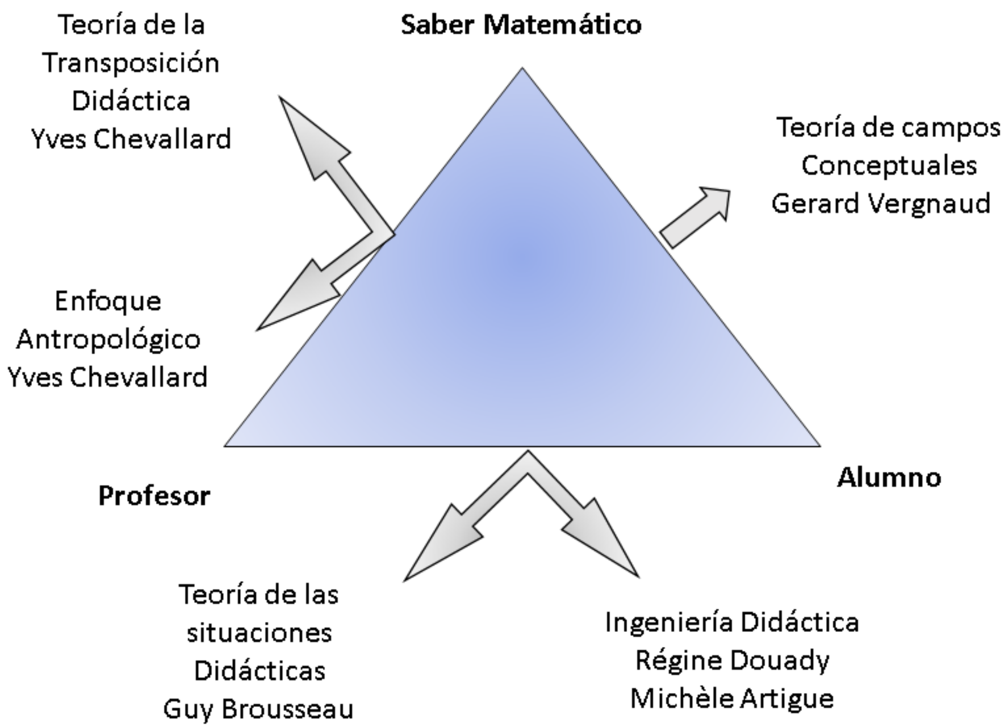


Figura 1 Estado actual de la didáctica fundamental de la matemática.

Fuente: propio con base en Contreras (2012)

2.2 Teoría de las Situaciones

La Teoría de las Situaciones nace en Francia cuando Guy Brousseau hace sus primeras formulaciones sobre la misma, sin embargo, no fue sino hasta los 80 que sus escritos comenzaron a difundirse. Aunque Brousseau tomó ideas inicialmente de Piaget, sobre la construcción del conocimiento, manifestó su desacuerdo a través de la Teoría de las Situaciones donde propuso otro enfoque: “el de una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden” (Brousseau, 2007).

En la Teoría de las Situaciones Brousseau establece tres tipos de situaciones: *situación didáctica, situación a-didáctica y la situación fundamental*. Antes de proceder a describir cada uno de los tipos de situaciones se definirá, según Brousseau lo que es una “situación” quien nos brinda dos definiciones:

a) Una "situación" es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado.
b) Un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta.

2.2.1 Situación a-didáctica

Situación a-didáctica: esta situación se caracteriza por la abstinencia del docente ante solución de los problemas establecidos de manera sensata a sus alumnos. El docente debe realizar las adaptaciones pertinentes sobre los problemas seleccionados de modo tal, que el alumno acepte el problema como suyo, deben lograr por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Durante todo este proceso el docente se rehúsa a involucrarse en la calidad de los conocimientos que quiere ver aparecer (Brousseau, 2007)

A manera de ejemplo se presenta el trabajo de Acosta, Monroy, y Rueda (2010) titulado Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio, en donde se presenta la primera actividad de una Ingeniería Didáctica que utilizó la Teoría de las Situaciones Didácticas para la creación y experimentación de situaciones a-didácticas empleando Cabri. El análisis a priori y a posteriori de la actividad presentada permite concluir que la interacción con el medio condujo a que los alumnos construyeran conocimientos intuitivos relativos a la simetría axial.

2.2.2 Situación didáctica

Situación didáctica: esta se caracteriza por la intervención directa del docente. Son situaciones a-didácticas preparadas con fines didácticos que permiten determinar el conocimiento enseñado en un momento dado. "Esa situación o ese problema elegido por el docente lo involucra a él mismo en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Este juego más amplio es la *situación didáctica"* (Brousseau, 2000)

"El término de "situación didáctica" tiene hoy dos significados:

- En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar (como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto.
- Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no." (Brousseau, 2000, p. 20-21)

A manera de ejemplo se hace referencia al trabajo de Briceño y Sánchez (2017) que lleva por título Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria, donde se reporta el resultado de la aplicación de una situación didáctica con estudiantes de secundaria para analizar cómo comprenden la noción de semejanza con el uso de material didáctico. La situación se fundamentó en la teoría de situaciones didácticas con actividades de construcción de figuras geométricas con el uso del tangram como material de uso didáctico. El objetivo es que los estudiantes generen una representación geométrica de semejanza y conjeturen la idea de razón. Los resultados muestran estrategias con el uso del material para generar explicaciones sobre la noción de semejanza.

2.2.2.1 Clasificación de las situaciones didácticas

En este apartado se caracterizarán cada una de las clasificaciones de las situaciones didácticas establecidas en la Teoría de las Situaciones, de una manera breve y precisa.

2.2.2.1.1 Situación de acción.

La situación acción es aquella relación que se establece entre el alumno y el medio (material o simbólico). La situación requiere de la puesta en acto de los conocimientos implícitos por parte del alumno, abordando el problema de manera individual tomando las decisiones pertinentes para organizar su actividad de la resolución del problema planteado.

> Para un sujeto, "actuar" consiste en elegir directamente los estados del *medio* antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras (Brousseau, 2007).

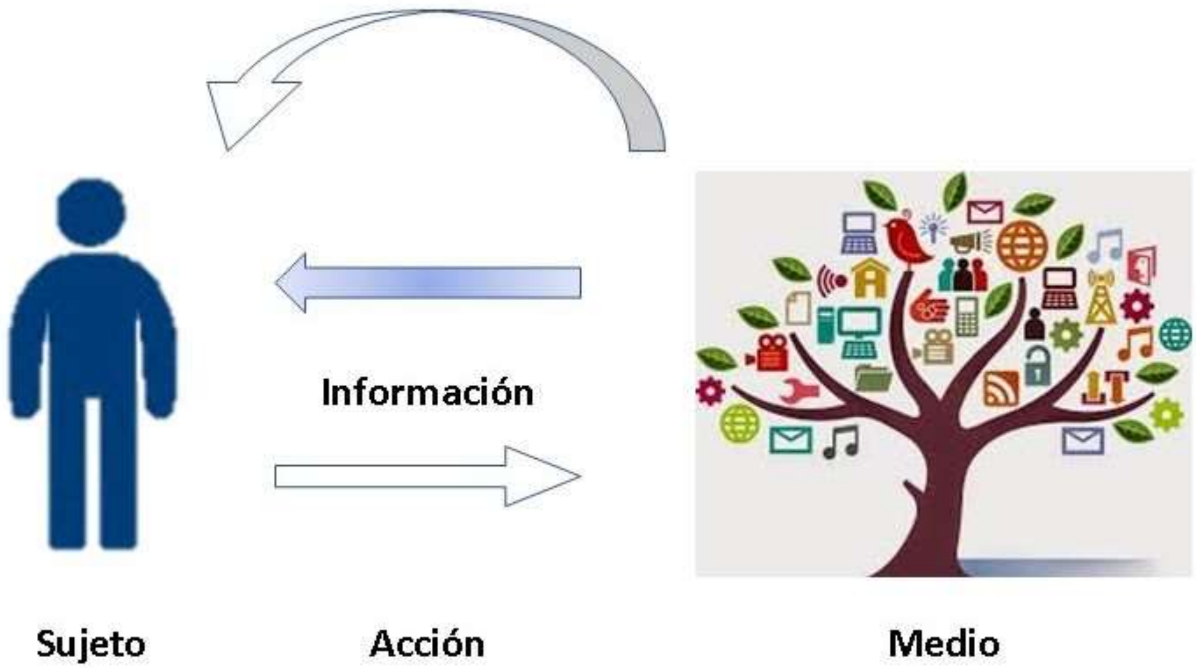


Figura 2 Esquema general de una situación acción.

Fuente: propio con base en Brousseau, (2007)

2.2.2.1.2 Situación de formulación

Situación formulación: se presenta ante dos alumnos o más. El emisor debe formular un mensaje destinado a otro (el receptor) que debe comprender el mensaje y actuar sobre el medio (material o simbólico) con base en la información contenida en el mensaje. La base fundamental de esta situación radica en la comunicación de información entre alumnos, es decir, el alumno debe modificar el lenguaje que utiliza habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las comunicaciones que se deben transmitir.

La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información. (Brousseau, 2007).

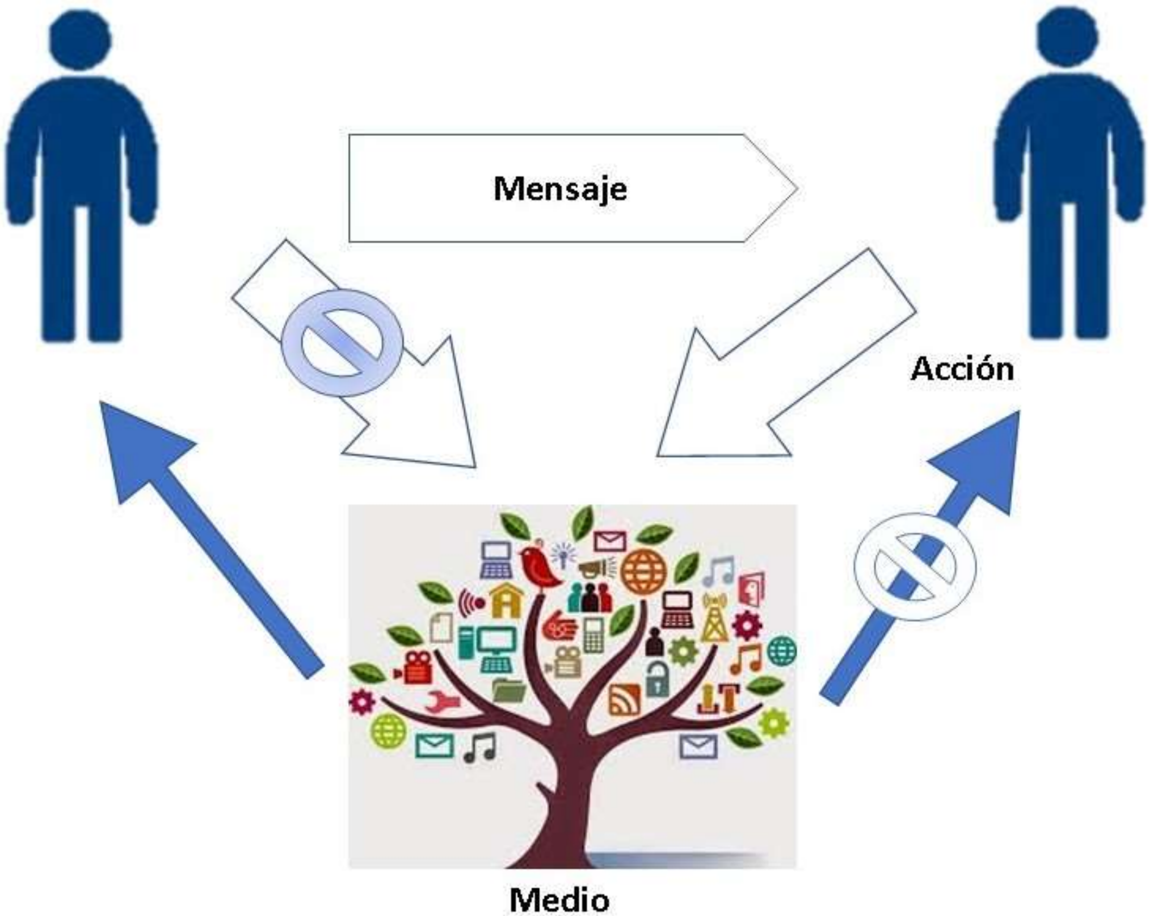


Figura 3 Esquema de una situación de formulación

Fuente: propio con base en Brousseau, (2007)

2.2.2.1.3 Situación validación

La situación de validación se lleva a cabo entre dos o más alumnos los cuales deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. En esta situación el emisor ya no es un informante sino un proponente y el receptor un oponente. Las afirmaciones propuestas por cada equipo (proponente) son sometidas a consideración del otro equipo quien debe tener potestad de aceptar, rechazar e incluso pedir pruebas de la información que se le es propuesta. “Cada uno puede tomar posición con respecto a un enunciado y, si hay desacuerdo, pedir una demostración o exigir que el otro aplique sus declaraciones en la acción con el medio” (Brousseau, 2007).

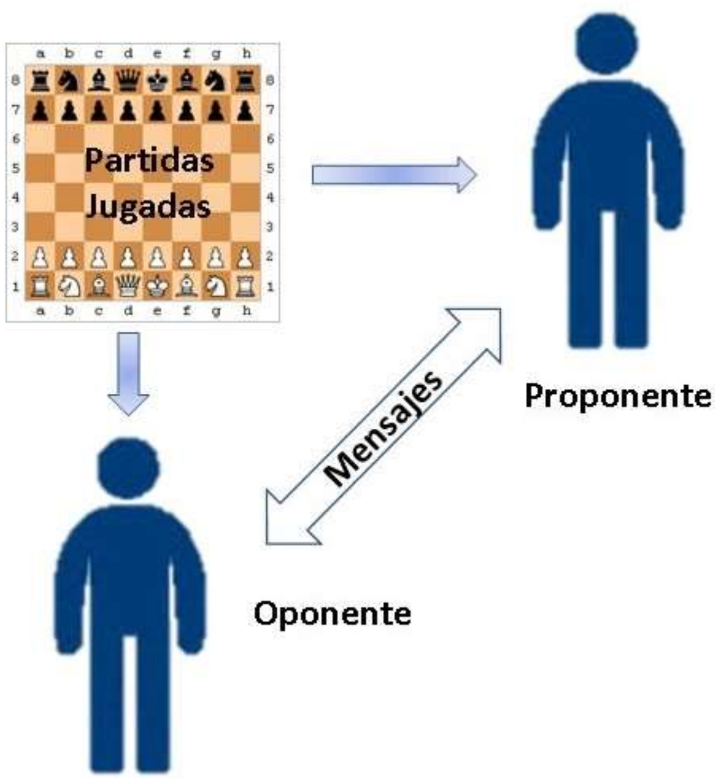


Figura 4 Esquema de una situación de validación

Fuente: propio con base en Brousseau, (2007)

2.2.3 Situación de Institucionalización.

Situación de Institucionalización: Esta situación nace como respuesta a la necesidad de los docentes de tener en cuenta fases de institucionalización que dieran a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. Es decir, en este diseño se toman en cuenta la cantidad de “aprendizaje” que el alumno debe adquirir. Permitiendo de esta manera optimizar el aprendizaje del alumno propiciando la temática idónea para poder incorporarse a su ámbito cultural.

> “Del mismo modo que los teoremas en acto desaparecían rápidamente ante la ausencia de una formulaci6n y una prueba, los conocimientos privados e incluso los públicos permanecerían contextualizados y tenderían a desaparecer en la marea de recuerdos cotidianos si no se los reubicara dentro de un repertorio especial cuya importancia y uso no fueran confirmados por la cultura y la sociedad” (Brousseau, 2007, p. 28)

2.2.4 Situación fundamental

Situación fundamental: esta se caracteriza por tener implícitos a la situación didáctica y a la a-didáctica, ya que esta, es un conjunto mínimo de situaciones a-didácticas que permiten engendrar a través de la asignación de diversos valores a las variables didácticas, un campo de problemas suficientemente extenso para representar todas las situaciones didácticas a partir de las cuales se logra que el alumno aprenda. Cabe mencionar que una situación fundamental no es a priori una situación ideal para la enseñanza, ni siquiera una solución más eficaz (Brousseau, 2007).

2.3 Ingeniería didáctica.

La Ingeniería Didáctica tiene sus bases en la didáctica fundamental francesa (Teoría de las Situaciones) a principios de la década de los 80. Este término fue empleado por analogía a su forma del trabajo didáctico de un ingeniero, según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) afirman que:

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (p.33).

En esta razón cabe mencionar, que la Ingeniería Didáctica tiene una doble funcionalidad en la didáctica de las matemáticas, ya que esta se puede emplear como una metodología de investigación y también como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. En esta investigación se emplea la Ingeniería Didáctica, como una metodología de investigación. Por lo cual, en este apartado se profundizará en la Ingeniería Didáctica como una metodología de investigación.

A continuación, se presentan algunas características de la Ingeniería Didáctica como metodología

> “Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y

análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación" (Artigue et al., 1995, p.36)

En el mismo orden de ideas y como segundo lugar, la Ingeniería Didáctica también se caracteriza por diferenciar de otros tipos de investigación basado en experimentación en clase, en el registro de los estudios de caso y por las formas de validación a las que está asociada, estos últimos esencialmente internos, teniendo en cuenta la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Con base en lo anterior expuesto en el primero caso se ha logrado identificar don niveles de Ingeniería Didáctica, en las cuales su elección dependerá de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. A continuación, se detallan los niveles antes mencionados.

- *Nivel de micro ingeniería*: Las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula.
- *Nivel de macro ingeniería*: Son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Los dos niveles de investigación son importantes y se complementan. Las investigaciones de micro ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las investigaciones de macro ingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales, son indispensables (Campos, 2006).

2.3.1 Fases de la ingeniería didáctica.

Fase preliminar (fase de planeación): Tiene como objetivo identificar, describir y prevenir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis preliminares están constituidos por un conjunto de estudios en relación al objeto matemático: la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va situar la realización didáctica efectiva teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

Para Artigue et al. (1995) el análisis de esta fase es necesario hacerlo bajo tres dimensiones:

- *Epistemológica:* Aquí se analizá las características del saber en juego, una reseña histórica y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio.
- *Cognitiva*: Aquí se analizan las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Se examinará la forma como los alumnos interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.
- *Didáctica*: Aquí se analizan las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Se analizará la forma cómo se desarrolla el proceso de enseñanza del objeto matemático, así como los recursos didácticos (libros, guías, etc.) que utilizan los profesores donde se está realizando el estudio.

Fase de concepción y análisis a priori (fase de diseño)*:* con base en la información recabada en la fase preliminar, se establecen las variables didácticas que se consideran pertinentes en el tema de investigación, así como la forma en que serán controladas y manipuladas. Artigue et al. (1995), establece dos tipos de variables: Variables Macro didácticas o globales; Asociadas a la organización global de la ingeniería y las Variables Micro didácticas o locales: Asociadas a la organización de una secuencia. En esta fase se pretende prever que la elección de variables sea la apropiada ya que estas deben permitir controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado, los cuales serán validados en la cuarta fase.

Ante lo anterior expuesto cabe resaltar que el análisis a priori está conformado por una etapa descriptiva y otra predictiva, las cuales incluyen las siguientes acciones: Describir las variables micro didácticas y las características de la situación didáctica. Analizar qué podría estar en juego, en términos de las posibilidades de acción, formulación y validación que el alumno tendrá durante la situación. Prever los posibles comportamientos de los estudiantes, en términos de respuestas y/o dificultades que presentará el estudiante durante la situación. Es decir, en esta fase se intenta predecir el comportamiento y la forma de conducirse de los alumnos al enfrentarse a la situación diseñada. Luego de determinar las variables didácticas, y teniendo claro el objetivo, se diseña una situación didáctica que sea capaz de crear un medio adecuado para que el alumno pueda actuar y se sienta desafiado a apropiarse del saber matemático que se desea.

Fase de experimentación (fase experimental)*:* en esta fase se procede a la aplicación de las situaciones didácticas previamente elaboradas, , con el fin de recolectar la información obtenida en las fases anteriores, pero esta vez utilizando a la observación como herramienta, es decir, se recogerá la información de la ejecución de las situaciones didácticas implementadas en el salón de clases.

Fase de análisis a posteriori y validación (fase de validación): en esta fase se realiza un análisis de la información obtenida en la fase de experimentación a través de las situaciones didácticas implementadas. Con el fin de validar las hipótesis formuladas en la investigación. Se realiza una confrontación entre en análisis a priori (segunda fase) y el análisis a posteriori (cuarta fase), también se determina en qué medida fueron alcanzadas las expectativas o cuán alejadas están de los resultados observados.

A continuación, se muestra de forma esquemática la relación entre las fases de la ingeniería didáctica según Lezama y Farfán, (2001), quienes consideran a la ingeniería como metodología de investigación e instrumento para la elaboración de productos para la enseñanza.

Ingeniería Didáctica:
Metodología de investigación e instrumento para la
elaboración de productos para la enseñanza.

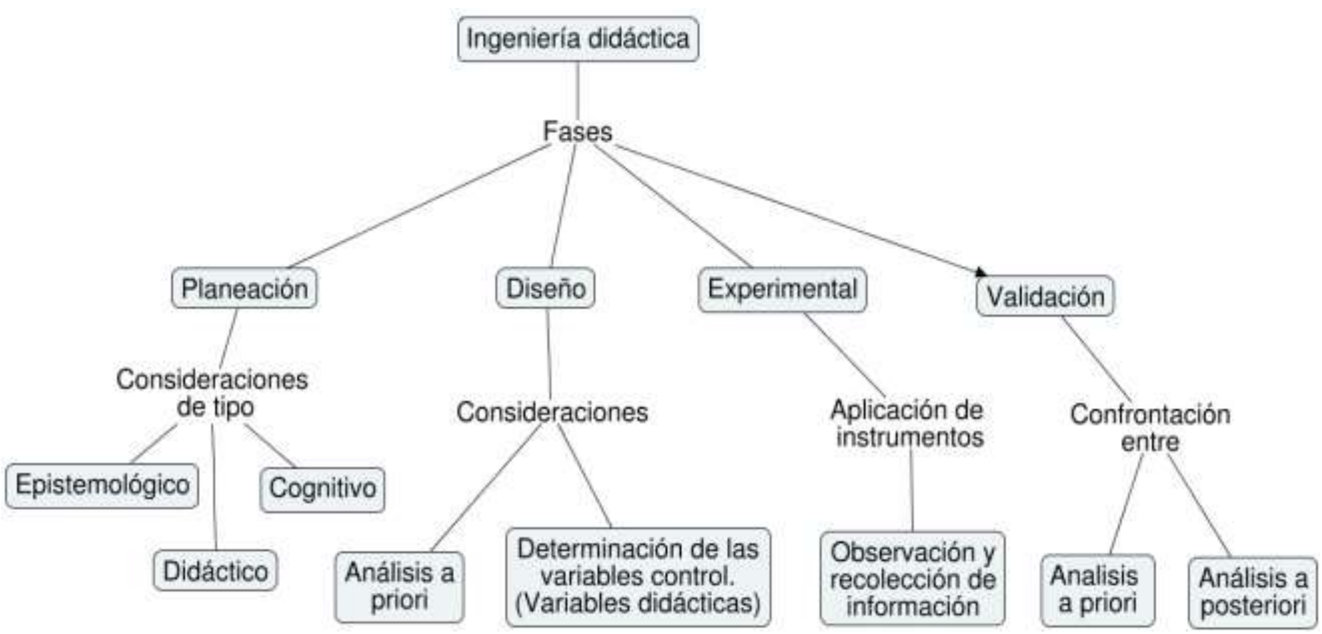


Figura 5 Fases de la ingeniería didáctica según Lezama y Farfán (2001).

Fuente: elaboración propia con base en Lezama y Farfán (2001)

2.4 Noción de obstáculo según Bachelard

Gastón Bachelard un filósofo, poeta, epistemólogo, físico, profesor y crítico literario francés estuvo interesado en la historia moderna o contemporánea de la ciencia, el cual quiso dejar su huella en la historia y producto de ello nació una de sus célebres obras "la noción del espíritu científico". Donde se emplea el término obstáculo epistemológico para hacer referencia a todo conocimiento que genere un entorpecimiento, confusiones, estancamiento y hasta retrocesos en el aprendizaje; los cuales tienden a aparecer por una especie de necesidad funcional, pues dentro de un área determinada estos conocimientos son correctos, pero al ampliar esta área dichos conocimientos se vuelven errados dificultando o entorpeciendo el aprendizaje en el estudiante.

Bachelard estableció al menos diez obstáculos epistemológicos en su obra, los cuales serán descritos a continuación de una manera breve:

1. Para Bachelard en la construcción de conocimientos/conceptos científicos el primero obstáculo es la experiencia básica o los conocimientos previos, es decir que los individuos antes de iniciar cualquier estudio, cuentan con un conjunto de ideas propias sobre el ¿cómo? y el ¿por qué? las cosas son como son, proporcionada por la naturaleza misma y el diario vivir.

> el espíritu científico debe formarse en contra de la Naturaleza, en contra de lo que es, dentro y fuera de nosotros, impulso y enseñanza de la Naturaleza, en contra del entusiasmo natural, en contra del hecho coloreado y vario. El espíritu científico debe formarse reformándose. Frente a la Naturaleza sólo puede instruirse purificando las sustancias naturales y ordenando los fenómenos revueltos. (Bachelard, 2000, p. 27)

2. El segundo obstáculo responde al nombre del conocimiento general, este obstáculo es uno de los que mas ha retrasado el conocimiento científico, pues este se ocasiona al tratar de explicar conceptos de una manera general, ya que esto provoca que los conceptos se vuelvan vagos e indefinidos, pues la explicación de dicho concepto es demasiado amplia para describir un fenómeno o hecho, permitiendo de esta manera generar falsas definiciones como lo ejemplifica el mismo Bachelard.

> Con frecuencia, con el fin de indicar de una manera sencilla cómo el raciocinio inductivo llega a la ley científica general sobre la base de un conjunto de casos particulares, los profesores de filosofía describen rápidamente la caída de diversos cuerpos y concluyen: todos los cuerpos caen. Para disculparse por esta trivialidad, ellos pretenden mostrar que un ejemplo semejante les ofrece todo lo que necesitan para señalar un progreso decisivo en la marcha del pensamiento científico. En efecto, en este caso, el pensamiento moderno se presenta frente al pensamiento aristotélico como una generalidad rectificada, como una generalidad ampliada. Aristóteles enseñaba que los cuerpos livianos, humos y vapores, fuego y llama, encontraban en el empíreo su lugar natural, mientras que los *graves* buscaban *naturalmente* la tierra. En cambio, nuestros profesores enseñan que todos los cuerpos caen *sin excepción.* He ahí fundamentada, creen ellos, la sana doctrina de la gravitación. (Bachelard , 2000, p.67).

3. El tercer obstáculo es el verbal: tiene entre sus causas el empleo incorrecto o abusivo de imágenes o palabras para realizar una explicación de una teoría o concepto, es decir, cuando el individuo crea su conocimiento a partir de una sola imagen, hasta una sola palabra, provocando que el individuo no pueda contrastarlo con la complejidad real del

objeto quedándose como una apreciación superficial. En este mismo orden de ideas Brousseau expone que no se debe asociar una palabra concreta a una palabra abstracta y pretender que se ha impulsado el pensamiento.

Lo abstracto está aislado conceptualmente de las propiedades del objeto, por ejemplo, la oración: el motor de un automóvil es cómo el corazón humano, pretende brindar una ejemplificación práctica del concepto de funcionamiento del motor/corazón, sin embargo, esta no es una explicación clara de este concepto pues no se debe limitar a una sola palabra o imagen, debido a que una comparación tan general degenera el conocimiento.

4. El conocimiento unitario y pragmático como obstáculo para el conocimiento científico; empezaremos ahondando un poco sobre el conocimiento unitario; este obstáculo nace como explicación ante la carencia de una respuesta científica de ciertos fenómenos, frecuentemente se ve relacionado con los fenómenos de carácter religiosos, por ejemplo: cuando se discute sobre las diversas maneras en las que nuestro universo ha sido formado se generan diferentes teorías que pretenden dar una explicación científica sobre dicho fenómeno, sin embargo se cae en "unicidad" cuando se utiliza la divina creación como respuesta de dicho fenómenos, pues esta misma da respuesta a diverso fenómenos que son o por los momento no han podido ser comprobados científicamente.

   Del planteamiento anterior se deduce que tal concepto de unicidad al entrar en juego con la utilidad podría causar errores considerables en la construcción del conocimiento, pues de inmediato se da más valor explicativo a lo que de alguna manera es útil, pues la utilidad ofrece un tipo de inducción muy particular llamado inducción utilitaria, la cual conlleva a divulgaciones exageradas, donde se puede partir de un fenómeno comprobado, hasta llegar a una extensión feliz (Bachelard, 2000). Es evidente entonces que todo pragmatismo, por el mero hecho de ser un pensamiento mutilado, lleva fatalmente a la exageración.

5. El obstáculo sustancialista, se caracteriza por ser polimorfo ya que está compuesto por las percepciones más alejadas y hasta las más opuestas, esto es, debido a una tendencia casi natural característica del espíritu científico que centra sobre un objeto todos los conocimientos en los que este objeto desempeña un papel. Según Bachelard (2000) "Une directamente a la sustancia las distintas cualidades, ya sea una cualidad profunda como una cualidad superficial, ya sea una cualidad manifiesta como una cualidad oculta" (p.115). Cabe agregar que se distinguen tres tipos de sustancialismo: un sustancialismo de lo oculto, un sustancialismo de lo íntimo, y un sustancialismo de la cualidad evidente.

6. Psicoanálisis del Realista: este obstáculo se abre espacio cuando el individuo acepta una realidad como tal, sin tomarse el tiempo de filosofar sobre dicha realidad, es decir este se queda con una primera impresión sobre el objeto. Por ejemplo, si se nos presenta un diamante como una piedra preciosa, inmediatamente y sin discusión alguna veremos que en efecto es una piedra hermosa por lo cual aceptamos dicha realidad, sin embargo, estamos dejando de lado sus propiedades curativas, su valor comercial, etc. El realismo va más allá de lo que simplemente se presenta ante los sentidos. El obstáculo realista adquiere la naturaleza del objeto como algo que no tiene lugar a generar un debate, como una verdad/realidad pura que no necesita de explicación alguna.

7. El obstáculo animista: para comprender dicho obstáculo hace referencia a la definición de animismo brindada por la Real Academia Española en Línea (DLE) (2018) Creencia en la existencia de espíritus que animan todas las cosas. Basado en esta definición Bachelard asienta sus bases para establecer dicho obstáculo como la sobre valoración que se les brinda a los objetos bióticos por sobre los abióticos, pues cualquier investigador presta más atención a los elementos bióticos.

    > Sin duda, aquello que pone de manifiesto más claramente el carácter mal ubicado del fenómeno biológico, es la importancia otorgada a la noción de los tres reinos de la Naturaleza y el lugar preponderante que ocupan los reinos vegetal y animal frente al reino mineral (Bachelard,2000, p.177).

8. El mito de la digestión: es interpretado metafóricamente por el autor como un sistema digestivo, donde toma al alimento como lo real en primera instancia, es decir una realidad a priori, que necesita del proceso de digestión para construir un conocimiento. Este alimento toma el papel de materia prima, la cual, a través del proceso digestivo, desempeñando este, el papel de un reactor donde se genera un saber adquiriendo una valoración explicativa y contundente. Es te obstáculo está ligado con el obstáculo animista, pues sin alimento no hay vida, lo cual hace que este obstáculo sea complejo a la hora de superar o franquear.

9. Libido y conocimiento objetivo: este obstáculo está fuertemente relacionado con el obstáculo animista. Se plantea como un “mal necesario”, pues gracias a este el individuo despierta el amor por el misterio, llegando incluso a convertirse en una necesidad. ¿Quién en su sano juicio nuca se preguntó cómo nacemos? La respuesta a la interrogante antes planteada nos lleva a caer en este obstáculo. Normalmente se nos dice que existe una

cigüeña que es la encargada de traer los niños, es en este punto donde el niño reconoce la absurdidad de las primeras explicaciones sobre este fenómeno. Con base en las consideraciones anteriores los padres se convierten para sus hijos en seres que no dicen todo. Adquiriendo conciencia que se le quiere, intelectualmente, mantener en tutelaje, de ahí que el joven despierte un interés por la misma información que se le quiere prohibir.

10. Los obstáculos del conocimiento cuantitativo. El autor manifiesta que existe un exceso de precisión a la hora de realizar las mediciones, pues el científico cree más en el realismo de la medida que en la realidad misma del objeto. Es necesario reflexionar para medir y no medir para reflexionar, de esta manera mantendremos íntegra la realidad del objeto y dejando a un lado la obsesión por la precisión. Veamos cómo repercute este obstáculo en el individuo a la hora de emplear el concepto de densidad. Según Bachelard (2000).

> El departamento del Sena tiene una densidad de 9.192 habitantes por kilómetro cuadrado. Este número *fijo* para un concepto *flotante,* cuya validez en la forma exacta no es ni de una hora, servirá con algunos otros del mismo tipo, a "instruir" a los alumnos durante unos diez años. El libro de geografía de primera del mismo autor contiene 3.480 números que tienen casi todo el mismo valor científico. Esta sobrecarga numérica exige a los alumnos retener más de 100 números por cada clase de una hora. Hay en esto el pretexto de una pedagogía detestable que desafía al sentido común, pero que se desarrolla sin encontrar la menor crítica en disciplinas que no son científicas sino por metáfora (p.254).

Todo lo anterior expuesto representan para Bachelard los obstáculos presentes en la transformación de un espíritu pre-científico a uno verdaderamente científico. El autor deja en claro que estos obstáculos han prevalecido a lo largo de la historia y que no pertenecen específicamente al pensamiento científico contemporáneo, permitiendo de esta manera poder realizar investigaciones sobre estos obstáculos en diferentes ramas de estudio. Es solo mediante la superación sistémica de dichos obstáculos la manera en que el espíritu científico puede evolucionar de un estado pre-científico en el que la materia prima del conocimiento es la realidad circundante, a uno en el que la misma noción de realidad se toma como excusa hacer ciencia, donde nuevos conocimientos surgen de nuevas realidades existentes a veces únicamente como símbolos matemáticos.

2.5 **Noción de obstáculo según Brousseau**.

Guy Brousseau un investigador francés, especialista en didáctica de la matemática, creador de la Teoría de las Situaciones, la cual provocó un fuerte cambio en la historia de las matemáticas, pues ya no se hablaba únicamente de matemáticas como objeto de estudio, sino el proceso mediante el cual se transmiten los conocimientos de un sujeto a otro (Didáctica de las matemáticas). En el segundo capítulo de la Teoría de las Situaciones, Brousseau aborda los obstáculos epistemológicos propuesto por Gastón Bachelard, pero orientándolos a la investigación en matemática.

> La investigación sobre obstáculos epistemológicos en matemáticas ciertamente requiere un esfuerzo de invención porque el concepto de Bachelard está poco adaptado a este dominio. Pero puede demostrar ser fructífero para la enseñanza en la medida en que:

1. los obstáculos en cuestión están verdaderamente identificados en la historia de las matemáticas.
2. se han rastreado en modelos espontáneos de los estudiantes;
3. las condiciones pedagógicas de su "derrota" o su rechazo se estudian con precisión de tal manera que se pueda proponer un proyecto didáctico preciso para maestros;
4. la evaluación de dicho proyecto puede considerarse positiva. (Brousseau, 1970-1900, p. 93).

De acuerdo a lo expuesto, el autor se dedicó a identificar obstáculos y problemas epistemológicos en matemática, así como la importancia de la noción de obstáculo en la enseñanza por medio de problemas y los problemas presentes en la construcción del concepto de decimales. Estableciendo de esta manera la importancia de la noción de obstáculo en la enseñanza por medio de problemas (situaciones didácticas), también expuso la existencia de los obstáculos en la didáctica de la matemática, identificando al menos tres; el obstáculo de origen ontogénico, de origen didáctico y de origen epistemológico. Siendo este último en donde enfocó el desarrollo de esta tesis.

Un obstáculo tiene su génesis en los errores, pero estos errores no son comunes, pues se caracterizan por no ser fugaces, erráticos, se sabe que van a aparecer y que persisten. Según Brousseau (1970-1900) Estos errores no son precisamente evidentes debido a que “Lo que sucede es que no desaparecen completamente de una vez; ellos resisten, persisten, luego reaparecen y se manifiestan mucho después de que el sujeto ha rechazó el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente” (p. 84). Provocando de esta manera el surgimiento de obstáculos, tanto como en el docente, así como en el alumno.

En este mismo orden y dirección Brousseau (1970-1900) define los obstáculos de origen realmente epistemológicos, como "aquellos de los que uno no puede ni debe escapar, debido a su papel formativo en el conocimiento que se busca. Se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos" (p. 87). Sin embargo, esto no es motivo para seguir contribuyendo en la propagación de los obstáculos epistemológico, así como en la amplificación de su efecto en el alumno por el contrario estamos obligados a contrarrestar las condiciones históricas bajo las cuales fueron concebidos.

En los marcos de las observaciones anteriores si asumimos que un conocimiento nace contraponiéndose a otro mientras lo reemplaza, se entenderá que el proceso de superación de un obstáculo es de carácter dialéctico; de una dialéctica de *a priori* y a *posteriori* de conocimiento y acción. "Organizar la superación de un obstáculo consistirá en ofrecer una situación que pueda evolucionar y hacer que el alumno evolucione de acuerdo con una dialéctica adecuada. (Brousseau, 1970-1900). No se trata de transmitir la información de una manera inductiva, sino de crear la o las secuencias didácticas necesarias que nos permitan obtener un resultado óptimo o satisfactorio entre aquellos con los que compite. La superación de un obstáculo implica una restructuración completa de modelos de acción, lenguaje y sistema de pruebas.

En el próximo apartado se realiza un recorrido histórico sobre el surgimiento de la ecuación cuadrática, haciendo énfasis en las antiguas civilizaciones que destacaron en esta área, asi como sus aportes y personajes más destacados terminando con una tabla resumen del desarrollo histórico del lenguaje algebraico

2.6 Surgimiento de la ecuación cuadrática: un recorrido histórico

2.6.1 Elementos históricos

¿Qué es el álgebra? Para Baldor (2008) “es la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible” (p.5). Entre la formulación de esta interrogante y la respuesta de la misma existe un recorrido histórico maravilloso. En esta parte del capítulo se pretende estudiar a cada uno de las civilizaciones que figuran como máximos exponentes en la historia del álgebra, así como sus aportes que contribuyeron a la definición del álgebra como la conocemos hoy en día. Se hará un mayor énfasis en las civilizaciones que aportaron en la solución de las ecuaciones cuadráticas, debido a que esta investigación gira entorno a esto objeto matemático.

Las matemáticas son contemporáneas con el propio conocimiento humano. Esto se puede evidenciar en los distintos huesos con marcas, marcas en paredes, diseños prehistóricos de utensilios de cerámicas, pinturas en las cuales se aprecia el empleo de la geometría. (Atienza, 2012). Con base en lo anterior sabemos que nuestros ancestros hacían uso de los dedos de las manos para contar, lo cual se ve reflejado en los diversos tipos de sistemas numéricos de base diez y cinco. Las primeras civilizaciones de las que se tiene evidencia de empleo de las matemáticas, son la civilización egipcia y la babilónica.

Los primeros documentos del álgebra tienen una antigüedad de unos 4,000 años, los cuales se encontraron en Egipto y Babilonia, pues fueron estas civilizaciones las que impulsaron el álgebra en mayor medida. A continuación, se profundizará un poco más sobre estas civilizaciones:

2.6.1.1 Egipcios.

Según la opinión de especialistas historiadores, “Egipto nace alrededor del año cuatro mil a.C. y su máximo esplendor se dio alrededor del año 2 500 a.C. Al igual que con Mesopotamia, la civilización siguió un curso que se vería drásticamente alterado solo hasta la conquista Macedonia”. (Zúñiga, 2003, p. 17). Los primeros conocimientos de referencias del empleo de la matemática en esta cultura datan del 3,000 antes de Cristo. Se cuenta con diversas referencias sobre matemáticas como ser: sus papiros, pirámides, templos etc. De las referencias antes mencionadas se destacan los documentos escritos sobre papiros. A continuacion se muestran algunos de estos.

Figura 6 Papiro de Rhind (Ahmes, 1650 a.C.)

El papiro de Rhind: escrito por Ahhmes en el año 1650 antes de Cristo, en hierático; este papiro se encuentra situado en un museo británico, es también conocido como el papiro de Ahmes en honor a su supuesto autor. El papiro cuenta con 87 problemas y sus respectivas soluciones. Sus dimensiones son: 6 metros de largo y 33 centímetros de ancho. En el papiro se encuentra problemas referentes a la aritmética básica, ecuaciones lineales y trigonométricas básicas, regla de tres, progresiones, cálculo de áreas y volúmenes.

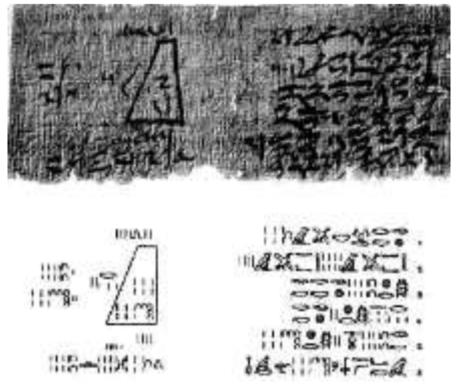


Figura 7 Papiro de Moscú

El papiro de Moscú: este papiro fue escrito en hierático en año de 1890 antes de Cristo; este papiro se encuentra situado en un museo Pushkin en Moscú, fue también conocido como el papiro de Goleníshchev. El papiro cuenta con 25 problemas y sus respectivas soluciones. Sus dimensiones son: 5 metros de largo y 8 centímetros de ancho. En el papiro se encuentra problemas referentes a la aritmética básica entre otros tópicos, pero de estos destacan el problema número 14 y 10.

En los papiros antes mencionados podemos encontrar evidencia de lo que son las ecuaciones lineales en una incógnita. El problema 72 del papiro de Ahmes es el siguiente "Si tenemos que intercambiar 100 panes de pesu 10 por un determinado número de panes de pesu 45, ¿cuál es este número determinado? Hay ecuaciones equivalentes a $x + \frac{1}{4}x = 15.$ Y también sistemas como:$x^2 + y^2 = 100$ ..."(Ruiz, 2003, p. 21). Con base a lo anterior mencionado, es evidente que los egipcios fueron una de las civilizaciones que impulsaron la implementación del álgebra. "A la incógnita "x" la llamaban *aha* ó *h*. Existen problemas de proporcionalidad, de regla de tres, de repartición proporcional; existen cuestiones que llevan a progresiones aritméticas y geométricas. En diversos casos se usa el método de la "falsa posición". (Ortiz, 2005)

2.6.1.2 Babilonia

La civilización babilónica está conformada por un conjunto de pueblos que pertenecieron a Mesopotamia entre el 5,000 A.C. y los primeros tiempos del cristianismo. Los registros matemáticos babilónicos proceden de las excavaciones realizadas a mediado del siglo XIX, donde se encontraron alrededor 500,000 tablillas de arcillas de las cuales entre 300 y 500 de estas han sido identificadas como tablillas matemáticas, las cuales contienen diversos problemas matemáticos y que pertenecen a diversos periodos de la historia de Babilonia; así tenemos textos matemáticos que posiblemente datan de alrededor del 2100 A.C., otros de alrededor del 1600 A.C., y otros de antigüedad del 600 al 300 A.C.(Ortiz, 2005;Zuñiga, 2003).

En estos textos se aprecia que los antiguos babilonios tenían un alto nivel de habilidad en el cálculo; su escala numérica fue en base 60. A ellos le debemos que 1 hora tenga 60 minutos. El área fundamental en el que se desenvolvieron los babilónicos fue el álgebra, esta alcanzó un nivel aún más alto que en Egipto, ya que los babilónicos pudieron resolver tanto ecuaciones lineales como cuadráticas e incluso ecuaciones cúbicas. Los babilónicos podían resolver ecuaciones lineales y cuadráticas de tipo $x^2 \pm bx = c$ con $b > 0$ y $c > 0$ (por completación del cuadrado o por sustitución) podían resolver sistemas complicados como
$\begin{cases} x^8 + x^6y^2 = (3{,}200{,}000)^2 \\ xy = 1{,}200 \end{cases}$ (Ortiz, 2005, p.17).

Un aspecto muy peculiar de los babilónicos es que no poseían los números negativos, por tanto, las soluciones de las ecuaciones cuadráticas con raíces negativas no eran aceptadas. Sin embargo, se supone que sí podían calcular con números irracionales. De hecho, realizaron un cálculo aproximado asombroso: el de la $\sqrt{2}$. Una tablilla ubicada actualmente en la Universidad de Yale, nos indica que los babilonios lograron desarrollar un algoritmo para determinar aproximadamente el valor de $\sqrt{2}$ mediante la expresión $\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b}{2a}$ (Zuñiga, 2003, p. 25).

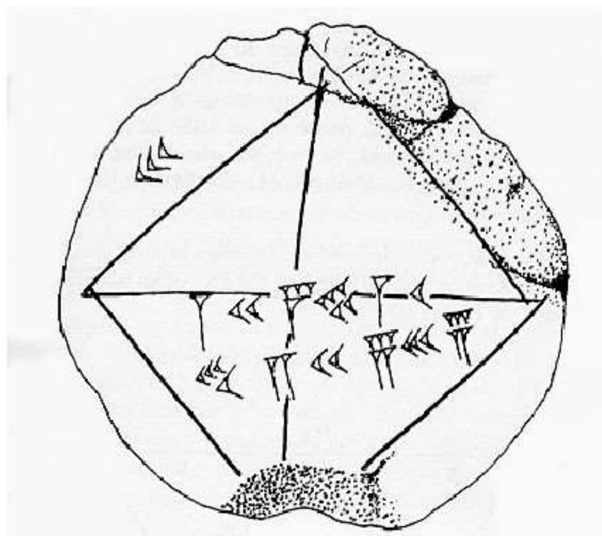


Figura 8 $\sqrt{2}$ en tablilla babilónica (Ruiz, 2003:25)

2.6.1.3 Árabe

Esta civilización despertó su intelecto gracias a los califas Harum el-Rashid y su hijo Almamun quienes construyeron una biblioteca, un observatorio y un instituto para la traducción e investigación de obras griegas, persas, hindúes y babilónicas con el fin de restaurar la antigua Alejandría. A los árabes se les debe que el álgebra sea conocida como tal en nuestros días; ya que la palabra *álgebra* viene de un libro escrito en el año 830 por Muhammad ibn Musa al Jwarizmi, titulado Hisab Al-jabr w'al-muqabala, que se traduce como Cálculo por restauración y reducción. También: Algorithmi de número indorum (Cálculo con números indios). Al traducirse al latín en el siglo XII, el primer libro quedó con el título de Ludus algebrae et almucgrabalaeque y aquí se redujo a álgebra. Este libro integra las tradiciones babilónicas, griegas e indias. (Zúñiga, 2003)

2.6.1.4 Desarrollo Histórico Del Lenguaje Algebraico

Tabla 4 Desarrollo histórico del lenguaje algebraico.

fuente: propio con base en Malisani (1999)

Representantes	Conocimientos Aritméticos	Lenguaje Natural	Lenguaje Geométrico	Simbolismo	Nivel De Generalización	Tipos Ecuaciones	Métodos De Resolución
BABILONIOS (˜ 2000 a.C.)	Sistema posicional de bases 60 y 10. Números enteros, algunas fracciones.	Principal soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----------	Resolución de problemas individuales.	Cuadráticas. Bicuadráticas.	Completar el cuadrado.
EGIPCIOS (˜1700 a.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números enteros, algunas fracciones.	Principal Soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----------	Resolución de Problemas individuales.	Lineales. Cuadráticas del tipo: $ax^2 = b$.	Regla de la falsa posición.
EUCLIDES (˜300 a.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números Racionales e irracionales cuadráticos positivos.	Soporte de expresión.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	-----------	Resolución de problemas individuales.	Lineales. Cuadráticas.	Construcción geométrica.

DIOFANTO (˜250 d.C.)	Sistema no posicional de base 10. Números Racionales e irracionales cuadráticos positivos.	Soporte procedural.	-------------	Introducción de abreviaturas para la incógnita y sus potencias.	Resolución de problemas individuales.	Lineales, cuadráticas y cúbicas: determinadas e indeterminadas.	Aritméticos.
CHINOS (Sig. III a.C.- Sig. III d.C.)	Números racionales positivos. Algunos irracionales.	Soporte de expresión.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	-----------	Resolución de problemas individuales.	Primero y segundo grado.	Regla de la doble falsa posición.
HINDUES (˜500 – ˜1200)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracionales cuadráticos Números negativos.	Soporte procedural.	Soporte para la formulación de algunos problemas.	Introducción de abreviaturas para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones.	Resolución de problemas individuales.	Lineales y cuadráticas determinadas e indeterminadas. Algunas ecuaciones cúbicas y cuárticas.	Aritméticos (regla de la simple falsa posición).
ARABES (˜800 – ˜1300)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficien	Soporte de expresión.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	Introducción de nombres especiales para la incógnita y sus potencias.	Tendencia a la resolución de clases de problemas.	Lineales. Cuadráticas. Cúbicas.	Regla de la falsa posición. Fórmula resolutiva. Geométricos (analítico)

	tes y raíces de ecuacio nes).						
LEO NAR DO PISA NO (˜1170 - ˜1250)	Sistema posicional de base 10. Números racionales e irracio nales cuadráticos Números negativos (no aceptados como coeficien tes y raíces de ecuaciones).	Soporte de expre sión.	Soporte procedural y de argumenta ción con instrumen tos euclídeos.	Introduc ción de nombres especia les para la incógni ta y sus poten cias.	Resolución de clases de problemas.	Lineales Cuadráti cas.	Aritméti cos (Regla de la falsa posición). Geométri cos.
IL TRA TTATO D'ALGI BRA (Anónim o del Siglo XIV)	Números racionales e Irraciona les cuadráticos Números negativos (no aceptados como coeficien tes y raíces de ecuaciones).	Soporte de expre sión y procedu ral.	---------------	Introduc ción de nombres especiale s para la incógnit a y sus potencia s.	Resolución de clases de problemas.	Lineales. Cuadrática s. Sistemas. Algunas ecuaciones cúbicas y cuárticas	Formales. Regla de la falsa posición.

ALGEBRIS-TAS DEL 1500 (anteriores a Bombelli)	Números racionales e Irracionales cuadráticos. Números negativos (no aceptados como coeficientes y raíces de ecuaciones).	Soporte procedural.	Soporte procedural y de argumentación con instrumentos euclídeos.	Introducción de abreviaturas para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones.	Resolución de clases de problemas.	Ecuaciones de los primeros cuatro grados.	Formales.

Capítulo 3: Marco Metodológico

De manera general en el capítulo tres se explica los mecanismos empleados para el análisis del problema de investigación y resultados de la aplicación, sistemática y lógica de los conceptos y fundamentos expuestos en el marco teórico. Cabe mencionar que el modelo de investigación empleado es la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue que, a pesar de no estar plasmada en los diversos libros sobre metodologías de investigación, por ser una metodología exclusiva de la Didáctica Fundamental Francesa, cumple con los requisitos como metodología de investigación cualitativa. La Ingeniería Didáctica cuenta con cuatro fases: fase preliminar, fase de concepción y análisis a priori, fase de experimentación, una fase de análisis a posteriori y validación. Debido al esquema brindado por la UPNFM para la redacción del trabajo de tesis, en este apartado se aborda únicamente las primeras dos fases, ya que los últimas dos figuran en el capítulo cuatro.

3.1. Enfoque

El enfoque de esta investigación es Cualitativo debido a que indagaremos sobre fenómenos no cuantificables de carácter cognitivo, además de estudiar el impacto de dichos fenómenos en los estudiantes del Centro de Educación Básica General Francisco Morazán. Según Hernández Sampieri (2014) “la investigación cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto” (p. 358). Ante lo anterior expuesto, se concluye que el enfoque cualitativo es el medio idóneo para el desarrollo de esta investigación.

3.2. Tipo de estudio

Debido a la naturaleza del enfoque de esta investigación se utiliza el tipo de estudio descriptivo, según Hernández Sampieri (2014) "Con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. En esta investigación se pretende "caracterizar" obstáculos epistemológicos que enfrentan los estudiantes de educación básica para comprender situaciones que involucren una ecuación cuadrática, siendo de esta manera el tipo de estudio descriptivo el más pertinente.

Para poder realizar esta investigación será necesario implementar la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, ya que esta nos permitirá observar el comportamiento de los alumnos en las aulas de clase y sus dificultades, así como los registros históricos que existen en matemáticas sobre los errores que sean de pertinencia en esta investigación.

> "Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación" (Artigue et al. 1995, p. 36)

3.3.Tipo de diseño

El tipo de diseño que utiliza en esta investigación es el diseño fenomenológico debido a que el fenómeno en investigación se intervino en su contexto natural de su día a día, es decir a la hora de realizar las intervenciones, estas se desarrollan en su respectivo horario de clases, además "Su propósito principal es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias” (Hernández Sampieri, 2014). Por todo lo dicho se considera que el tipo de diseño fenomenológico es el más pertinente para este trabajo de investigación.

3.4.Variables o categorías de análisis

En moción de lo anteriormente expuesto y con base en los trabajos de investigación que giran alrededor de los obstáculos epistemológicos, surgen las siguientes categorías de análisis en respuesta a las necesidades de esta investigación: 1) obstáculos epistemológicos; esta categoría nace con el fin de tener un registro de los posibles obstáculos epistemológicos presentes en los estudiantes. 2) comprensión de la ecuación cuadrática: con esta categoría de análisis se pretende identificar en qué medida se ve afectada la comprensión del objeto matemático por los posibles obstáculos epistemológicos presente, también permite determinar el dominio de la temática previa relacionada con la resolución de una ecuación cuadrática empleando la formula general.

3.4.1. Obstáculos epistemológicos

3.4.2. Comprensión de la ecuación cuadrática

3.5. Matriz de categorías de análisis.

Tabla 5 Categoría de análisis

Fuente: elaboración propia

Categoría	Definición		Indicadores
	Conceptual	Operacional	
Obstáculos epistemológicos	Un obstáculo epistemológico es un conocimiento anterior que obstaculiza la construcción del aprendizaje nuevo.	Para este estudio se considerará el desarrollo de la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ En la cual se identificarán los conocimientos previos que se revelan incorrectos en el desarrollo de la ecuación cuadrática.	Errores en los conocimientos previos de los Números positivos y negativos • orden de operaciones • operaciones con racionales
			Errores en los conocimientos previos de las expresiones algebraicas (variables) • operaciones con variables • valor numérico de una expresión algebraica
			Errores en los conocimientos previos de las Ecuaciones lineales • interpretación errónea de una ecuación lineal (interpretarlo el resultado de una operación)
			Errores en los conocimientos previos de las potencias • cálculo erróneo del signo en el desarrollo de la potencia.
			Errores en los conocimientos previos de las fracciones • operaciones con fracciones

			• simplificación.
			Errores en los conocimientos previos de la raíz cuadrada. • Calcular la raíz de un número negativo • Simplificar una raíz
Comprensión de la ecuación cuadrática	Una ecuación cuadrática es una ecuación en su forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$, b y c, y $\in R$	Dominio de los Números positivos y negativos	Destrezas para realizar de manera correcta operaciones con Números positivos y negativos
		Dominio de las variables (Introducción al álgebra,	Habilidades para realizar operaciones con expresiones algebraicas (Introducción al álgebra, variables)
		Dominios de las Ecuaciones lineales	Destrezas para realizar de manera correcta operaciones con Ecuaciones lineales
		Dominios de la Raíz cuadradas	Habilidades del estudiante para realizar de manera correcta operaciones con Raíces cuadradas
			Destrezas para identificar una ecuación cuadrática completa e incompleta.

Nota: El término *comprensión* es empleado en la parte de análisis con el fin de referir al mismo como la superación de un obstáculo epistemológico, es decir cuando un alumno logre desarrollar un ejercicio sin cometer errores se dice que comprende el objeto de estudio en cuestión y para ello es necesario el dominio de los temas entorno a la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula general.

3.6. Población y muestra

Esta investigación se desarrolló en el Centro de Educación Básica General Francisco Morazán del departamento de Valle, municipio de Nacaome, con los alumnos de noveno grado con un total de 40 alumnos compuesta por dos secciones de 20 alumnos cada una, donde se trabajó con una sección, específicamente noveno grado sección "A" donde se estudian los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos de educación básica en la comprensión de situaciones que requieran de una ecuación cuadrática.

El tipo de muestra a implementar es la muestra de *casos tipo*, ya que según Hernández (2014) este tipo de muestra se emplea investigaciones de tipo cualitativo, "En el que el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, no la cantidad ni la estandarización. En estudios con perspectiva fenomenológica, en los que el objetivo es analizar los valores, experiencias y significados de un grupo social, es frecuente el uso de muestras tanto de expertos como de casos tipo (p.387)"

A continuación, se detalla de manera específica lo anteriormente expuesto.

Tabla 6 Población y Muestra.

Fuente: elaboración propia

Población	Muestra
40 alumnos de noveno grado divididos en dos secciones	Una sección de noveno grado compuesta por 20 estudiantes.

3.7.Diseño de la secuencia didáctica

3.7.1. Fase preliminar (planeación)

Como se indicó anteriormente, en este apartado se incluye el análisis epistemológico de los contenidos estipulados en la enseñanza de la ecuación cuadrática, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, así como el análisis del campo de restricciones donde se desarrolló todo el proceso didáctico, teniendo siempre en cuenta los objetivos específicos de esta investigación. A continuación, se procede a desarrollar las cuatro dimensiones establecidas en la metodología de la investigación e instrumentos para la elaboración de productos para la enseñanza de las cuales se profundizó anteriormente.

3.7.1.1.Análisis epistemológico

En este apartado se toma en cuenta la revisión del libro de texto empleado en las escuelas públicas de Honduras para la enseñanza de la ecuación cuadrática dirigido a alumnos de noveno grado de educación básica, así como las dificultades epistemológicas previamente encontradas en otras investigaciones relacionadas con dicha temática. Considerando que el objetivo de la secuencia didáctica es identificar los obstáculos epistemológicos presente en los alumnos de noveno grado a la hora de resolver situaciones que requiera de una ecuación cuadrática empleando la fórmula cuadrática.

Revisión de textos: a continuación, se brinda información detallada sobre el abordaje de la ecuación cuadrática en el libro del estudiante de noveno grado, proporcionado por la Secretaría de Educación, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y la Agencia de

Cooperación Internacional del Japón (2011), donde se enfatizará en las definiciones y notas pertinentes en la ecuación cuadrática, específicamente en la solución de las ecuaciones empleando la fórmula cuadrática.

Definiciones en los libros de texto relacionados con la ecuación cuadrática:

Tabla 7 Definiciones en los libros de texto relacionados con la ecuación cuadrática

fuente: Elaboración propia con base en Secretaría de Educación (2011b)

Ecuación cuadrática	**Una ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado es toda ecuación que se puede escribir de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $\boldsymbol{a \neq 0}$.**
Solución de una ecuación cuadrática	Solución de una ecuación cuadrática es el conjunto de valores de la incógnita que satisface la ecuación. Resolver una ecuación cuadrática es encontrar la solución de la misma.
Fórmula cuadrática	Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde $b^2 - 4ac \geq 0$.
Nota sobre el discriminante.	$b^2 - 4ac \geq 0$. significa que no es negativo, ya que si lo fuera su raíz cuadrada no estaría definida en el conjunto de los números reales y por lo tanto no habría solución en dicho conjunto de números.

Con la información encontrada en la revisión del libro de texto y considerando los aspectos indicados anteriormente se señala lo siguiente:

1. Respecto a la definición de la ecuación cuadrática, se considera una definición breve, clara y precisa, con la observación que hace falta mencionar que los coeficientes de la ecuación deben ser números reales. Esta observación se considera importante ya que según Brousseau un obstáculo epistemológico es “un conocimiento, en el sentido de que se le dio un camino para tratar un conjunto de situaciones. Este conocimiento da resultados correctos o benéficos apreciables en un cierto dominio, pero se revela incorrecto o totalmente inapropiado en un área nueva o más grande”, es decir, en el libro simplemente se estudian las ecuaciones cuadráticas con soluciones reales.
2. La definición de la resolución de una ecuación cuadrática es clara, no da lugar al surgimiento de ningún obstáculo epistemológico, según los obstáculos proporcionados por Bachellard (2000) en su escrito la formación del espíritu científico.
3. En cuanto a la definición de la resolución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática a simple vista pareciera estar muy completa y precisa, sin embargo, como se menciona en la primera observación el simple hecho de omitir al conjunto de los números complejos se convierte en un obstáculo epistemológico para el alumno.

3.7.1.2.Análisis cognitivo

En este análisis se estudian los diversos sistemas de representación para cada noción, a parte del lenguaje natural que caracterizan a la actividad matemática. Llamaremos a estos sistemas de representaciones “nociones simbólicas o gráficas” es mediante estas que se expresan lo conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Este apartado se basa en estudios previos sobre obstáculos epistemológicos que tienen lugar en los tópicos que forman parte del objeto matemático en estudio (ecuaciones cuadráticas) como lo son los números negativos y el pensamiento algebraico por mencionar algunos.

Para ello se comienza con los obstáculos epistemológicos estudiados por Cid (2016) en su tesis obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Tomando como base los estudios de Glaeser (1981) quien enlista los siguientes obstáculos

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas
2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.
3. Dificultad para unificar la recta real.
4. La ambigüedad de los dos ceros
5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.
6. Deseo de un modelo unificador

Con este estudio se brinda sustento a las representaciones aritméticas de esta tesis, con el único fin de cumplir con el análisis cognitivo, pues en el análisis a posteriori se realiza un estudio más profundo de estos obstáculos epistemológicos previamente identificado en conjunto con la caracterización de los nuevos obstáculos epistemológico que se encuentren como resultado de esta tesis.

En el orden de las ideas anteriores se continua con el lenguaje algebraico para lo cual se utilizaron los estudios realizados por Malisani (1999) en su artículo sobre los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico.

> En el desarrollo histórico del lenguaje algebraico, encontramos con frecuencia que los matemáticos manifiestan ciertas ambigüedades para operar en determinadas situaciones

> con nuevos objetos abstractos, por ejemplo: por un lado, observamos la falta de aceptación de los números negativos como coeficientes o raíces de las ecuaciones, por el otro, si esos números son necesarios para completar el proceso de resolución de un problema entonces vienen utilizados en esta función. Numerosos ejemplos de este tipo se encuentran en el *Trattato d'Algibra* y en *L'Algebra* de Bombelli. Desde el punto de vista de la investigación histórico-epistemológica, sería interesante estudiar si estas ambigüedades operativas se manifiestan debido al obstáculo epistemológico que representan los números negativos. (Malisani, 1999)

Por consecuente, es de vital importancia evitar generar obstáculos epistemológicos en cada una de las representaciones matemáticas, pues como se menciona anteriormente, la representación aritmética influye considerablemente en el pensamiento algebraico. La jerarquía que tiene el hecho de trascender de una representación a otra se considera de mucha importancia para esta investigación, por tal motivo se considera pertinente que en la situación didáctica diseñada en esta investigación incluya el uso de tales representaciones. También se debe tener en cuenta utilizar un lenguaje más claro y sencillo que permita a los alumnos tener una clara comprensión de los enunciados y preguntas, en los problemas propuestos, evitando de esta manera que el paso del lenguaje natural al matemático se convierta en un obstáculo.

3.7.1.3.Análisis didáctico (enseñanza de la ecuación cuadrática)

En este apartado se hace una revisión del Diseño Curricular Nacional Básico Para La Educación Básica (DCNB) con el fin de estudiar sus métodos, técnicas y herramientas empleadas para la enseñanza de la ecuación cuadrática, la cual se encuentra situada en el bloque de Álgebra. Cabe mencionar que se analiza únicamente el DCNB para tercer ciclo, pues es aquí donde se encuentra nuestra temática de pertinencia. El DCNB cuenta con seis herramientas, tales herramientas son las siguientes: libros de texto, estándares, programaciones, pruebas mensuales, instructivo para las pruebas, las pruebas de fin de grado.

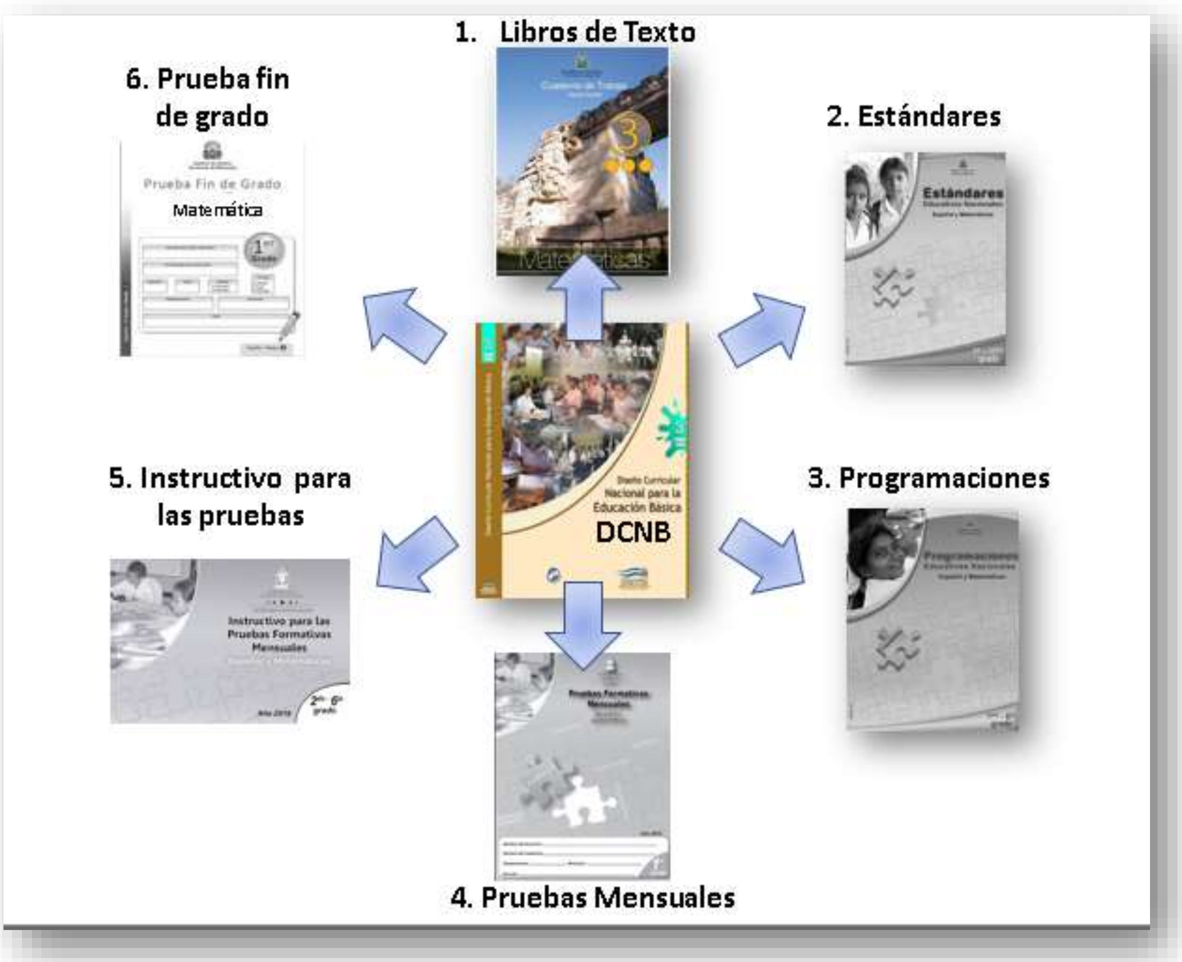


Figura 9 Herramientas del DCNB.

Fuente: Elaboración propia con base en MIDEH (2009)

A diferencia del análisis epistemológico realizado previamente, este análisis se desarrolla con un énfasis en la forma en la que se presentan los contenidos relacionados con la ecuación cuadrática, donde se consideran tres aspectos: secuencia del contenido, aplicaciones de la ecuación cuadrática y el uso de recursos tecnológicos.

A continuación, se explica de manera breve la relación que existe entre cada una de estas herramientas antes mencionadas. Las Programaciones tienen relación directa con el Diseño Curricular Nacional Básico (DCNB) y con los Estándares Educativos Nacionales, considerados como metas precisas de lo que debe saber y saber hacer el estudiante en un período determinado. Las Programaciones le sirven al docente para hacer sus planes didácticos permitiéndole conocer si está logrando los estándares y dándole una idea clara de los contenidos conceptuales y actitudinales a desarrollar. De esta forma se pretende establecer vínculos que reflejen coherencia entre cada uno de los elementos curriculares y didácticos que faciliten la práctica pedagógica del docente, en el marco de las intencionalidades educativas del Diseño Curricular Nacional Básico.

Las Pruebas Formativas Mensuales han sido elaboradas con base en los Estándares Educativos Nacionales y las Programaciones, cuyos contenidos van mes a mes y reflejan la propuesta conceptual y actitudinal del Currículo Nacional Básico y la nueva propuesta curricular del Programa de Apoyo a la Educación Media de Honduras. Estas pruebas están diseñadas para cumplir con los siguientes objetivos: 1) valorar lo que los estudiantes han aprendido y son capaces de hacer después de un mes de clases. 2) Contar con información permanente sobre el progreso en el aprendizaje de los estudiantes y que el docente la utilice como base para la toma de decisiones al momento de planificar el proceso didáctico. 3) Identificar a aquellos estudiantes que no han logrado los estándares para reforzar su aprendizaje. 4) Informar a los padres y madres de familia sobre los avances en el aprendizaje de sus hijos. (Secretaría de Educación, 2011d)

De esta forma se pretende establecer vínculos que relejen coherencia entre cada uno de los elementos curriculares y didácticos que faciliten la práctica pedagógica del o de la docente, en el marco de las intencionalidades educativas del Diseño Curricular Nacional Básico.

Para el desarrollo/ejecución del análisis de los libros ante mencionados se empleó la siguiente dinámica/metodología

Tabla 8 Metodología empleada para en análisis de textos

Fuente: Elaboración propia.

Libro a analizar	**Metodología**
Libro de texto noveno grado	• Diseñar una tabla resumen entorno a: 1. Definiciones entorno a la ecuación cuadrática 2. Secuencia del contenido 3. Empleo de ejercicios de aplicación, 4. Uso de recursos tecnológico. Posteriormente realizó un análisis sobre cada uno de los aspectos considerados anteriormente.
Estándares Educativos.	• Diseñar una tabla resumen entorno a los estándares educativos para noveno grado, para el bloque de álgebra en el componente de ecuaciones y desigualdades. Posteriormente se realizó un análisis considerando los siguientes aspectos: 1. Secuencia del contenido 2. Empleo de ejercicios de aplicación 3. Uso de recursos tecnológico. Además de analizó la correlación entre los estándares educativos y el libro de texto
Diseño Curricular Nacional Básico (DCNB)	• Se diseñar una tabla donde se enlistan las expectativas de logro, contenidos conceptuales y actitudinales, así como los procesos y actividades sugeridas. Seguidamente se realizó un análisis considerando los siguientes aspectos: 1. Secuencia del contenido 2. Empleo de ejercicios de aplicación

	3. Uso de recursos tecnológico. Además, se analizó la correlación entre los estándares educativos, el libro de texto y el DCNB

A continuación, se muestra un cuadro resumen que contiene los aspectos más relevantes que surgieron del análisis del libro de texto de noveno grado.

Tabla 9 Hallazgos del libro de texto noveno grado (estudiante).

Fuente: elaboración propia.

Aspectos	**Libro de texto noveno grado (estudiante)**
Secuencia del contenido	1. Se comienza con una situación problema, donde se pide calcular el área de un rectángulo, para lo cual es necesario expresar dicha área como una ecuación y así poder encontrar la solución del problema mediante la búsqueda a ensayo y error de la solución de la ecuación cuadrática. 2. Se presenta la definición formal de una ecuación cuadrática. 3. Se presentan dos actividades con el fin de identificar las ecuaciones cuadráticas y su solución. 4. Se presenta la definición formal de una ecuación cuadrática. 5. Luego se presenta otra situación problema donde se pide calcular la altura de un triángulo. Esto con el fin de reforzar los conocimientos adquiridos en 1, 2, 3 y 4. 6. Se presenta el método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización, donde se muestra una tabla con el fin de identificar los valores que hacen cero a la ecuación (soluciones). 7. Se presenta una actividad con 9 ejercicios para afianzar lo aprendido en 6. 8. Se presenta un ejercicio resuelto mediante factorización (tanteo corto) e igualando a cero. 9. Se presenta una actividad con 9 ejercicios para afianzar lo aprendido en 8

10. Se presenta un ejercicio resuelto mediante factorización por tanteo largo
11. Se presenta una actividad con 9 ejercicios para afianzar lo aprendido en 10
12. Se presenta un ejercicio resuelto mediante factorización por trinomio cuadrado perfecto.
13. Se presenta la siguiente nota “una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, pero hay casos donde tiene solo una solución.
14. Se presenta una actividad con 9 ejercicios para afianzar lo aprendido en 12 y 13
15. Se presenta un ejercicio resuelto de una ecuación cuadrática factorizada igualada a un número distinto de cero (transposición de términos).
16. Se presenta una actividad con 10 ejercicios para afianzar lo aprendido en 15
17. Se presentan tres ejemplos de resolución de ecuación cuadrática empleando la raíz cuadrada
18. Se presenta 2 actividades con 9 ejercicios cada uno para afianzar lo aprendido en 17.
19. Se presenta una situación problema para introducir la resolución de una ecuación cuadrática mediante completación al cuadrado.
20. Se presenta una definición sobre resolución de una ecuación cuadrática mediante completación al cuadrado.
21. Se presenta una actividad con 9 ejercicios cada uno para afianzar lo aprendido en 19 y 20.
22. Se presenta la demostración de la fórmula cuadrática mediante completación al cuadrado
23. Se presenta una nota sobre el discriminante de la fórmula cuadrática.
24. Se presenta la definición formal de la fórmula cuadrática.
25. Se presenta un ejemplo resuelto de resolución de ecuaciones cuadráticas empleando la fórmula cuadrática.
26. Se presenta una actividad con 12 ejercicios para afianzar lo aprendido en 25.

	27. Se presentan dos ejemplos resueltos de resolución de ecuaciones cuadráticas empleando la fórmula cuadrática con raíces racionales. 28. Se presenta una actividad con 18 ejercicios para afianzar lo aprendido en 26 y 27. 29. Se presentan dos problemas resueltos de la aplicación de la ecuación cuadrática 30. Se presenta una actividad con 10 ejercicios de aplicación para afianzar lo aprendido en 29.
Aplicaciones de la ecuación cuadrática	1. Se encontraron ejercicios de aplicación relacionados con la ecuación cuadrática y una lista de ejercicios propuesto.
Uso de recursos tecnológicos.	1. No se hace ninguna indicación o sugerencia sobre el uso de la calculadora, ni cualquier otra herramienta como recurso tecnológico.

Con base en la información presentada en la tabla anterior se observa lo siguiente:

1. Secuencia del contenido: la secuencia empleadas en este texto es la más idónea desde la mirada de la Ingeniería Didáctica, pues este texto está estructurado por situaciones didácticas que siguen una secuencia didáctica que permite al estudiante modificar/construir sus esquemas cognitivos/mentales generando así un conocimiento/aprendizaje.

   El enfoque empleado por el libro del estudiante de noveno grado, tal como lo refleja el DCNB es el enfoque constructivista. Secretaría de Educación (2011c)" El enfoque Constructivista se oficializa en el CNB, por lo que frecuentemente el modelo del desarrollo cognitivo será citado y ampliado. Desde este enfoque metodológico, el conocimiento es una construcción del ser humano" (p.593).

2. Aplicaciones de la ecuación cuadrática: desde la mirada de la Teoría de las Situaciones a través de estos problemas de aplicación se producen situaciones *didácticas*: esta se

caracteriza por la intervención directa del docente. Son situaciones a-didácticas preparadas con fines didácticos que permiten determinar el conocimiento enseñado en un momento dado, pues el docente debe realizar las adaptaciones pertinentes sobre los problemas seleccionados de modo tal, que el alumno acepte el problema como suyo, deben lograr por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. (Brousseau, 2007)

3. Uso de recursos tecnológicos: en este apartado no se registraron hallazgos relevantes, pues en el libro de texto no se sugiere el empleo de ningún recurso tecnológico para la resolución de las ecuaciones cuadráticas. No obstante, se considera que el empleo de los recursos tecnológicos produce una mejora en las estrategias basadas en el software matemático (Cuicas, Debel, Casadei, y Alvarez, 2007)

Con base en las ideas antes expuestas y teniendo presente que la finalidad de la situación didáctica diseñada es que el alumno comprenda la resolución de las ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática. Es de vital importancia diseñar una secuencia didáctica que permita al alumno comprender el proceso de resolución de la ecuación cuadrática, evitando en lo posible generar obstáculos epistemológicos y didácticos que interfieran en la comprensión de la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática.

Para concluir en este apartado del análisis del libro de texto de noveno grado, es necesario detallar la estructura de este libro, es decir cada libro viene estructurado por unidades y cada unidad con sus respectivas lecciones, un apartado con ejercicios y otro con la evaluación de la unidad. En el caso del tema de pertinencia de esta tesis, es abordado en la unidad tres, lección dos.

En el orden de las ideas anteriores se hará el análisis de los estándares educativos. Resulta oportuno manifestar que se contaba con la necesidad de establecer un instrumento/herramienta que sirva como norma para orientar la labor docente, coordinar los elementos del sistema educativo, definir lo que los alumnos deben saber y saber hacer, así como servir como base en el establecimiento de criterios para el diseño de pruebas. Como respuesta a dichas necesidades surgen los estándares educativos nacionales. Secretaría de Educación (2011a) "son objetivos educativos que señalan lo que los alumnos tienen que saber (conocimientos) y saber hacer (destrezas), independientemente de su contexto geográfico, cultural o social" (p.1).

Constan de seis bloques: 1) Números y operaciones, 2) Geometría, 3) Etapa preparatoria en medidas, 4) Álgebra, 5) Estadística y probabilidad y 6) Cálculo. Estos a su vez de dividen en componentes, en el caso del bloque de álgebra se divide en 9 componentes donde cada componente está conformado con sus respectivos estándares por grado. A continuación, se presenta una tabla con los estándares educativos para el bloque de Álgebra en el componente de ecuaciones y desigualdades.

Tabla 10 Estándares Educativos Nacionales 9° grado.

Fuente: elaboración propia con base en Secretaría de Educación (2011a)

Noveno grado	1. Encuentran la solución de ecuaciones cuadráticas en una sola variable. 2. Resuelven problemas de la vida cotidiana que impliquen ecuaciones cuadráticas en una sola variable. 3. Usan la computadora y/o calculadora para comprobar las soluciones de ecuaciones cuadráticas*. 4. Resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables aplicando los métodos de sustitución, igualación y eliminación. 5. Resuelven problemas de la vida cotidiana que impliquen la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. 6. Usan la computadora o calculadora para comprobar las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables*. 7. Resuelven inecuaciones lineales en una variable con coeficientes racionales. 8. Resuelven problemas de la vida cotidiana que impliquen inecuaciones lineales en una variable con coeficientes racionales.

* Uso de calculadora o computadora, cuando sea posible.

Como se puede observar en la tabla anterior, tomada de los estándares educativos nacionales; del bloque de álgebra, en el componente de ecuaciones y desigualdades, es evidente que los primeros tres estándares están alineados, es decir tiene una secuencia didáctica relacionada con el tema de pertinencia de esta investigación. Al igual que en los libros de texto, en los estándares educativos nacionales se promueven la aplicación de la ecuación cuadrática a situaciones de la vida cotidiana. Se ha identificado que los primeros dos estándares son abordados o alcanzados mediante la implementación del libro de texto, no obstante, se identificó en el análisis del libro de texto, que no se hace mención alguna del empleo de la calculadora y/o computadora para la resolución de ecuaciones cuadráticas, lo que implica que se presentan problemas de concordancia entre estas herramientas ya que los estándares promueven el uso de herramientas de la calculadora y/o computadora para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Seguidamente se procede a realizar el análisis respectivo sobre el DCNB siguiendo el mismo orden de ideas empleadas para el análisis del libro de texto y los estándares educativos. A continuación, se muestran las expectativas de logro, contenidos conceptuales y actitudinales, así como los procesos y actividades sugeridas por el DCNB.

Tabla 11 Diseño curricular nacional para la educación básica. Secretaría de Educación (2011c)

Expectativas De Logro	Contenidos Conceptuales (*) Y Actitudinales (°)	Procesos Y Actividades Sugeridas
Reconocen situaciones que se pueden describir mediante ecuaciones cuadráticas. Aplican sus conocimientos de ecuaciones cuadráticas en una variable para resolver problemas de la vida real.	*Ecuaciones cuadráticas en una variable - El concepto de una ecuación cuadrática - Solución de ecuaciones cuadrática completando el cuadrado - Solución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática - ° Apreciación de la importancia de la resolución de ecuaciones cuadráticas en problemas de la vida diaria	Investigan ecuaciones del tipo $x^2 = a$ y $a \geq 0$. Reconocen que la ecuación tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa: $x = \pm\sqrt{a}$. Investigan ecuaciones del tipo $x^2 = a$ y $a < 0$. Reconocen que esta ecuación no tiene solución (real). Investigan ecuaciones del tipo $(x - a)^2 = b$ y encuentran también dos soluciones: $x = a \pm \sqrt{b}$. Investigan ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$ cuando el trinomio es un cuadrado perfecto, es decir, cuando existe un número d tal que $x^2 +$ $bx + c = (x + d)^2$. Ejemplo: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, es decir, $b = 6, c = 9$, $d = 3$ Reconocen que $d = b/2$ y que $d^2 = c$. Investigan ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$ cuando el trinomio no es un cuadrado perfecto, es decir, cuando no existe un número d tal que $x^2 + bx + c = (x + d)^2$. Descubren que en este caso se puede descomponer el trinomio en un trinomio cuadrado perfecto y una constante: $x^2 + bx + c = 0$ < Propiedad de ecuación > $x^2 + bx = -c$ < Propiedad de ecuación >

$$x^2\ bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

< Aritmética >

$$(x + b/2)^2 = (b/2)^2 - c$$

< Propiedad del cuadrado >

$$(x + \frac{b}{2}) = \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

< Propiedad de ecuación >

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

Llaman a este procedimiento "complementación al cuadrado".

Ejemplo: $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

< Propiedad de ecuación >

$$x^2 + 6x = -5$$

< Complementación al cuadrado, propiedad de ecuación >

$$x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2$$

< Aritmética >

$$(x + 3)^2 = 9 - 5$$

< Propiedad del cuadrado >

$$(x + 3) = \pm\sqrt{4}$$

< Propiedad de ecuación, aritmética>

$$x = -3 \pm 2$$

Es decir, $x = -1$ o $x = -5$ son soluciones de la ecuación.

Resuelven varios ejercicios de la vida real con complementación al cuadrado.

Buscan una solución general de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Encuentran la fórmula cuadrática para las dos soluciones en un proceso de transformación de esta ecuación mediante complementación al cuadrado:

	$x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{(2a)}$ Llaman a la expresión $b^2 - 4ac$ “discriminante”. Reconocen que la ecuación tiene dos soluciones si el discriminante es mayor que 0, que tiene una solución si el discriminante es 0 y no tiene ninguna solución si es negativa. Resuelven ejercicios de la vida real aplicando la fórmula cuadrática.

1. Secuencia del contenido: la secuencia sugerida por el DCNB con base en la experiencia empírica deja mucho que desear, pues no sugiere la definición de una ecuación cuadrática previo a la resolución de las mismas. Los métodos de resolución de la ecuación cuadrática no son abordados en su totalidad, pues se omite la resolución por factorización y se hace un mayor énfasis en la resolución de las ecuaciones por raíz cuadrada, completación al cuadrado y empleando la fórmula cuadrática.

Un hallazgo importante es la posible existencia de un obstáculo didáctico pues con base en la Teoría de las Situaciones de (Brousseau 1970-1900) esto dependen únicamente de la manera el que el conocimiento es transmitido al estudiante, es decir la responsabilidad recae en la didáctica del docente/libro. Este obstáculo didáctico a su vez abre lugar a los obstáculos epistemológicos en el alumnado. En el DCNB como se puede observar en la tabla se dice que cuando el discriminate es menor que cero esta ecuación cuadrática no tiene solución. Lo que en efecto generará un obstáculo epistemológico.

2. Aplicaciones de la ecuación cuadrática: en este apartado se hace la misma observación que en el apartado anterior, pues solo se sugiere la aplicación de la resolución de la ecuación cuadrática mediante la aplicación de la fórmula cuadrática y completación al cuadrado.
3. Uso de recursos tecnológicos: al igual que en los libros de texto no se sugiere la implementación de los recursos tecnológicos para la resolución de las ecuaciones cuadráticas, llámense estos: calculadora, computadora, etc.

3.7.2. Fase de Diseño (Concepción y Análisis a priori)

Para efectos de la concepción de la situación didáctica propuesta en esta tesis se considera lo siguiente: 1) el diseño de la misma situación didáctica enfocada en determinar los conocimientos previos a la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, la identificación y caracterización de los posibles obstáculos epistemológicos encontrados en los conocimientos previos. 2) el diseño de la secuencia didáctica para implementar las situaciones didácticas elaboradas 3) la elaboración de las macro y micro variables didácticas que se trabajarán en las situaciones didácticas. 4) el análisis a priori, donde se describen los tipos de interacción y comportamientos esperados.

Para el diseño de las situaciones didácticas implementadas en esta investigación se han considerado todas las fases propuestas por la Ingeniería Didácticas que anteceden al proceso de elaboración y diseño de la misma. Esto con el fin de eliminar las posibilidades de incluir o generar nuevos obstáculos en la investigación, que podrían dar la misma, por el contrario, gracias al estudio preliminar se ha tratado de incluir las condiciones que favorecen la comprensión de la temática en cuestión.

Como resultado de lo anterior expuesto se ha diseñado una secuencia didáctica compuesta por cuatro situaciones didácticas, las cuales se implementaron con los alumnos de noveno grado. Cada una de estas situaciones cumple con un objetivo específico, los cuales serán detallados más adelante. Sim embargo estos han sido elaborados de manera tal que requieran de un conocimiento previo para generar una estrategia inicial para resolver el problema, pero que posteriormente esta estrategia resulte ser ineficiente, obligándolos a generar nuevas estrategias para obtener los resultados deseados.

A manera de resultado final se muestra el contenido de cada una de las situaciones didácticas que conforman la secuencia didáctica diseñada para identificar y caracterizar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos de noveno grado en la comprensión de la resolución de la ecuación cuadrática.

CENTRO EDUCACIÓN BÁSICA
GENERAL FRANCISCO MORAZÁN
PRUEBA DIAGNÓSTICA
NOVENO GRADO
Situación 1

NOMBRE DEL ALUMNO: ____

SECCIÓN___________ ***FECHA***______________

<u>Instrucciones:</u>

Resuelva de manera clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios. Dejar evidencia de todo procedimiento, aunque estén incompletos o usted los considere incorrectos.

1. Calcule (operaciones con enteros)
   a) $(+2)+(+3)=$ b) $(+5)+(-8)=$
   c) $(-5)+(+5)=$ d) $(-6)+(-2)=$
   e) $(-2)(5)=$ f) $(-6)\div(-2)=$

2. Calcule (operaciones con racionales)
   a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$ b) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=$
   c) $2*\frac{2}{3}=$ d) $\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}=$

3. Calcule las siguientes potencias

   a) 2^2 b) -3^2

   c) $(-2)^3$

4. Calcule las siguientes raíces cuadradas

   a) $\sqrt{9} =$ b) $\sqrt{12} =$

   c) $\sqrt{-4} \ =$

5. Encuentre el valor numérico de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

   a) $2x + 5;\ si\ x\ =\ 3$ b) $2 + x;\ si\ x\ = -10$

   c) $-x^2 + 5;\ si\ x = 3$ d) $-2x + x^2\ ;\ si\ x\ =\ -2$

CENTRO EDUCACIÓN BÁSICA
GENERAL FRANCISCO MORAZÁN
NOVENO GRADO
Situación 2

NOMBRE DEL ALUMNO:____

SECCIÓN____________ ***FECHA***_______________

Instrucciones: Resuelva de manera clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios. Dejar evidencia de todo procedimiento, aunque estén incompletos o usted los considere incorrectos.

a) Resuelva la ecuación cuadrática planteada empleando la fórmula cuadrática.

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$

2. $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$

3. $x^2 - 20x + 100 = 0$

4. $x^2 + 2x + 5 = 0$

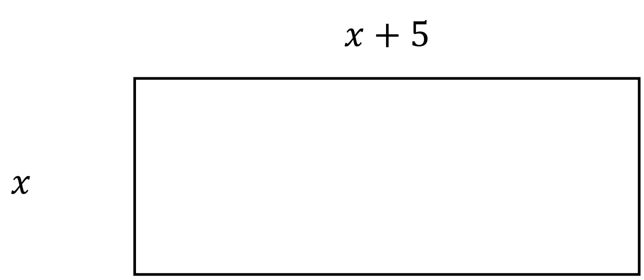
CENTRO EDUCACIÓN BÁSICA
GENERAL FRANCISCO MORAZÁN
NOVENO GRADO
Situación 3

NOMBRE DEL ALUMNO:____

SECCIÓN____________ ***FECHA_______________***

Instrucciones: Resuelva de manera clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios. Dejar evidencia de todo procedimiento, aunque estén incompletos o usted los considere incorrectos.

En el centro de educación Básica General Francisco Morazán los alumnos de noveno grado tiene como proyecto la construcción del escenario de dicha institución. Se sabe que el área de construcción es de $(\mathbf{50\ m^2})$**.** La forma del área de construcción se indica en el siguiente diagrama en el cual se necesita encontrar el largo y el ancho del área de construcción.



a) Plante la situación mediante una ecuación cuadrática

b) Resuelva la ecuación cuadrática planteada empleando la fórmula cuadrática.

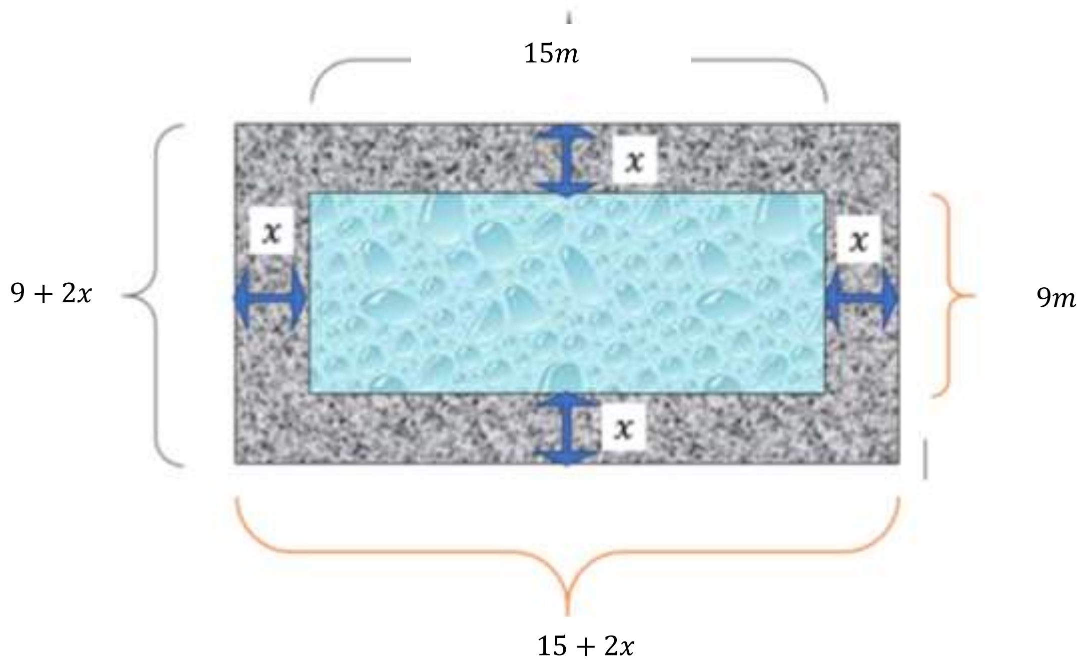
CENTRO EDUCACIÓN BÁSICA
GENERAL FRANCISCO MORAZÁN
NOVENO GRADO
Situación 4

NOMBRE DEL ALUMNO:____

SECCIÓN____________ ***FECHA***_______________

Instrucciones: Resuelva de manera clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios. Dejar evidencia de todo procedimiento, aunque estén incompletos o usted los considere incorrectos.

En el centro de educación Básica General Francisco Morazán se construyó una pila rectangular para abastecer de agua a sus estudiantes. La pila tiene **15 m de largo por 9 m de ancho** está rodeada por paredes de cemento de un ancho uniforme. Si el área de las paredes es 81 m^2 ¿Cuánto mide su ancho?



a) Plantee la situación mediante una ecuación cuadrática

b) Resuelva la ecuación cuadrática planteada empleando la fórmula cuadrática.

Tabla 12 Secuencia Didáctica. Fuente: elaboración propia.

Situación	Objetivos	Descripción	Duración
1	Determinar los conocimientos previos a la resolución de ecuaciones cuadráticas.	Para determinar lo conocimientos previos de los alumnos, estos darán solución a la situación didáctica uno en equipos de dos integrantes. En esta etapa los alumnos establecerán las estrategias de resolución para dicha situación. Cabe destacar que es necesario el dominio de los conocimientos previos a la resolución de las ecuaciones cuadráticas para establecer las estrategias de resolución de la situación uno.	20 min.
			15 min.
		Seguidamente se reorganiza el aula en dos equipos, con el fin de discutir las estrategias de resolución ante la situación didáctica planteada, que los integrantes puedan discutir sobre las mismas y que descarten las estrategias que están mal laboradas (según el criterio de los estudiantes)	25 min.
		Para finalizar, cada equipo debe seleccionar al menos dos expositores quienes compartirán las	

	estrategias implementadas para la resolución de la situación, cada equipo está obligado a aceptar o refutar la estrategia de resolución a aplicada por el equipo contrario, con el fin de generar un consenso en la estrategia aplicada para la resolución de la estrategia.

Situación	Objetivos	Descripción	Duración
2	Identificar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos de noveno grado en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática.	Al igual que en la situación uno se establecerán equipos de dos personas con el fin de identificar los posibles indicios de obstáculos epistemológicos presentes en las estrategias de resolución de la situación dos	20 min.
		Se conforman dos equipos del total de alumnos en el aula, con el fin de discutir sobre las estrategias empleadas para resolver la situación en el ejercicio anterior y erradicar los posibles indicios de obstáculos epistemológicos presentes.	15 min.
		Para concluir, se realizará un debate sobre las estrategias empleadas para la resolución de la situación planteada, con el fin de generar una validación de la estrategia empleada por los alumnos y al mismo tiempo se espera observar la superación de los obstáculos epistemológicos (en caso de que estos existan).	25 min.

Situación	Objetivos	Descripción	Duración
3	Identificar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos de noveno grado en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática en problemas de la vida real.	Se divide el aula en equipos de dos para dar solución a la situación propuesta. Al finalizar la actividad anterior, es necesario reorganizar el aula en dos equipos, en los cuales se discutirán las estrategias aplicadas para resolver la situación en cuestión. El equipo deberá exponer y convencer al equipo contrario que su estrategia empleada es la más ideal, en caso de discrepancia el equipo expositor deberá demostrar porqué su estrategia es correcta.	20 min. 15 min. 25 min.

Situación	Objetivos	Descripción	Duración
4	Identificar los obstáculos epistemológicos presentes en los alumnos de noveno grado en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática en problemas aplicados.	Los alumnos resuelven la situación uno en equipos de dos Se reorganiza el aula en dos equipos, con el fin de discutir las estrategias de resolución ante la situación planteada. Cada equipo debe seleccionar al menos dos expositores quienes compartirán las estrategias implementadas para la resolución de la situación, cada equipo está obligado a aceptar o refutar la estrategia de resolución a aplicada por el equipo contrario, con el fin de generar un consenso en la estrategia aplicada para la resolución de la estrategia	20 min. 15 min. 25 min.

3.7.2.1.Variables Macro didácticas.

En la siguiente tabla se presentan las variables macro didácticas que se han considerado en esta tesis para la fase experimental:

Tabla 13 Variables Macro didácticas.

Fuente: Elaboración propia

Variables macro didácticas.	Descripción.
Organización de alumnos	En parejas y equipos de trabajo
Ambiente de realización	Aula de usos múltiples
Formato de material para las actividades	Formato impreso

3.7.2.2.Variables Micro didácticas.

En la siguiente tabla se muestran las micro variables didácticas que se ha establecido con el fin de modificar las estrategias de resolución de los alumnos.

Tabla 14 Variables Micro didácticas.

Fuente: Elaboración propia

Variables micro didácticas.	Valores
Planteamiento del problema	Formulación del problema (lenguaje natural al algebraico) Resolución del planteamiento del problema
Comprensión de un número real	Operaciones con reales.
Comprensión de un número imaginario	Operaciones con imaginarios.

En este sentido, se describe el análisis a priori de esta tesis, en el cual se comienza con indicaciones generales para los alumnos sobre el desarrollo de las situaciones didácticas. De esta misma forma se detalla el análisis de las cuatro situaciones didácticas que conforman la secuencia didáctica. Este análisis incluye: las directrices brindadas por el docente previo al desarrollo de la situación, la temática en cuestión de la misma, el análisis de la tarea y los comportamientos esperados por parte de los alumnos durante la aplicación de la situación didáctica en el aula.

3.7.2.3. Análisis a priori.

A continuación, se detalla cada una de las etapas del análisis a priori de la secuencia didáctica diseñada. En este sentido es pertinente resaltar que las indicaciones para los alumnos y los conocimientos matemáticos implicados en la secuencia didáctica, son las mismas para cada una de las situaciones didácticas implícitas en la secuencia didáctica. El análisis de cada tarea y el comportamiento esperado por los alumnos en la secuencia didáctica se detalla por cada situación didáctica.

3.7.2.3.1. Indicaciones para los alumnos

- La tarea consiste en resolver las actividades propuestas en la situación uno, para desarrollar dicha actividad los alumnos trabajarán en equipos de dos con el fin de generar las estrategias de resolución para las tareas propuestas en la situación uno.
- Para el desarrollo de esta tarea deberán emplear únicamente: lápiz carbón, borrador y saca puntas.
- Se empleará un estimado de 60 minutos para dar solución a la situación didáctica distribuidos de la siguiente manera.:20 minutos para trabajar en equipos de dos, donde los alumnos deberán generar estrategias de resolución a las tareas propuestas en la situación, 15 minutos para reorganizar el aula en dos equipos y discutir las estrategias de resolución empleadas por cada equipo de dos y seleccionar las más adecuadas, 25 minutos para

exponer al equipo contrario las estrategias de resolución empleadas por cada equipos, en caso de encontrar estrategias diferentes de resolución deberán llegar a un consenso para seleccionar la estrategias más adecuadas para la resolución de la tarea.

3.7.2.3.2. Conocimientos matemáticos implicados

La temática implicada en las actividades son los siguientes:

- Operaciones básicas con números enteros
- Operaciones básicas con fracciones
- Desarrollo de potencias.
- Raíz cuadrada de un número positivo y negativo
- Valor numérico de una expresión algebraica

3.7.2.3.3. Análisis de la tarea

En este apartado se detalla el análisis de las tareas asignadas en cada una de las situaciones didácticas de manera general y se detalla el análisis de manera específica para situaciones particulares ubicándolas en las situaciones pertinentes.

- La tarea presentada en esta situación se desarrolla siguiendo la teoría de la *Situación validación* implícita en la Teoría de las Situaciones, descrita en un apartado anterior de esta tesis.
- Las variables micro didácticas establecidas en la secuencia didáctica son las siguientes: Conversión y tratamiento de registros, comprensión de un número real y de un número imaginario.

- El docente se convierte en un orientador del proceso sin involucrarse directamente a menos que sea necesario.

Situación 1

- En esta situación se determinarán los conocimientos que poseen los alumnos sobre la temática implícita en la resolución de las ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general. Esta situación será de vital importancia para poder distinguir los errores presentes en la resolución de la situación dos, de los posibles indicios de un obstáculo epistemológico. Debido a que si el alumno no domina la temática puede cometer errores en la resolución de la situación y serán tomados como tales, sin embargo, en caso de dominar la temática y cometer errores estos se vuelven indicios de obstáculos epistemológicos.

Situación 2

- Se identificarán algunos de los obstáculos caracterizados por Glaeser (1981) que fueron tratados en el análisis cognitivo de esta investigación. Así como posibles nuevos obstáculos epistemológicos. De esta manera será posible enlistar los obstáculos epistemológicos encontrados en la situación dos y en caso de que existan, los nuevos obstáculos epistemológicos.

Situación 3

- En esta situación se identificarán errores que reflejen síntomas de posibles obstáculos epistemológicos en la conversión del lenguaje natural al algebraico, así como reafirmar los errores identificados en la situación dos y uno, debido a que si estos siguen apareciendo pueden identificarse como obstáculos epistemológicos.

Situación 4

- Se identificarán errores que reflejen síntomas de posibles obstáculos epistemológicos en el tratamiento algebraico. Esta última situación se ha elaborado únicamente con el fin de confirmar la existencia de los obstáculos epistemológicos identificados en las situaciones previas, debido a que se podrá identificar que son errores recurrentes y no casos aislados.

3.7.2.3.4. Comportamientos esperados

Situación 1

Tabla 15 Comportamiento esperado; situación 1.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Comportamientos esperados.
1.a-f	a) Se espera identificar el dominio de la ley de los signos al realizar sumas de números de igual signo (positivos) b) Se espera identificar el dominio de la ley de los signos al realizar sumas de números con distinto signo donde el número con mayor valor absoluto es negativo. c) Se espera identificar el dominio de la ley de los signos al realizar sumas de números con distinto signo donde el valor absoluto de ambos números es el mismo. d) Se espera identificar el dominio de la ley de los signos al realizar sumas de números de igual signo (negativos) e) Es ítem tiene dos funciones: la primera es identificar el dominio de la ley de los signos en la multiplicación y en segundo identificar si se presenta alguna confusión entre la ley de los signos para la multiplicación/división y la ley de los signos para la suma y resta f) Este ítem al igual que el anterior tiene la misma función a diferencia que se trabaja con números negativos. • Se espera encontrar errores en el cálculo de las operaciones. • Se espera encontrar diversas estrategias aplicadas por los alumnos para la resolución de las tareas (tratamiento aplicado).

2 a-d	a) con este ítem se pretende identificar si el alumno puede realizar sumas con fracciones. b) Este ítem permite identificar si el alumno tiene claro el concepto de suma de fracciones, y también el dominio de la ley de los signos. c) Este ítem permite identificar si el alumno puede realizar una multiplicación de fracciones por un entero. d) Con este ítem se pretende identificar si el alumno presenta confusión entre el proceso de multiplicación y la división - Se espera encontrar errores en común por los alumnos en la resolución de las operaciones con fracciones. - Se espera que emplean procedimientos erróneos en la división y multiplicación, es decir que para dividir realicen el procedimiento de la multiplicación y viceversa.
3 a-c	a) Este ítem se elaboró únicamente con el fin de determinar si el alumno posee el conocimiento para el cálculo de las potencias. b) Este ítem pretende identificar si el alumno comprende el concepto de potencia y como afecta el signo a la base. c) Con este ítem se identificará si el alumno comprende cómo se ve afectada la potencia por los signos. • Se espera encontrar errores en el signo negativo en el desarrollo de la potencia. • Se espera que en lugar de multiplicar la base el número de veces que indica el índice, multipliquen directamente la base con el índice.

4 a-c	a) Se pretende identificar si el alumno considera ambas raíces es decir la raíz positiva y la negativa. b) Se espera que al calcular la raíz de 12 escriban 6 relacionando a la raíz cuadrada con la mitad de un número (un número multiplicado por dos). c) Se espera que los alumnos desconozcan la existencia de los números imaginarios. • Se espera que los alumnos no pueden encontrar la raíz cuadrada de negativo cuatro. O que escriban respuestas como: (-2) y/o $(+2)$
5 a- d	a) En esta tarea se espera que el alumno pueda demostrar sus debilidades en la introducción al álgebra, es decir, poder sustituir de manera adecuadas los valores numéricos de las variables. b) Se espera encontrar las debilidades en la asignación de los valores numéricos de las variables, es decir, sustituir por los valores incorrectos. c) Se esperar encontrar errores como el siguiente: $-x^2 + 5; si\ x = 3$ Posible respuesta: $-(3)^2 + 5 = 9 + 5 = 14$ d) Este ítem permite identificar el dominio de la ley de los signos en conjunto con el álgebra.

Situación 2

Tabla 16 Comportamiento esperado; situación 2.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	**Comportamientos esperados.**
a) 1-4	1) Se espera que los alumnos demuestren dominio de la fórmula cuadrática con números enteros. 2) Que los alumnos demuestren el dominio de la fórmula cuadrática con fracciones. 3) Se espera que los alumnos al emplear la fórmula cuadrática, en la resolución de la fracción formada, estos afecten parcial mente al denominador ejemplo $-b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o viceversa. 4) Se espera que la estrategia que poseen para calcular la raíz cuadrada les resulte incorrecta debido a que la estrategia que poseen solo es adecuada en los reales.

Situación 3

Tabla 17 Comportamiento esperado; situación 3.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	**Comportamientos esperados.**
a-b	a) Se espera que los alumnos presenten dificultades para realizar la conversión de del lenguaje natural al lenguaje algebraico (dificultades en el planteamiento del problema) b) Se espera encontrar de nuevos los errores cometidos en la situación 1 y 2 con el fin de confirmar que el obstáculo es persistente. c) Dificultades en la elección de la solución adecuada para dar respuesta a la situación.

Situación 4

Tabla 18 Comportamiento esperado; situación 4.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	**Comportamientos esperados.**
a-b	• Se espera encontrar los mismos errores con el fin de confirmar la existencia de un obstáculo epistemológico en el planteamiento del problema. • Dificultades en la estrategia de resolución, debido a que el nivel de demanda cognitiva en esta situación didáctica es mayor.

Capítulo 4 Resultados del estudio

En consideración del formato de tesis proporcionado por el programa de maestría en matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán se presenta la fase experimental como respuesta al capítulo cuatro donde se exigen los resultados de la investigación. En este capítulo se expone el proceso de aplicación de los instrumentos (Secuencia Didáctica), así como el análisis de cada una de las situaciones didácticas que conforman la misma. Además, se expone el proceso de validación de la secuencia didáctica a través de la confrontación entre el análisis a priori versus el análisis a posteriori.

4.1. Fase experimental

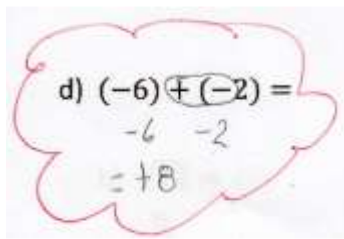
Después de culminar con la fase preliminar y el análisis a priori, ha llegado el momento de poner en marcha la secuencia didáctica diseñada. En este apartado se describen el desarrollo de cada una de las situaciones didácticas que conforman la secuencia didáctica, así como el comportamiento observado en los alumnos duran el desarrollo y los hallazgos que fueron de utilidad para los fines de esta investigación.

A continuación, se detallan las observaciones y/o hallazgos en la situación didáctica uno.

4.1.1. Comportamientos observados en la situación didáctica uno

Tabla 19 Comportamientos observados en la situación uno.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Comportamientos observados
1.a-f	• Estos ítem fueron desarrollados por los estudiantes sin novedad alguna, es decir solamente se observó un caso aislado donde un alumno se equivocó en la ley de los signos. Cabe resaltar que, a pesar de ser un caso aislado, se esperaba encontrar este tipo de error ya que tiene antecedente como un obstáculo epistemológico.  *Figura 10 Errores en la ley de los signos.* *Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.*
2. a-d	• Aunque diversos estudios indican que los alumnos muestran debilidades en el tema de las fracciones, no ha sido el caso para los alumnos de este centro educativo. Sin embargo, se observó evidencia que demuestra que los alumnos no han comprendido el concepto de fracción, sino que han aprendido a desarrollar las operaciones de manera mecánica como lo demuestra la siguiente imagen.

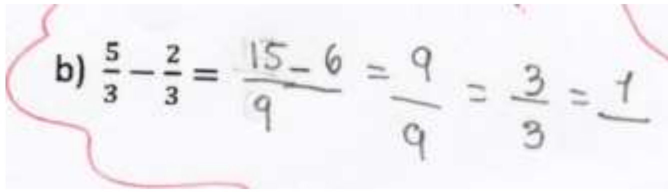
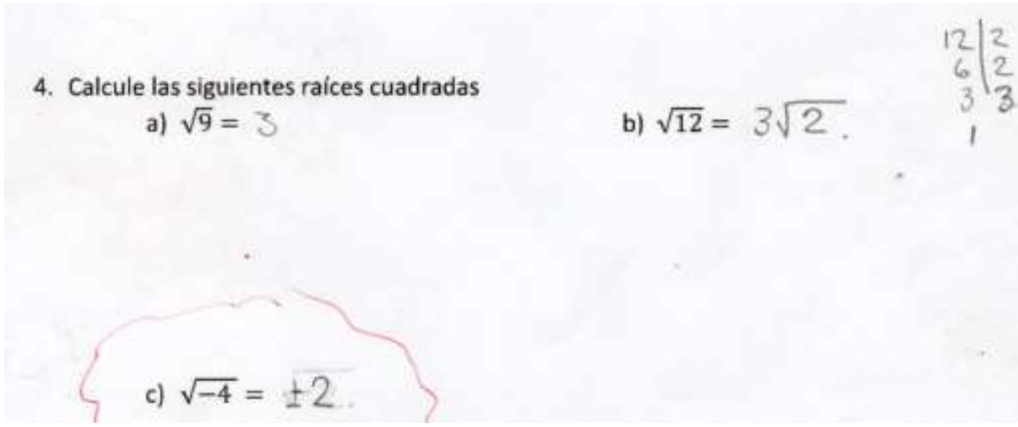


Figura 11 Aprendizaje mecánico.

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

3. a-c	• Este ítem ha sido superado de manera exitosa. Aunque cabe resaltar que se identificaron errores de cálculo, sin embargo, ninguno es relevante para esta investigación.
4. a-c	• De todos los ítem analizados y observados, es en este dónde han surgido un hallazgo de vital importancia para esta investigación. En primer lugar, partiremos diciendo que los jóvenes solamente consideran la raíz positiva olvidando por completo la negativa, sin embargo, al pedirles que calculen la raíz de un número negativo se mostraron aturdidos, pues sus esquemas mentales sobre raíz cuadrada no les han permitido diseñar una estrategia que les admita dar solución al problema. En el ítem 4 b, se puede observar que el procedimiento para descomponer el dos en números primos es correcto, sin embargo, a la hora de simplificar se tomaron los valores adecuados.



4. Calcule las siguientes raíces cuadradas

a) $\sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

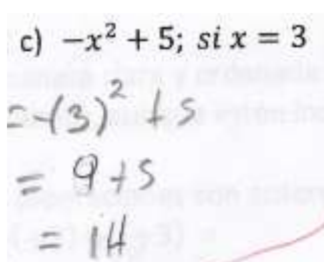
c) $\sqrt{-4} = \pm 2$

Figura 12 Error en el cálculo de las raíces cuadradas con números negativos:

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

5.

- En esta tarea se ha identificado a alumnos con dificultades en la conversión entre la representación algebraica y la aritmética, debido a que, a pesar de que realizaron sustituciones adecuadas, cometieron errores en el signo a la hora de realizar el cálculo de la potencia como se ilustra en el ejemplo siguiente.



c) $-x^2 + 5;\ si\ x = 3$

$= -(3)^2 + 5$

$= 9 + 5$

$= 14$

Figura 13 Dificultades en la conversión entre la representación algebraica y la aritmetica

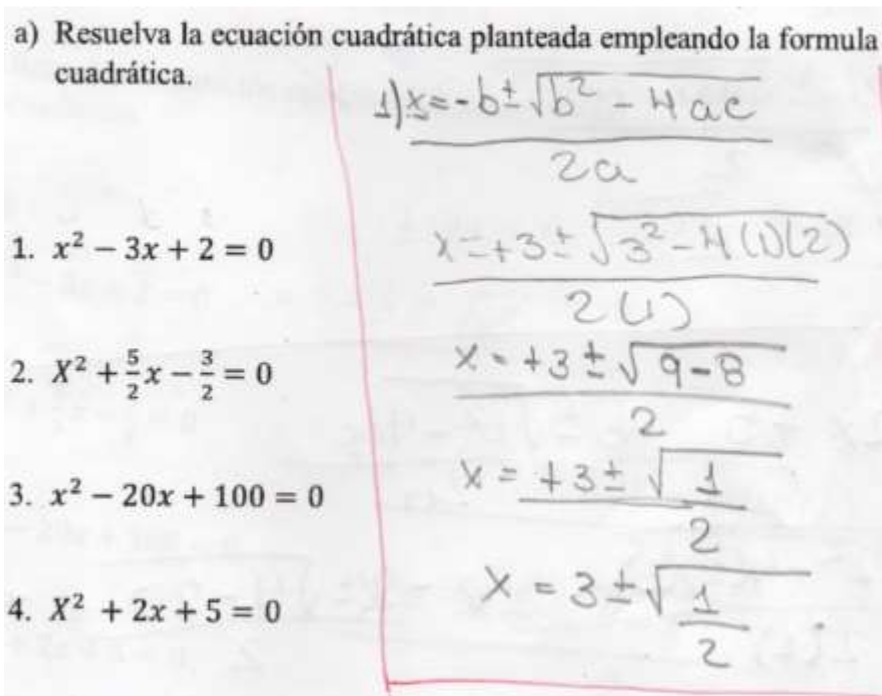
Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

4.1.2. Comportamientos observados en la situación didáctica dos

Tabla 20 Comportamientos observados en la situación dos.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Comportamientos observados
a-1	Los alumnos muestran debilidad a la hora de efectuar la fórmula cuadrática, específicamente en el desarrollo en la parte fraccionaria, pues estos solamente afectaban al radical y se olvidaban de afectar al primer término.



a) Resuelva la ecuación cuadrática planteada empleando la formula cuadrática.

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. $X^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$
3. $x^2 - 20x + 100 = 0$
4. $X^2 + 2x + 5 = 0$

1) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{+3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

$x = \frac{+3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$x = +3 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = 3 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

Figura 14 Errores en desarrollo de la fracción (fórmula general).

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

a-2	Al igual que en el ítem anterior, se observa que cometieron errores a la hora de resolver la fracción formada por la fórmula cuadrática, en este ejemplo se observa como el

alumno se olvido por completo del denominador lo que provoco una respuesta erronea del item.

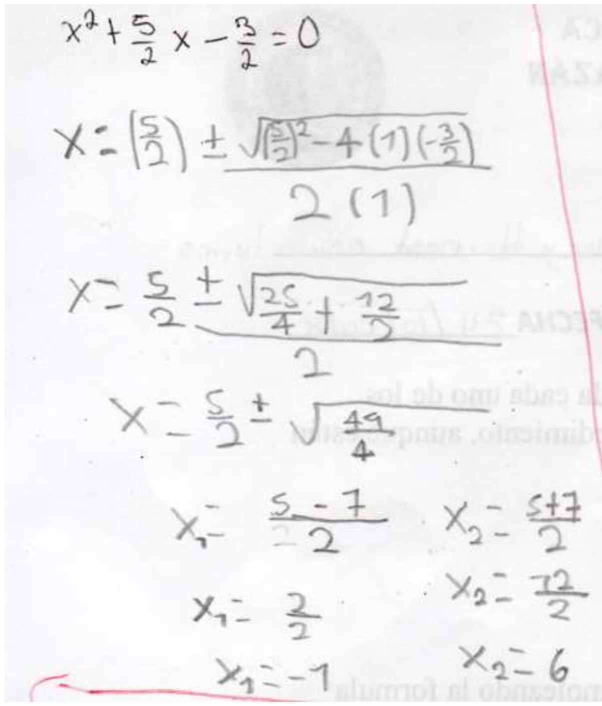
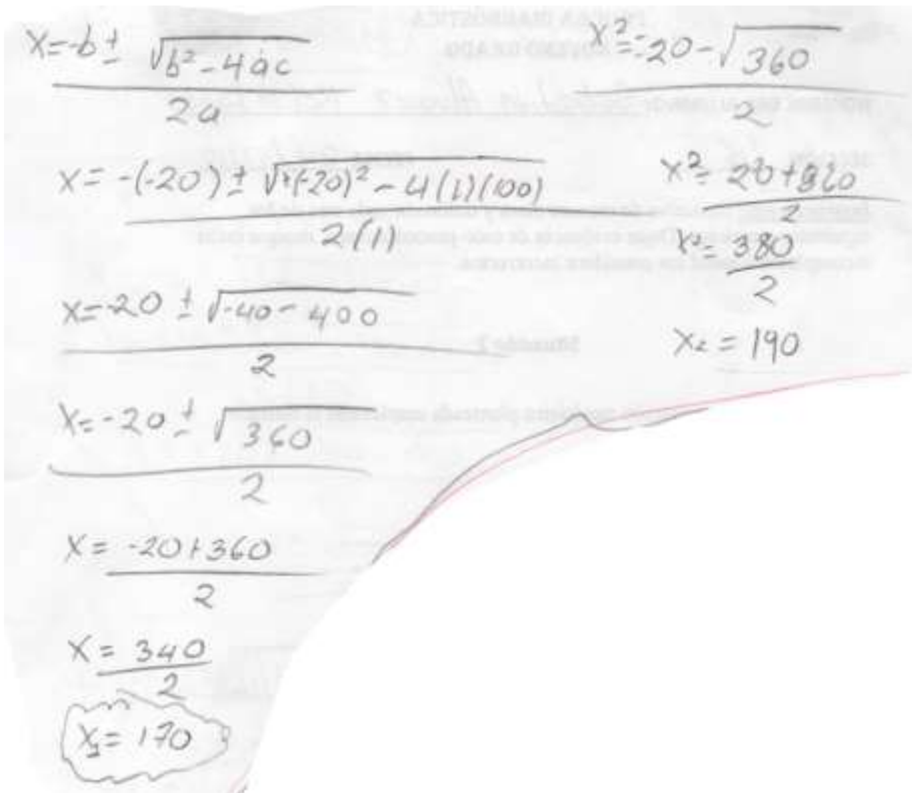


Figura 16 Errores recurrentes en el desarrollo de la parte fraccionaria de la fórmula general.

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

a-3 En este ítem se observa que a pesar que en la situación didáctica uno no se encuentran errores en el cálculo de las potencias vemos como infiere el incluir los demás temas en uno solo ejercicio, pues a pesar de que el ejercicio se ha desarrollado por completo, se cometió un error en el desarrollo de la potencia lo que llevo a una respuesta errónea.

También se cometieron errores al aplicar la ley de los signos para la multiplicación, lo mismo en el determinante para la suma y resta.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(100)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{-40 - 400}}{2}$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{360}}{2}$$

$$x = \frac{-20 + 360}{2}$$

$$x = \frac{340}{2}$$

$$x_1 = 170$$

$$x_2 = \frac{-20 - \sqrt{360}}{2}$$

$$x_2 = \frac{20 + 360}{2}$$

$$x_2 = \frac{380}{2}$$

$$x_2 = 190$$

Figura 17 Errores recurrentes en la ley de los signos.

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

a-4 En este ejercicio se puede apreciar como los alumnos intentan forzar los tratamientos para poder llegar a la respuesta deseada. Al encontrarse con una raíz cuadrada negativa simplemente tomaron el valor de esta como positiva, también se puede observar cómo en varios casos se olvidaron de sacar la raíz cuadrado eliminando simplemente el radical.

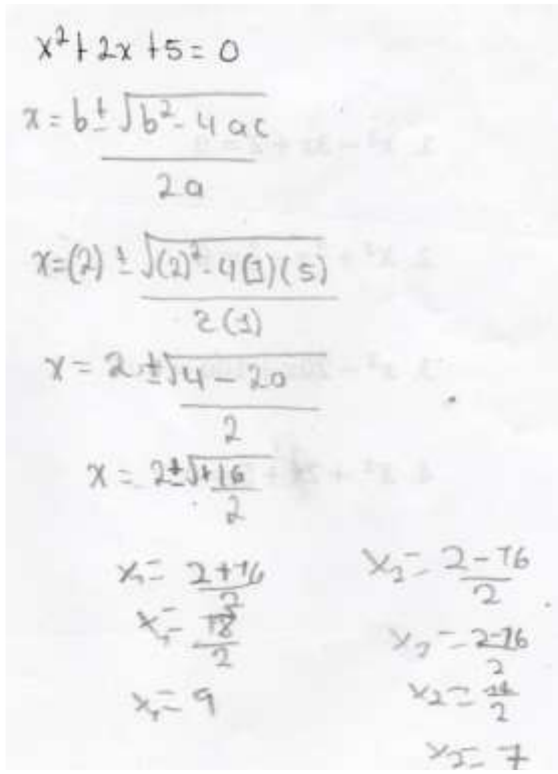


Figura 18 Errores recurrente en el cálculo de la raíz cuadrada con número negativos.

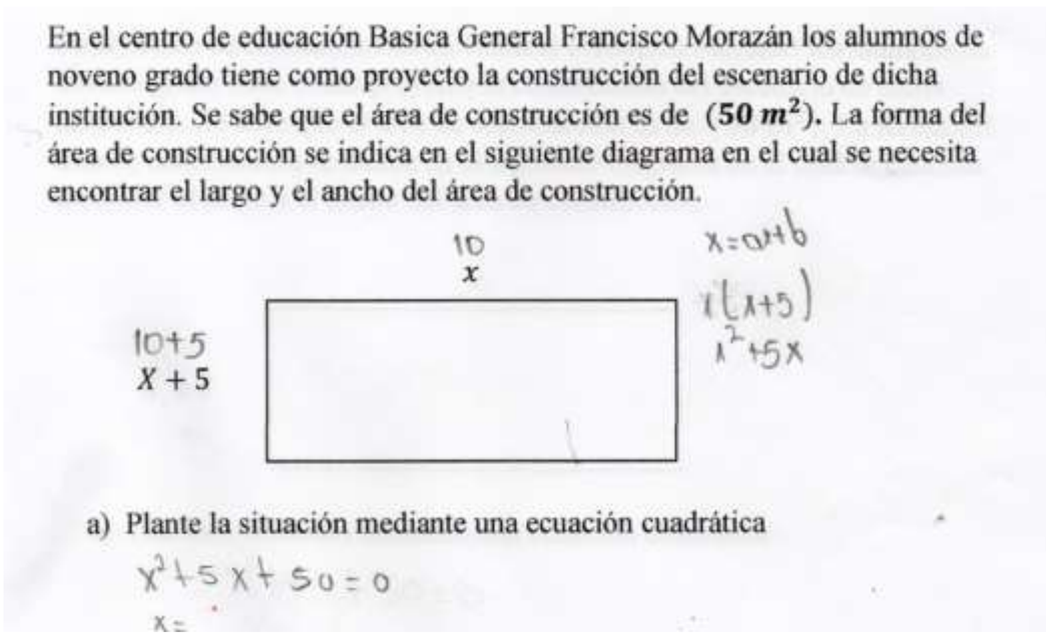
Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

4.1.3. Comportamientos observados en la situación didáctica tres

Tabla 21 Comportamientos observados en la situación tres.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Comportamientos observados
1-a	En este ítem se encontraron dificultades por los alumnos a la hora de convertir el lenguaje natural al algebraico, lo que impidió un desarrollo correcto del ítem.


En el centro de educación Basica General Francisco Morazán los alumnos de noveno grado tiene como proyecto la construcción del escenario de dicha institución. Se sabe que el área de construcción es de $(\mathbf{50}\ \boldsymbol{m^2})$. La forma del área de construcción se indica en el siguiente diagrama en el cual se necesita encontrar el largo y el ancho del área de construcción.

a) Plante la situación mediante una ecuación cuadrática

$x^2+5x+50=0$

$x=$

Figura 19 Errores en el traspaso del lenguaje natural al algebraico.

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

Ítem	Comportamientos observados
1-b	En este ítem no se encontraron hallazgo de interés para esta investigación, aparte de encontrado en las situaciones anteriores.

4.1.4. Comportamientos observados en la situación didáctica cuatro

Tabla 22 Comportamientos observados en la situación cuatro.

Fuente: Elaboración propia.

Ítem	Comportamientos observados
	En este ítem se observó que los alumnos presentan dificultades a la hora de convertir el lenguaje natural a al algebraico y más aun al aplicar el tratamiento algebraico, pues fueron muy pocos los que lograron simplificar la expresión una vez planteada.

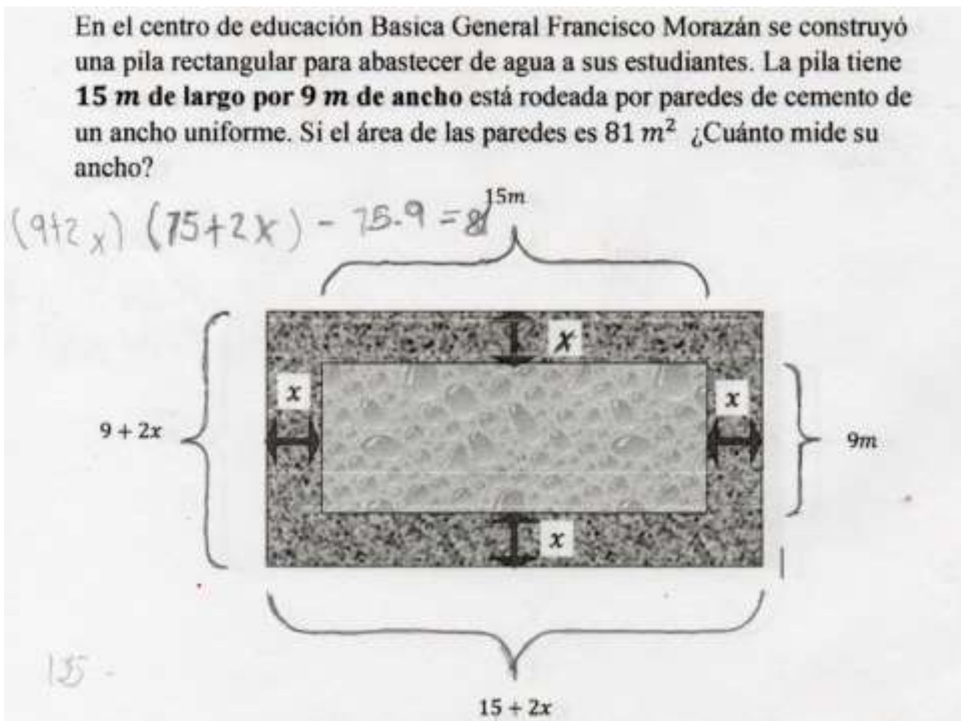


Figura 20 Recurrencia en los errores cometidos en el traspaso del lenguaje natural al algebraico.

Fuente: con base a los desarrollos mostrados por los estudiantes.

4.2.Fase de validación. (análisis a posteriori y validación)

4.2.1. Análisis a posteriori

La siguiente tabla muestra la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de la situación uno

Situación 1

Tabla 23 Confrontación entre al análisis a priori y a posteriori de la situación 1.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Logros/dificultades
1.a-f	• Se observó el comportamiento esperado, es decir se identificó el dominio que poseen los estudiantes al realizar operaciones con enteros la ley de los signos.
2 a-d	• Se observó el comportamiento esperado, pues se detectó que los alumnos pueden realizar operaciones con fracciones, no se encontraron indicios de que el alumno confunda el proceso de multiplicación con el de la división.
3 a-c	• Se observó el comportamiento esperado, pues los alumnos mostraron que poseen el conocimiento sobre el cálculo de potencias, así mismo se identificó que poseen debilidades en el cálculo de las mismas.
4 a-c	• Se observó el comportamiento esperado, pues los alumnos, simplemente consideraron la raíz positiva al calcular la raíz cuadrada y no les fue posible encontrar la raíz cuadrada de un número negativo.
5 a- d	• Se observó el comportamiento esperado, pues se logró detectar el nivel de dominio que poseen los estudiantes sobre introducción al álgebra.

Situación 2

Tabla 24 Confrontación entre al análisis a priori y a posteriori de la situación 2.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	**Logros/dificultades**
• **1-4**	Se observó el comportamiento esperado, debido a que se logró identificar que los alumnos conocen la fórmula cuadrática y saben emplearla para encontrar las soluciones. También se pudo detectar que los alumnos no pudieron desarrollar la fórmula cuadrática al encontrarse con un número negativo en el discriminante.

Situación 3

Tabla 25 Confrontación entre al análisis a priori y a posteriori de la situación 3.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Logros/dificultades
a-b	• Se observó el comportamiento esperado, pues los alumnos mostraron dificultades a la hora de realizar la conversión del lenguaje natural al algebraico, así mismo se encontraron errores recurrentes, pues estos fueron detectados previamente en la situación uno y dos.

Situación 4

Tabla 26 Confrontación entre al análisis a priori y a posteriori de la situación 4.

Fuente: Elaboración propia

Ítem	Logros/dificultades
a-b	• Se observó el comportamiento esperado, pues se encontraron errores recurrentes que fueron detectados en la situación uno, dos y tres. • Se detectó una debilidad mayor en el traspaso del lenguaje natural al algebraico.

4.2.2. Validación de las hipótesis

En este apartado se da respuesta a las hipótesis planteadas en el análisis a priori, sin embargo, como esta investigación es de tipo cualitativa no se plantearon hipótesis de investigación. Se dedicará este espacio a dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas ya que el desarrollo de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori nos brinda la información necesaria para dar respuesta a dichas preguntas.

A continuación, se procede a dar respuesta a dichas interrogantes planteadas al inicio de esta investigación.

1. *¿Cuáles son los conocimientos previos relacionados con la ecuación cuadrática que poseen los alumnos de noveno grado?*

Con base en los estudios realizados, para poder resolver ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática se necesita tener dominio de los siguientes tópicos.

- Dominio de las operaciones básicas con números reales.
- Dominio de la ley de los signos.
- Propiedades de las potencias.
- Ecuaciones lineales.
- Expresiones algebraicas
- Valor numérico de una expresión algebraica
- Aunque no es necesario poder operar con los números complejos, si es necesario poder identificar y escribir un número complejo.
- Conversión y aplicación de tratamiento a los distintos registros

En este mismo sentido la Secretaría de Educación propone la siguiente relación de contenidos.

Figura 21 Relación de contenidos.

Fuente Secretaría de Educación (2011b)

2. *¿Con qué habilidades cuentan los estudiantes de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?*

Teniendo en cuenta que en esta investigación se ha considerado la *comprensión* como la resolución completa y sin errores de las ecuaciones cuadráticas. Los alumnos cuentan con el dominio de los tópicos mencionados en la respuesta del primer interrogante, sin embargo, no se encontró información que indicara que los estudiantes tuvieran dominio o conocimiento alguno de los números complejos, también se detectaron debilidades en la conversión y aplicación de tratamiento a los distintos registros de representaciones, es decir a la hora de pasar del lenguaje natural al algebraico o en otras palabras a la hora de hacer el planteamiento del problema.

3. *¿Cuáles son los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?*

Con base en los hallazgos realizados en el apartado de la fase experimental de esta tesis, y el aporte de Cid (2016) a los estudios de Glaeser (1981) quien enlista los siguientes obstáculos

1. Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas

Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

2. Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.

En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

3. Dificultad para unificar la recta real.

En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a “lo positivo”, pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su ubicación en una ´única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

4. La ambigüedad de los dos ceros

Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D’Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran “menos que nada”.

5. El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.

La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de R a R^+ respetando un principio de permanencia que conservara determinadas “buenas propiedades” de la estructura algebraica de los reales positivos.

6. Deseo de un modelo unificador

Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Con base en los estudios antes mencionados se logró identificar que los alumnos de noveno grado del C.E.B. Gral. Francisco Morazán, cuentan con al menos los dos primeros obstáculos epistemológicos mencionados previamente, sin embargo, se lograron identificar otros obstáculos epistemológicos, dichos obstáculos serán caracterizados a continuación.

- *Obstáculo epistemológico (raíz cuadrada)*

Para poder demostrar que existe un obstáculo epistemológico en el cálculo de la raíz cuadrada es preciso identificar errores recurrentes y demostrar que estos se agrupan alrededor de concepciones, así como también identificar los obstáculos en la historia de la matemática.

Para demostrar que este error tiene antecedentes históricos se cita a Malisani (1999) quien realizó valiosos aportes en su investigación sobre los obstáculos epistemológicos presentes en los números negativos.

> La falta de aceptación de los números negativos por parte de Diofanto, los árabes y los matemáticos europeos hasta el 1500 fue la causa por la cual estos autores evitaban los coeficientes negativos en la formulación de las reglas de resolución y admitían sólo las

> soluciones positivas (las raíces negativas resultaban difíciles de interpretar adecuadamente, en relación con los problemas que permitían resolver). Esto representó un paso atrás respecto al álgebra hindú que consideraba la forma general de la ecuación de segundo grado y, en algunos casos, admitía las raíces negativas (cuando era posible darles una interpretación). De la misma manera, la falta de aceptación de los números complejos hizo que Bombelli no los haya considerado como raíces de ecuaciones. Algunos autores (Bortolotti, 1966) piensan que: "...tal vez las mismas demostraciones y las construcciones geométricas de las soluciones algebraicas de las ecuaciones hayan desviado la atención de los matemáticos (también de Bombelli) de este tipo de raíces". Pero en el Libro IV de *L'Algebra*, Bombelli introdujo los segmentos negativos y las áreas negativas o nulas para poder operar con ellos. Creemos que la verdadera dificultad para aceptar las raíces negativas se encuentre precisamente en los mismos números negativos como obstáculo epistemológico a nivel aritmético (Cfr. Glaeser). (Malisani, 1999.)

En el mismo orden de ideas y con base en los estudios realizados en la fase experimental se pudo observar que los errores en el cálculo de las raíces cuadradas de números negativos presentan un error recurrente en el cálculo de las raíces cuadradas y con base en los estudios realizados por Malisani podemos afirmar que existe un obstáculo en el cálculo de las raíces cuadradas.

Otro obstáculo epistemológico identificado y a caracterizar es el planteamiento del problema (traspaso del lenguaje natural al lenguaje algebraico)

- *Planteamiento del problema*

Antes de comenzar con la caracterización del obstáculo epistemológico es necesario aclarar que *planteamiento del problema* debe de entenderse como la acción que realiza el alumno para pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico/escrito.

Teniendo en cuenta los hallazgos encontrados en la fase experimental se pudo observar que el alumnado cometió errores en el planteamiento del problema, es decir la cantidad de alumnos que pudo realizar el planteamiento del problema fue muy pequeña, así como tratamientos erróneos del lenguaje algebraico. Esto abrió el camino para realizar los antecedentes históricos sobre los errores ante mencionados y tratar de encontrar los errores que cuentan con un registro histórico es decir un error que tiende a resistirse a la hora de ser superado, un error que presenta indicios de ser un obstáculo epistemológico.

Para ello se cuenta con el trabajo de Palarea y Socas (1994) y Malisani (1999) quienes ahondaron entre la diferencia de un obstáculo cognitivo, los errores del álgebra que están en la aritmética y los errores del álgebra debido a características propias del lenguaje algebraico, es en este último donde tomaremos las bases de la justificación para considerar al *planteamiento del problema* como un obstáculo epistemológico.

Para Palarea y Socas, (1994) *Obstáculos cognitivos.* Son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a otros problemas. *Los Errores del álgebra que están en la aritmética* en este apartado hacen referencia a que el significado de los signos empleados es el mismo en ambas ramas de la matemática

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones y dan resultados como éstos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{2+3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2*3} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x*y}$$

2. Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

1.1. Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción), al caso de la multiplicación:

$$3*(4+5)= 3*4 + 3*5 \quad \rightarrow \quad a*(b+c) = a*b + a\cdot c$$

$$3*(4*5)= 3*4*3*5 \quad \rightarrow \quad a*(b*c) = a*b*a*c$$

1.2. La estructura $(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}\bullet \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$ **,** en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$**,** de un modo inconsciente, para los alumnos muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado.

1.3. De la misma forma que con las potencias sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad respecto a la adición o sustracción.

2. Errores relativos al uso de recíprocos

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3+5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2}{3+5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{x+y}$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3*5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x*y}$

3. Errores de cancelación

$\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}$ se extiende a $\frac{x+y}{x+z} = y + z$

$(ax + by) = a + b$

$$\frac{ax + b}{b} = ax$$

$$\frac{ax - b}{a} = x - b$$

Los errores del álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética. Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo = en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal. En el primero (sentido del signo =). aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como $\boldsymbol{4x - 3 = 2x + 7,}$ que sólo es verdadera cuando $\boldsymbol{x = 5.}$ A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen a la ecuación verdadera.

En este mismo orden de ideas Malisani, (1999) nos brinda sus estudios sobre los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, donde a través de sus análisis históricos se puede apreciar la necesidad que presentan los diferentes métodos de resolución para las ecuaciones, en recurrir a otros tipos de lenguaje, llámense estos lenguaje natural, aritmético y geométrico. Se puede apreciar la necesidad de Diofanto, al-Khayyam los matemáticos chinos, egipcios, hindúes, árabes y medievales contaban con un nivel de desarrollo del lenguaje algebraico muy escaso, por lo que les era necesario recurrir a lenguajes como: el natural, aritmético, geométrico y/o analítico para de esta manera poder obtener la solución del problema a partir de la interpretación de los procedimientos efectuados.

> en la fase de transición entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico, ciertos obstáculos a nivel aritmético pueden retardar el desarrollo del lenguaje algebraico y la introducción de nuevas estrategias y de nuevos contenidos algebraicos puede eclipsar los conocimientos aritméticos anteriores (Malisani, 1990)

Sobre la base de las consideraciones anteriores se ha decidido considerar al *planteamiento del problema”* como un obstáculo epistemológico presente en los alumnos del noveno grado del Centro de Educación Básica General Francisco Morazán.

4. *¿Cómo se interpretan los resultados obtenidos de la implementación de la situación didáctica en los alumnos de noveno grado para comprender situaciones que requieran de una ecuación cuadrática?*

Se ha considerado interpretar los resultados en primera instancia como indicadores de posibles obstáculos epistemológicos, de los cuales se han caracterizados dos obstáculos epistemológicos siguientes la noción propuesta por de Guy Brousseau y se han detectados diversos obstáculos epistemológicos de los cuales ya se contaba con un registro previo sobre ellos. En segunda instancia como un indicador de las falencias y debilidades presente en los alumnos sobre la temática previa a la resolución de la ecuación cuadrática, para poder reforzar estas debilidades previamente identificadas ya que, de no reforzar estas debilidades, el número de errores presentes en la resolución de la ecuación cuadrática aplicando la fórmula cuadrática y por ende la comprensión sobre la misma bajo la perspectiva de esta investigación se ven afectadas por estas debilidades

> Por un lado, el uso del lenguaje aritmético favorece el desarrollo del lenguaje algebraico, pero por el otro, puede representar una fuerte limitación. Así, por ejemplo, se supone que los laboriosos y complicados cálculos que los egipcios efectuaban con las fracciones fueron uno de los motivos por el cual el lenguaje algebraico utilizado no pudo superar el primer nivel de desarrollo (Malisani, 1999, p. 17)

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Con base en los estudios realizados en la fase experimental y el análisis a posteriori se brindan las siguientes conclusiones con el fin de responder a los objetivos planteados.

1. Determinar los conocimientos previos en temas relacionados con la ecuación cuadrática.

En este sentido, el dominio de los temas, previo a la resolución de la ecuación cuadrática juega un papel importante para la comprensión del mismo. Se identificaron alumnos que muestran falencias en el domino de los tópicos en cuestión, lo que impulsó a que estos recurrieran a errores en mayor cantidad que el resto del salón de clases.

Ahora bien, es conveniente presentar de manera explícita los conocimientos previos determinados en relación a la resolución de la ecuación cuadrática empleando la fórmula general:

- Dominio de las operaciones básicas con números reales.
- Dominio de la ley de los signos.
- Propiedades de las potencias.
- Ecuaciones lineales.
- Expresiones algebraicas
- Valor numérico de una expresión algebraica
- Aunque no es necesario poder operar con los números complejos, si es necesario poder identificar y escribir un número complejo.
- Conversión y aplicación de tratamiento a los distintos registros

2. Diseñar situaciones didácticas que requieran de una ecuación cuadrática.

Se logró diseñar una secuencia didáctica comprendida por cuatro situaciones didácticas, cada una de las situaciones didáctica se implementó siguiendo la metodología de aplicación propuesta por Guy Brousseau que tiene por nombre Situación Validación**,** con el fin de determinar los conocimientos sobre los tópicos previos a la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, así como identificar y caracterizar los obstáculos epistemológicos existentes en la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática. Este instrumento demostró que cumple con sus objetivos para los cuales fue diseñado. Esto gracias al empleo de la ingeniería didáctica como metodología de investigación lo cual facilitó su validación.

3. Analizar los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes en la comprensión de la resolución de la ecuación cuadrática.

Con base en los estudios realizados en esta investigación se puede afirmar que los obstáculos epistemológicos influyen en la comprensión de la ecuación cuadrática. Es importante aclarar que estos obstáculos se ven reflejados en mayor cantidad debido a que dentro de la temática de las ecuaciones cuadráticas existen diversos tópicos como los números negativos y el lenguaje algebraico, que cuentan con un registro de obstáculos epistemológicos previo. Por lo que se puede afirmar que si se sigue enseñando esta temática como lo recomiendan los cuadernos de trabajo de la Secretaría de Educación el alumnado tendera a caer con facilidad en estos obstáculos epistemológicos.

Si a los obstáculos epistemológicos mencionados anteriormente le sumamos los propios obstáculos presenten en la resolución de la ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, nos daremos cuenta que la probabilidad de generar estos obstáculos epistemológicos en los alumnos es bien elevada

Con este estudio podemos dar fe de las afirmaciones realizadas por Brousseau quien reconoce que Bachelard es el primer autor que habla de obstáculos y que los estudia en ciencias físicas, manifiesta que la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: a Didáctica, a Psicología, etc.

> La investigación sobre obstáculos epistemológicos en matemáticas ciertamente requiere un esfuerzo de invención porque el concepto de Bachelard está poco adaptado a este dominio. Pero puede demostrar ser fructífero para la enseñanza en la medida en que:
>
> 1. los obstáculos en cuestión están verdaderamente identificados en la historia de las matemáticas.
> 2. se han rastreado en modelos espontáneos de los estudiantes;
> 3. las condiciones pedagógicas de su "derrota" o su rechazo se estudian con precisión de tal manera que se pueda proponer un proyecto didáctico preciso para maestros;
> 4. la evaluación de dicho proyecto puede considerarse positiva. (Brousseau, 1970-1900).

Como se puede observar en este estudio se ha podido cumplir con los dos primeros requisitos planteados por Brousseau brindando la oportunidad de poder darle seguimiento a la investigación hasta cumplir con las dos fases restantes.

4. Validar los resultados obtenidos a través de las situaciones didácticas.

La validación de los resultados obtenidos se demostró en la fase de validación de la ingeniería didáctica (en el capítulo 4 de esta investigación) donde como resultado se obtuvo una secuencia didáctica con la cual se pretende erradicar/combatir los obstáculos epistemológicos como lo son: el obstáculo epistemológico presente en el cálculo de las raíces de números negativos y el traspaso del lenguaje natural al algebraico.

5.2 Recomendaciones

1. A los docentes del Centro De Educación Básica General Francisco Morazán, se les exhorta a realizar investigaciones que les permitan diseñar estrategias didácticas que contribuyan a mejorar el nivel de desempeño estudiantil.
2. A la comunidad educativa, se recomienda retomar esta investigación con el fin de demostrar que esta indagación podría resultar fructífera para la educación, en la medida que se cumplan las dos etapas restantes propuestas por Brousseau (mencionadas en las terceras conclusiones de este trabajo de investigación).
3. A la Secretaría de Educación, es necesario agregar en el DCNB y por consiguiente en el cuaderno de trabajo, un acercamiento al conjunto de los números complejos y fortalecer el traspaso del lenguaje natural al algebraico (introducción al álgebra) debido a que fue en estos tópicos donde se detectaron los errores que presentaron indicios de convertirse en un obstáculo epistemológico, lo que se logró confirmar con el desarrollo de esta investigación.
4. A la universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y específicamente al Departamento de Investigación y Postgrado, se les exhorta: a continuar con el mismo ímpetu en la dinámica de desarrollo del programa de maestría en Matemática

Educativa. En cuanto a las líneas de investigación institucionales (estudios disciplinares y vinculación social por mencionar alguna); incorporar una nueva visión paradigmática propia de la matemática educativa, con el fin de fortalecer los trabajos de investigación a presentar.

Es de mucha relevancia consolidar a la matemática educativa como una disciplina al servicio institucional y de la sociedad hondureña, por lo cual, el desarrollar trabajos de investigación vinculantes al accionar docente dentro del aula de clases, sin duda, podrían repercutir de manera positiva en el escenario educativo.

Referencias

Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integracion*, 173-189.

Alarcón Vasco, S. (2005). Evidencia de un obstáculo epistemológico. *Revista Tecno Lógicas*, 65-75.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pág. 140). Bogotá: D. R. © 1995 una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Atienza, B. G. (26 de 06 de 2012). *La historia de las matemáticas.* Obtenido de Ucrea Repositorio abierto de la universidad de cantabria: https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/1764

Ávila, J., Parra, F., & Ávila, R. (2012). Epistemología y didáctica de la matemática. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME 25)*, (págs. 775-783).

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu cietífico.* Mexico, D.F.: siglo ventiuno edi tores, s.a. de c.v.

Baldor, A. (2008). *Álgebra.* La Habana: Grupo Editorial Patria.

Briceño, E. C., & Sánchez, L. A. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *Revista investigacion educativa de la rediech*.

Brousseau, G. (1970-1900). Theory of Didactical Situations in Mathematics. En G. Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (pág. 327). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Articulos de Investigacion*, 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciacion al Estudio de la teoria de las situaciones didacticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (s.f.). *http://daest.pagesperso-orange.fr/Pages%20perso/Brousseau.htm.* Obtenido de http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Campos, E. D. (2006). Ingenieria didactica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

Chevallard, Y. (1998). *La transposicion didactica del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE.

Cid, E. (2016). Obstáculos Epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. España, Universidad de Zaragoza.

Contreras Oré, F. (2012). La Evolución de la Didáctca de la Matemática. *Horizonte de la Ciencia*, 20-25.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite. Conception et Obstacle. *IREM Grenoble*.

Cuicas Ávila, M., Debel Chourio, E., Casadei Carniel, L., & Alvarez Vargas, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 1-34.

Española, R. A. (21 de 07 de 2018). *Diccionario de la Lengua Española*. Obtenido de http://dle.rae.es/?id=2hmIQ1x

Gairín, J. M., & Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *SUMA*, 35-48.

Gallardo, A., & Mejía, J. L. (2015). Los números negativos ¿constituyen un obstáculo epistemológico persistente? *Acta LatinoAmericana de Marematica Educativa (ALME 28)*, (págs. 190-197).

Gascon, j. (1998). Evolucion de la Didactica de las Matematicas Como Disciplina Cientifica. *Recherches en Didactique des mathematiques*, 7-33.

Glaeser, G. (1981). Epist´emologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Math´ematiques*, 303-346.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*, 49-69.

Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación.* Mexico D.F: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Lezama, J., & Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 4, núm. 2*, 161-193.

Llobet, J. M., & Piquet, J. D. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raices cuadradas. *Educacion matematica*, 87-106.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *IRICE (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche)*.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2016). *TIMSS 2015. Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias.* Madrid: SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA.

Naranjo, M., & Moran, R. (2011). *Los obstáculos epistemológicos en el proceso de aprendizaje del límite de funciones matemáticas.* Maracaibo.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (s.f.). *http://unesdoc.unesco.org.* Obtenido de http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002448/244855S.pdf

Ortiz, A. (2005). *Historia de la matemática "la matemática en la antiguedad".* Lima, Perú: Lima- Perú.

Osorio, C. R. (2016). Obstáculos epistemológicos en el conocimiento probabilístico. *REVISTA CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN*, 232-249.

Palarea, M., & Socas, M. (s.f.). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *universidad de la laguna*.

Rodríguez, H. A. (2008). El desarrollo científico: una lucha entre la ceguera del conocimiento y las barreras epistemológicas. *Eos Magazine, No. 2*, 55-75.

Secretaría de Educación. (2011a). *Estándares educativos nacionales español y matemáticas 1º a 11º grado.* Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2011b). *Matemáticas 9º, Guias para docentes y cuadernos de trabajo.* Tegucigalpa.

Secretaría de educacion. (2011c). *Diseño curricular nacional para la educación básica (tercer ciclo).* Tegucigalpa.

Secretaría de Educacion. (2011d). Programaciones Educativas Nacionales Matemáticas.

Secretaría de Educación, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Agencia de Cooperación Internacional del Japón. (2011). *Matemáticas 7º, Guías para Docentes y Cuadernos de trabajo.* Tegucigalpa, Honduras: INICE.

Secretaría de Educación. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. (2016). Informe Nacional de Desempeño Académico 2016 Español y Matemáticas. 1° a 9° grado. 88.

Sierpinska, A. (1985). bstacles Epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* .

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 133-170.

Zúñiga, Á. R. (2003). *Historia y filosofia de las matemáticas.* EUNED.