

Universidad Pedagógica Nacional  
Francisco Morazán  
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado  
Dirección de Postgrado  
Maestría en Matemática Educativa



Tesis de Maestría

DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE SE  
MODELAN MEDIANTE ECUACIONES LINEALES: UNA PROPUESTA  
DIDÁCTICA EN BASE AL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA

Tesista

David Armando Ordóñez Tabora

Asesor de Tesis

Ph.D. Edgar Vásquez Alberto

San Pedro Sula, marzo de 2019.



**DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE SE MODELAN  
MEDIANTE ECUACIONES LINEALES: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN  
BASE AL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA**

Universidad Pedagógica Nacional  
Francisco Morazán  
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado  
Dirección de Postgrado  
Maestría en Matemática Educativa



DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE SE MODELAN  
MEDIANTE ECUACIONES LINEALES: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN BASE  
AL MÉTODO HEURÍSTICO DE POLYA

Tesis para obtener el título de  
Master en Matemática Educativa

Tesista

David Armando Ordóñez Tabora

Asesor de Tesis

Ph.D. Edgar Vásquez Alberto

San Pedro Sula, marzo de 2019

## AUTORIDADES

Ph.D. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA.**  
Rector

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO.**  
Vicerrectora Académica

M.Sc. **NAHUM ALFREDO VALLADARES CARRANZA.**  
Vicerrector Administrativo

Ph.D. **ROSARIO BUEZO VELÁSQUEZ.**  
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA.**  
Vicerrector del CUED

M.Sc. **BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA.**  
Secretario General

Ph.D. **ESTELA ROSINDA ÁLVAREZ MARTÍNEZ.**  
Directora de Postgrado

San Pedro Sula, marzo de 2019

## Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, como requisito para optar al grado académico de Máster en Matemática Educativa

San Pedro Sula, 5 de marzo de 2019

---

M.Sc. Francisco Sánchez Cabrera  
Examinador presidente

---

M.Sc. Mario Roberto Canales Villanueva  
Examinador

---

M.Sc. Rafael Eduardo Pacheco Cano  
Examinador

---

Lic. David Armando Ordóñez Tabora  
Tesisista

## **Dedicatoria**

A mi madre, Virna Tabora, que siempre se esforzó por que fuera un  
hombre de bien.

A mi esposa Michelle, por comprenderme al ausentarme y apoyarme  
para poder culminar el trabajo.

A mi hija Fernanda por inspirarme y motivarme con su hermosa  
sonrisa.

## **Agradecimientos**

A Dios Todopoderoso, por sus bendiciones a mi vida y mi familia.

A mi asesor, Ph.D. Edgar Vásquez Alberto por su apoyo, motivación y  
guía durante la realización del trabajo.

A mis amigos por ser parte motivadora para la culminación de este  
trabajo.

## Índice General

Dedicatoria	1
Agradecimientos	2
Introducción	8
1. Planteamiento del problema	15
1.1 Objetivos	20
1.1.1 Objetivo general:	20
1.1.2 Objetivos específicos:	20
1.2 Preguntas de investigación	21
1.3 Justificación	21
2. Marco teórico	26
2.1 Corrientes pedagógicas para el aprendizaje	26
2.1.1 Constructivismo	30
2.1.2 Cognoscitivismo	31
2.1.3 Las NTIC's	34
2.2 Resolución de problemas	36
2.2.1 Modelo heurístico de Polya para la resolución de problemas	41
2.2.2 Otros modelos para resolver problemas	45
2.3 Modelización matemática	47
2.3.1 Ecuaciones lineales con una incógnita	50
2.4 Propuesta	63
3. Marco Metodológico	72
3.1 Enfoque, diseño y tipo de investigación.	72
3.2 Población y Muestra	75
3.3 Operacionalización de Variables	77
3.4 Técnicas de recolección	81
3.5 Plan de análisis	84
4. Análisis y discusión de resultados	89
4.1 Prueba piloto	89
4.2 Aplicación de la propuesta mejorada	103
4.2.1 Discusión de los errores y observaciones del pretest	103
4.2.2 Discusión del desarrollo de la propuesta por etapas	117

4.2.3	Discusión de los errores y observaciones del postest -----	155
4.2.4	Comparación de resultados del pretest y postest -----	163
4.2.5	Percepción de la propuesta -----	164
5.	Conclusiones y recomendaciones -----	171
5.1	Conclusiones -----	171
5.2	Recomendaciones -----	174
	Propuesta metodológica para la enseñanza de resolución de problemas de ecuaciones lineales con una incógnita. -----	176
	Introducción: -----	176
	Objetivos de la propuesta -----	177
	Justificación: -----	178
	Fundamentación teórica -----	179
	Estrategias didácticas -----	182
	Etapa 1: Comprensión del problema -----	183
	Etapa 2 y 3: Formulación y ejecución de un plan -----	186
	Cierre: clase magistral -----	193
	Consideraciones metodológicas -----	195
	Bibliografía -----	198
	Anexos -----	203
	Anexo 1: Entrevista -----	203
	Anexo 2: Pretest -----	204
	Anexo 3: Pauta de pretest -----	205
	Anexo 4: Postest -----	209
	Anexo 5: Propuesta -----	210
	Anexo 6: Asignaciones -----	215
	Anexo 7: Campus virtual -----	217
	Anexo 8: Instrumentos para evaluación de la propuesta -----	218

### Índice de tablas

Tabla 1:	Modelos de resolución de problemas matemáticos _____	45
Tabla 2:	Ordenamiento de datos de ejercicio _____	60
Tabla 3:	Operacionalización de variables _____	77
Tabla 4:	Distribución original de la propuesta _____	82

Tabla 5: Desarrollo de la propuesta en el pilotaje_____	82
Tabla 6: Categorías de la entrevista _____	85
Tabla 7: Indicadores de las dimensiones _____	86
Tabla 8: Categorización de errores_____	87
Tabla 9: Distribución de tiempo de la propuesta_____	90
Tabla 10: Errores en el pretest en pilotaje _____	90
Tabla 11: Datos del pretest en pilotaje _____	91
Tabla 12: Errores en el postest en pilotaje _____	92
Tabla 13: Datos del postest en pilotaje_____	93
Tabla 14: Observaciones en pilotaje_____	97
Tabla 15: Modificación en la redacción de indicadores _____	102
Tabla 16: Datos del pretest_____	104
Tabla 17: Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 1) _____	118
Tabla 18: Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 2 y 3)_____	130
Tabla 19: Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Etapa 2 y 3) _____	136
Tabla 20: Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 4) _____	142
Tabla 21: Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Etapa 4) _____	146
Tabla 22: Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Todo el proceso) ____	148
Tabla 23: Datos del postest_____	155
Tabla 24: Etapas cumplidas del proceso (Postest)_____	161
Tabla 25: Comparación pretest - postest _____	163
Tabla 26: Comparación opiniones de la propuesta estudiantes - docentes_____	166

### Índice de figuras

Figura 1: Representación pictográfica (mezclas) _____	56
Figura 2: Representación pictográfica (cinemática) _____	60
Figura 3: Diagrama del proceso investigativo_____	75
Figura 4: Errores en primera aplicación de la metodología _____	96
Figura 5: Error en el problema de mezclas 1 _____	106
Figura 6: Error en el problema de mezclas 2 _____	106
Figura 7: Error en el problema de mezclas 3 _____	107
Figura 8: Error en el problema mezclas 4 _____	108
Figura 9: Error en problema de función compuesta 1 _____	109
Figura 10: Error en problema de función compuesta 2 _____	110
Figura 11: Error en problema de función compuesta 3 _____	111
Figura 12: Error en problema de proporcionalidad simple 1_____	112
Figura 13: Error en problema de proporcionalidad simple 2_____	112
Figura 14: Error en problema de proporcionalidad simple 3_____	113

Figura 15: Error en problema de función afín 1 _____	114
Figura 16: Error en problema de función afín 2 _____	114
Figura 17: Error en el segundo problema grupal grupal _____	119
Figura 18: Error en el primer problema grupal _____	120
Figura 19: Error en el primer problema 1 _____	122
Figura 20: Error en el primer problema 2 _____	122
Figura 21: Error en el primer problema 3 _____	123
Figura 22: Error en el segundo problema 1 _____	124
Figura 23: Error en el segundo problema 2 _____	124
Figura 24: Error en el segundo problema 3 _____	125
Figura 25: Error en el tercer problema 1 _____	126
Figura 26: Error en el tercer problema 3 _____	126
Figura 27: Error en el cuarto problema 1 _____	128
Figura 28: Error en el cuarto problema 2 _____	128
Figura 29: Error en el primer problema 1 (grupal) _____	130
Figura 30: Error en el primer problema 2 (grupal) _____	131
Figura 31: Error en el primer problema 4 (grupal) _____	131
Figura 32: Error en el primer problema 3 (grupal) _____	132
Figura 33: Error en el segundo problema 1 (grupal) _____	134
Figura 34: Error en el segundo problema 2 (grupal) _____	134
Figura 35: Error en el problema 1 (asignación individual) _____	137
Figura 36: Error en el problema 2 (asignación individual) _____	138
Figura 37: Error en el problema 3 (asignación individual) _____	139
Figura 38: Error en el problema 4 (asignación individual) _____	140
Figura 39: Identificación de error (etapa 4) _____	144
Figura 40: Error trabajo grupal 1 (etapa 4) _____	144
Figura 41: Error trabajo grupal 2 (etapa 4) _____	145
Figura 42: Error trabajo grupal 3 (etapa 4) _____	146
Figura 43: Errores en el segundo problema del postest 1 _____	156
Figura 44: Errores en el segundo problema del postest 2 _____	157
Figura 45: Errores en el tercer problema del postest 1 _____	158
Figura 46: Errores en el tercer problema del postest 2 _____	159

### Índice de gráficos

Gráfico 1: Comparación de ejercicios trabajados _____	94
Gráfico 2: Comparación de ejercicios correctos _____	95
Gráfico 3: Cumplimiento de indicadores (Etapa 1) _____	99
Gráfico 4: Cumplimiento de indicadores (Etapa 2 y 3) _____	100
Gráfico 5: Errores del pretest _____	115

Gráfico 6: Cumplimiento de fases en el pretest _____	116
Gráfico 7: Cumplimiento de indicadores de etapa 1 (Trabajo individual 1) ____	121
Gráfico 8: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 5) _____	149
Gráfico 9: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 6) _____	150
Gráfico 10: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 7) ____	151
Gráfico 11: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 8) ____	152
Gráfico 12: Cantidad de ejercicios correctos y trabajados (Asignación final)____	154
Gráfico 13: Errores en el postest _____	160
Gráfico 14: Cumplimiento del proceso en el postest _____	162

## Introducción

En un mundo cambiante, la educación debe ir transformándose de manera que pueda lograr su fin primordial, el desarrollo integral del individuo, tomando en cuenta diferentes aspectos y variaciones que puedan ocurrir en la sociedad. Variaciones particularmente influenciadas con el desarrollo y avances científicos de la sociedad en general, las cuales demandan un cambio en los conocimientos y capacidades que el individuo debe desarrollar en los procesos educativos.

En la educación matemática el alto porcentaje de fracaso que presentan los estudiantes es evidente, situación que se ha convertido en una preocupación manifiesta por los educadores (Orrantia, 2006). Además el desarrollo tecnológico demanda mayores niveles de competencias matemáticas, por lo que se requieren de estrategias que estén a tono con las exigencias sociales y busquen disminuir las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas.

Particularmente, en la resolución de problemas, donde se requiere un manejo de conocimientos previos, interpretación y comprensión de situaciones planteadas, adaptación a un objeto matemático y un análisis para construir dicho objeto, surgen dificultades durante el proceso. Las cuales según Muñoz Ríos (2008), son expuestas debido a que se requiere, más allá de un proceso mecánico, un mayor análisis. En ese sentido, es necesario poner en práctica estrategias que faciliten la comprensión y promuevan el análisis de diferentes situaciones.

Para ello se requieren determinar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar un problema para que, con base en estas, se puedan construir estrategias metodológicas eficientes que permitan llegar a la solución correcta en cada problema buscando la disminución de las dificultades que se presenten.

Con respecto a esto diferentes autores han estudiado y analizado las dificultades al resolver problemas matemáticos, mostrando la necesidad de guiar el proceso de resolución de problemas en todos los niveles educativos (Barroso & Rodríguez Ortiz, 2007; Sanjosé, Valenzuela, Fortes, & Solaz-Portolés, 2007; Boscan Mieles & Klever Montero, 2012; Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, & Flores, 2013; Chavarría, 2014). Sin embargo la mayoría de estudios que abordan la temática de resolución de problemas lo enfocan para el nivel primario o secundario, considerando que en estos niveles es donde se desarrolla por primera vez la metodología con otros contenidos. Pero además resulta relevante analizar dicha problemática en el contexto superior, donde se supone que el estudiante ya posee ciertas competencias para resolver problemas, lo que permite analizar aquellos conocimientos y competencias no desarrollados en etapas educativas previas y además formalizar el contenido considerando el currículo superior.

En ese sentido, el modelo educativo de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) manifiesta que posee un enfoque en la resolución de problemas (UNAH, 2009: 46), donde es necesario establecer estrategias de mejora para los procesos educativos. Sin embargo, en las asignaturas de

matemáticas, los índices de reprobación son altos, particularmente en clases que poseen requisitos de aprobación de otras asignaturas, así lo establecen los informes de asignaturas que posee el departamento de matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras en el Valle de Sula (UNAH-VS). Por lo que establecer procesos de mejora en clases bases implicaría una mejora para el aprendizaje en asignaturas posteriores.

Una de las asignaturas básicas que cursan los estudiantes de la UNAH matriculados en las carreras de ingeniería y licenciatura en Matemática, Física y Química es Matemática 1 (MM-110), la cual aborda tópicos de álgebra, ecuaciones y funciones, los cuales son complementados con aplicaciones de diferentes áreas como ser economía, física, química, o problemas cotidianos que exponen un enunciado verbal para ser resuelto matemáticamente. Siendo una de las mayores dificultades la resolución de estas aplicaciones, donde se debe plantear un proceso de resolución de problemas.

En la resolución de problemas autores como Cifuentes et. al (2013), Boscan y Klever (2012) y Guerrero (2015), por mencionar algunos, concuerdan que una de las mayores dificultades al momento de resolver un problema radica en la comprensión de lo que establece el enunciado. Aspecto fundamental para lograr realizar un abordaje correcto del mismo. Además añaden que la traducción al lenguaje matemático es otra problemática común, por lo que es necesario crear procesos que ayuden a los estudiantes a poder trabajar e identificar errores en estos aspectos.

Por tales razones la presente investigación busca determinar las dificultades que presentan los estudiantes al tratar de resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales con una incógnita, donde a partir de un enunciado verbal se busca construir una ecuación que permita obtener la respuesta a lo establecido en dicho enunciado, conocidos generalmente como aplicaciones. Además propone una metodología que guía al estudiante a modelar matemáticamente, diferentes situaciones expuestas verbalmente, considerando como base de la propuesta el método de cuatro fases establecido por George Polya (1945).

Para ello se realiza un estudio mixto donde se considera determinar la calidad de la propuesta y el análisis de las dificultades en los estudiantes antes, durante y al final de la propuesta, con el fin de brindar alternativas que permitan en poco tiempo sistematizar el proceso de enseñanza para que se desarrolle la comprensión que se requiere en cada individuo.

La implementación de una propuesta metodológica, en coherencia con los autores Bueno (2012), Boscan y Montero (2012), Flores Valdés (2012) y, Barroso y Rodríguez (2007) resulta necesaria, pues logra sistematizar un proceso para orientar el aprendizaje. En particular, el estudio genera una forma para guiar el proceso de la modelación matemática por medio de ecuaciones lineales. Buscando así el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo en el estudiante a través de la instrucción y secuencia para la estructuración de un modelo propio a lo que establece el enunciado del problema.

Dentro de la propuesta se establecen diferentes maneras de trabajar para hacer de forma integral el proceso. Se considera un trabajo colaborativo, en el cual los estudiantes se enfrentan a diferentes problemas y en consenso con los miembros de su grupo concluyen en algo, todo esto mediante instrucciones claras y ayudas por parte del profesor por medio de preguntas orientadoras. Además se cuenta con un espacio virtual por medio del cual se podrá facilitar previamente los problemas a abordar para que, inicialmente, en forma individual cada estudiante lo analice y en el trabajo presencial lo discuta con su grupo; este espacio sirvió también como el medio para recabar cierta información cualitativa para cada proceso, por medio de encuestas de opinión. Y como tercer componente se consideran asignaciones individuales, las cuales se desarrollaron en todo el proceso, para dar un seguimiento más completo del mismo.

Lo anterior resalta parte de lo novedoso del estudio, pues considera el trabajo colaborativo, trabajo individual y recursos virtuales. Abonando a ello, el proceso se enmarca en la instrucción por etapas bien definidas, con ayuda docente a través de preguntas de análisis y/o analogías que permitirá inducir al estudiante a la respuesta. En otras palabras la propuesta desarrolla una forma de implementar el constructivismo considerando diferentes estrategias para un proceso, situación que dentro del entorno de la institución es poco documentado o estudiado.

Con ello se logra que las dificultades detectadas en el estudiantado, a partir de la prueba diagnóstica, se disminuyan por medio del proceso sistemático y analítico propuesto. Además por considerar una estrategia para resolver

problemas, esta puede ser aplicada en cualquier tema donde busquen, a partir de un enunciado verbal, encontrar la solución a una problemática, impactando directamente en el aprendizaje del estudiante.

El presente trabajo está dividido en cinco capítulos, donde en el capítulo 1 se expone la problemática de estudio, el contexto de la misma, los objetivos que guiaron el proceso investigativo y las aportaciones potenciales del estudio a la mejora de la educación superior en cuanto a la resolución de problemas.

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos del estudio, exponiendo los enfoques pedagógicos adoptados para la propuesta y los aspectos claves de cada uno de ellos. Así como los referentes teóricos de la resolución de problemas y sus diferentes concepciones; el proceso de modelización matemática, junto con las deficiencias y necesidad de orientar dicho proceso. Finalizando con la categorización de los problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales y un análisis de como los textos los abordan.

En el capítulo 3 se expone el proceso metodológico que sigue el estudio para lograr los objetivos planteados, argumentando la concepción del mismo mediante los aspectos teóricos y las pretensiones del autor. Además se expone la muestra considerada para el estudio junto con las técnicas de recolección de datos, operacionalización de variables y el proceso de análisis que se siguió para los resultados.

En el capítulo 4 se desarrolla el ordenamiento y análisis de los resultados en cada etapa del estudio. Estableciendo discusión de los datos con los referentes

teóricos y comparaciones en las etapas iniciales y finales del proceso. El análisis se orienta bajo dos enfoques, cuantitativo y cualitativo, bajo un orden secuencial y mostrando aspectos importantes del proceder de los estudiantes. Por último se analizan las opiniones de estudiantes y docentes para conocer la percepción de la propuesta por parte los actores principales de la misma.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones encontradas mediante el análisis de datos y las recomendaciones surgidas en el desarrollo de la investigación.

Por último se expone la bibliografía y los instrumentos y herramientas utilizados en el estudio como ser pruebas, asignaciones y recursos virtuales.

## 1. Planteamiento del problema

La educación en general es una temática de sumo interés para las sociedades, “permite que cada ser humano adquiera los conocimientos, las competencias, las actitudes y los valores necesarios para forjar un futuro sostenible” (UNESCO, 2005, párr. 1). Por ello resulta fundamental analizar los factores que dificulten el avance de la educación de calidad, y a su vez desarrollar propuestas que contribuyan a una mejora constante de la misma.

Es así como muchos pedagogos, psicólogos, filósofos, matemáticos y profesionales de diferentes áreas se han dedicado a desarrollar modelos o propuestas para mejorar el progreso de los individuos en su educación. Enfocándose de acuerdo a la temática de su interés o profesión para un bien común, la mejora de la calidad educativa.

En torno a la temática educativa, la educación matemática cobra un valor significativo, basta observar que las pruebas de conocimiento para ser admitidos en instituciones de educación superior consideran tópicos matemáticos en sus categorías de análisis; mostrando que el conocimiento matemático básico debe estar presente en el individuo. Además, las matemáticas permiten el desarrollo de la lógica (inteligencia lógico – matemático) formando en el individuo el pensamiento crítico y reflexivo, así lo afirman Peñalva, Ysunza & Fernández (2008) al concluir que:

*El manejo de modelos simbólicos apunta al uso de una lógica dialéctica en la cual intervienen no sólo los conocimientos y*

*habilidades sino la movilización de actitudes de descubrimiento y diálogo interno que van construyendo un espíritu crítico, un análisis reflexivo, un pensamiento creativo. (17)*

Dentro de los alcances que la enseñanza de las matemáticas debe poseer, el desarrollo de una capacidad de análisis en el individuo es uno de los principales. Sin embargo se han encontrado dificultades en la enseñanza de esta ciencia. La UNESCO, por ejemplo, manifiesta que,

*Las Matemáticas son una ciencia extremadamente valiosa, que ha acompañado a la humanidad por milenios y que ha permitido que veamos el mundo desde perspectivas nuevas. Mediante las matemáticas comprendemos –y por lo tanto domeñamos– el universo. Pero, desgraciadamente, son una ciencia invisible en sus aplicaciones. El único contacto que muchos ciudadanos tienen con ella se produce durante la enseñanza secundaria, y en numerosos casos, con poca fortuna. En consecuencia, las Matemáticas se han convertido en una ciencia mal conocida y escasamente apreciada. (UNESCO, ¿Por qué las matemáticas?, 2006: 5)*

Enmarcando así uno de los problemas de la educación matemática, el cual es relacionado con las competencias que esta debe generar en el individuo. Estas competencias deben permitir desarrollar el razonamiento lógico en cada proceso y así lograr la transferencia de los conceptos a problemas cotidianos, para denotar su utilidad. A dicha problemática se le suma las prácticas y modelos que se tienen

al enseñar matemáticas, donde en muchos casos se suele enfocar a que los estudiantes aprendan solo un proceso mecánico, sin buscar lograr la comprensión del mismo. Lo cual puede resultar tedioso para ellos, y pierden interés debido a la escasa claridad y posibilidad de ser utilizados en su contexto, originando así un rechazo a las asignaturas de matemáticas en los estudiantes que las cursan. Situación que produce malos resultados, afectando su rendimiento académico.

Al hacer referencia a la educación superior, el bagaje de los conocimientos matemáticos debe contribuir a la profesionalización de los individuos durante su formación en las universidades. Sin embargo existen brechas entre el nivel educativo secundario y superior, lo que permite evidenciar una dificultad aun mayor y que requiere de propuestas y programas de intervención para su reducción.

Así es el caso en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), donde se ha observado las dificultades del estudiantado para lograr un buen rendimiento, generando con ello no solo gasto para la institución pública, sino frustración en cada individuo. En el 2014, mediante un artículo titulado “Autoridades de la UNAH interpelarán a 150 maestros por reprobación masiva de alumnos” que se publicó en el periódico universitario “Presencia Universitaria” el 27 de Agosto, se destaca que las asignaturas del área de Matemáticas, Física y Química; son las que presentan mayor cantidad de reprobación, cuyo porcentaje supera el 50% (Ramirez Calderón, 2014).

Específicamente en la UNAH-VS la clase con mayor porcentaje de reprobación, en el año 2014, era Ecuaciones Diferenciales con un 73.47%. Siendo esta, una de las últimas asignaturas de matemáticas que tienen en común las carreras de ingeniería, física, matemática y química. Los errores frecuentes, en dicha asignatura, se dan por la mala adquisición de los conocimientos en clases anteriores a esta y por la dificultad que expresan los estudiantes al trabajar con modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales, así lo manifiestan los docentes que han brindado dicha clase. Por lo que es necesario mejorar las bases para obtener los resultados esperados, en cuanto a aprobación, que la institución requiere y sobre todo el aprendizaje en los estudiantes.

Con respecto a ello, una de las primeras asignaturas del área de matemáticas que cursan los estudiantes de la UNAH-VS es Matemática 1 (MM-110), donde los porcentajes de aprobación en el año 2014 fue 37% para un total de 2376 alumnos matriculados en la misma; en el año 2015, 39% para un total de 1537 alumnos matriculados y en el año 2016 de un total de 1296 alumnos matriculados solamente el 48.5% aprobaron<sup>1</sup>, lo cual evidencia el problema mencionado anteriormente.

Dicha asignatura comprende temas del álgebra, ecuaciones y funciones, cuyos tópicos son abordados de alguna manera en el sistema educativo anterior, lo que supondría una mejor comprensión al contenido abordado en esta etapa. Sin embargo dicha suposición no resulta del todo cierta, pues los resultados y la

---

<sup>1</sup> Informes de coordinación de la asignatura Matemática I (MM-110).

experiencia muestran poco grado de comprensión y análisis en los procesos estudiados.

En particular, se ha observado una dificultad considerable de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas de aplicación. Dichos problemas pueden incluir, en su mayoría, diferentes conceptos de otras ciencias como ser Física, (cinemática), Química (mezclas), Economía (utilidad, interés), entre otras. Donde los alumnos deben poseer algún conocimiento de ello, deducirlos, o bien, ser investigado o presentado por el docente para su comprensión. Buscando así construir una ecuación mediante el conocimiento previamente adquirido que brinde una solución al problema que se plantea.

Es en la etapa de la comprensión donde se inicia el correcto abordaje a cualquier problema planteado, lo que induce a generar propuestas para que mediante lenguaje matemático se llegue a una solución óptima. Sin embargo diferentes debilidades se han evidenciado en el proceso de la resolución de problemas aplicados, las cuales crean un rechazo a problemas de este tipo.

Por ello se busca analizar las dificultades en la resolución de problemas que poseen los estudiantes universitarios de la UNAH-VS, específicamente los que cursan la asignatura de Matemática 1. Enfocando el estudio en los problemas que implican un modelado de ecuaciones lineales con una variable. Buscando responder a la siguiente interrogante,

¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes de Matemática 1, de la UNAH-VS, en la resolución de problemas modelados con ecuaciones lineales?

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo general:

- Analizar las dificultades que presentan los estudiantes de Matemáticas 1 de la UNAH-VS en la resolución de problemas modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita.

### 1.1.2 Objetivos específicos:

- Determinar las dificultades que presentan los estudiantes universitarios en la resolución de problemas modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita.
- Identificar las etapas del proceso de resolución de problemas que manejan los estudiantes de acuerdo al modelo de Polya.
- Describir las incidencias, dificultades y bondades, que presentan los estudiantes universitarios al desarrollar una metodología basada en el modelo de Polya para la resolución de problemas modelados mediante ecuaciones lineales.

## 1.2 Preguntas de investigación

- ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de Matemática 1 de la UNAH-VS para resolver problemas modelados mediante ecuaciones lineales?
- ¿Cuáles son las etapas del proceso de resolución de problemas que manejan los estudiantes de acuerdo al modelo de Polya?
- ¿La propuesta metodológica basada en el modelo de Polya, mejora la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita?

## 1.3 Justificación

El manejo de las matemáticas en general ha resultado, en la mayor parte de los casos, un problema que les genera dificultad a los estudiantes. La cual aumenta cuando se necesita de un razonamiento lógico para encontrar la solución a un problema de aplicación. Así concuerdan Muñoz y Ríos (2008: 3) al establecer que *“las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes se agudizan en el tema de resolución de problemas cuando aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico”*.

Es así como en ocasiones los métodos numéricos son realizados por los estudiantes, ya sea por comprensión o procedimiento metódico, de forma correcta. Sin embargo al analizar un problema aplicado, la estructuración del mismo resulta la mayor dificultad para su resolución. Resolver problemas donde se presenta un

enunciado verbal o se expone un caso real para ser modelado mediante una ecuación acerca la práctica educativa a uno de los enfoques actuales de la educación, conocido como resolución de problemas.

En general, la resolución de problemas es un enfoque que han adoptado muchos sistemas educativos en diferentes niveles. Tal es el caso de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) la cual establece en su modelo educativo un principal enfoque a la resolución de problemas de la realidad para lograr el aprendizaje (UNAH, 2009: 34). Además la institución manifiesta que la investigación-acción debe ser parte en los procesos educativos para ir transformando las prácticas educativas y ser orientada a la resolución de problemas reales (46). Sin embargo, en el nicho de las asignaturas de matemáticas los resultados en torno a esta temática no resultan favorables para los estudiantes.

En ese sentido, diferentes estudios han buscado determinar las dificultades que se presentan al resolver problemas matemáticos y además desarrollar diferentes propuestas metodológicas para disminuir esas dificultades (Barroso & Rodríguez Ortiz, 2007; Sanjosé, Valenzuela, Fortes, & Solaz-Portolés, 2007; Boscan Mieles & Klever Montero, 2012; Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásdquez, Villegas, & Flores, 2013; Chavarría, 2014). Por ejemplo, Boscan Mieles y Klever Montero (2012) en su trabajo titulado “Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos” analizaron la implementación de una metodología que buscaba favorecer el aprendizaje en la resolución de problemas en alumnos de séptimo grado, para lo

cual se realizó un diagnóstico que desvelaba los errores que cometían los estudiantes antes de la propuesta y otro luego de la intervención, y concluyeron que la misma resultó mejorar, a un nivel alto, las competencias de los estudiantes.

Por otro lado, Barroso y Rodríguez (2007) por medio de su investigación “Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos”. Buscaban exponer las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes al resolver problemas y a su vez, proponer formas de intervención para disminuir el impacto de estas dificultades; de esto, concluyeron que en la resolución de problemas matemáticos es necesario desarrollar un proceso por etapas, donde cada etapa debe buscarse acompañar de una intervención por parte del profesor. Similar a lo que expone Maffey García (2006) donde manifiesta que es necesario hacer hincapié en el correcto abordaje de las ecuaciones lineales, en el nivel superior, por medio de metodologías que impulsen un análisis del proceso y una revisión de la solución encontrada para problemas modelados mediante estas.

Ciertamente, la mayor parte de los trabajos abordan la temática de resolución de problemas en el nivel primario o secundario de educación, considerando metodologías para desarrollar conocimiento y abordar los problemas de forma eficiente. Esto evidencia un descuido en buscar potenciarlo en los diferentes niveles educativos, como ser el nivel superior, donde además de servir de retroalimentación y reforzamiento, podría generar un mejor desarrollo a futuro en la generalización de la resolución de problemas.

Por lo que, enmarcar la importancia de la resolución de problemas en el contexto universitario resulta relevante y pertinente para conocer las diferentes dificultades en el estudiantado al momento de hacerlo, analizando y determinando posibles soluciones o propuestas con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además permite acercar la práctica educativa a lo que la institución manifiesta y así abonar a la calidad educativa.

Referente al contenido que se aborda, las ecuaciones lineales representan la primera fase para el desarrollo de diferentes aplicaciones. Las cuales poseen técnicas, para encontrar la solución, más accesibles que otras. Permitiendo con ello un mayor enfoque al proceso y eliminando la barrera que podría generar la dificultad de resolver una ecuación. Añadiendo a esto, resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales de una incógnita es parte del contenido abordado por los estudiantes en la educación secundaria, lo que permite analizar las estrategias metacognitivas usadas para la resolución de los mismos y con ello profundizar el conocimiento en el nivel superior.

En ese sentido, al considerar que en la etapa universitaria el estudiante ya ha estudiado la temática en cuestión, debería poseer un manejo aceptable del álgebra y su razonamiento, y en el marco de lo expuesto se analiza a los estudiantes que cursan la asignatura de Matemática 1 de la UNAH-VS, durante el primer periodo académico del año 2018.

El presente estudio analiza las dificultades de los estudiantes universitarios al resolver problemas en el nivel superior como aquellos problemas originados

desde su etapa educativa anterior, mostrando con ello que tan grande es la brecha entre los diferentes niveles educativos. Además de establecer una propuesta metodológica para analizar el grado de mejora obtenida en dicha temática, permitiendo con ello generar un punto de partida para diferentes propuestas y tópicos matemáticos a considerar y dar una alternativa de intervención para mejorar la calidad de la educación.

En cuanto a la viabilidad del estudio, al enmarcar la presente investigación en un entorno específico se cuenta con el acceso para la experimentación y recopilación de la información necesaria. Además la ejecución es parte de la planificación de una asignatura, por lo que el tiempo para su desarrollo es adecuado.

Con respecto a la temática, el estudio abarca uno de los ejes de investigación establecidos por la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad Nacional Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UNPFM), que corresponde a la línea número 5: La universidad como objeto de estudio y al área temática, procesos de enseñanza y aprendizaje en educación superior<sup>2</sup>, estableciendo así la pertinencia del estudio para la institución.

---

<sup>2</sup> <http://postgrado.upnfm.edu.hn/index.php/descripcion-de-lineas-de-investigacion>

## **2. Marco Teórico**

El siguiente capítulo muestra las teorías, ideas y conceptos que fundamentan la presente investigación, las cuales guían cada proceso seguido en la misma y son consideradas en base a los modelos educativos actuales de las instituciones. Luego de una revisión sistemática y ardua se establecen las bases de la investigación, describiendo, en primera instancia, las corrientes pedagógicas actuales que se desarrollan, dentro de las cuales se fundamenta la propuesta que se plantea en este trabajo. Posteriormente se aborda la resolución de problemas, las competencias y habilidades que se permiten desarrollar por medio de dicha metodología, así como los autores y los métodos heurísticos que se han planteado desde diferentes perspectivas.

Finalmente se expone la clasificación de los problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales con una incógnita junto con las formas que plantean diferentes autores para su solución.

### **2.1 Corrientes pedagógicas para el aprendizaje**

En el ámbito educativo se requieren diferentes técnicas y metodologías que permitan la concepción y comprensión del aprendizaje en cada individuo. Para ello, se han venido discutiendo y presentando diferentes modelos educativos, todos con un fin, potenciar el desarrollo del individuo. Iniciando desde la escuela tradicional hasta las corrientes y tendencias de hoy en día, basándose en teorías cognitivas para su desarrollo (Corral, 2000: 7; Cerezo, 2007: 12).

Considerando el fin primordial de la educación, el desarrollo integral del individuo, se deben especificar algunas formas para lograr dicho objetivo. Con esto, la educación debe de cumplir ciertos estándares y generar en el individuo un razonamiento crítico y reflexivo, y no simplemente que él se base en una emoción, intuición, hábito o rutina. En este punto es donde surge un cambio considerable de corrientes y enfoques en torno a la educación, que buscan mejorar la ruta para llegar a la meta establecida.

Dentro de las corrientes contemporáneas que se han establecido se encuentra la pedagogía tradicional, la escuela nueva, la tecnología educativa, la pedagogía autogestionaria, la pedagogía no directiva, la pedagogía liberadora, la perspectiva cognoscitiva, el constructivismo, la investigación–acción como tendencia pedagógica, la teoría crítica de la enseñanza y el enfoque histórico-cultural (CEPES, 2000). Cada una de ellas se enmarca en ciertos estilos y formas de abordar el proceso enseñanza-aprendizaje, las cuales van sustentadas en las necesidades sociales y conveniencias de las prácticas en el aprendizaje del individuo.

Es de particular interés hacer hincapié en aquellos enfoques que se han posicionado fuertemente en la labor de los educadores para la formación de sus estudiantes, aquellos que han sido introducidos en los sistemas educativos de diferentes países como ser: el constructivismo, el cognoscitivismo y las nuevas tecnologías, donde cada uno de ellos posee potencialidades y deficiencias, pero en conjunto pueden aportar mucho a los objetivos o competencias que se pretenden desarrollar en el proceso de aprendizaje.

Tal es el caso del constructivismo, donde el papel del docente se enfoca en impulsar y generar maneras para que los estudiantes construyan su conocimiento por medio de procesos regulados. Sin embargo un mal proceso de regulación puede ocasionar distorsión en los conocimientos y subjetividad (Soler, 2006). En ese sentido se requiere un proceso que permita la verificación y transferencia social de las ideas, evitando el relativismo y reestructurando lo adquirido hasta lograr el conocimiento verídico.

De igual forma las nuevas tecnologías sin un proceso adecuado pueden entorpecer el aprendizaje, por lo que se requiere la implementación de estrategias para optimizar su uso en la educación. Es aquí donde el combinar las nuevas tecnologías con un enfoque constructivista puede lograr que algunos problemas se eviten, como ser la subjetividad en el constructivismo. Ya que mediante herramientas de interacción social y materiales de evaluación formativa que brindan las Nuevas Tecnologías de Información y Comunicación (NTIC's) se puede lograr una mejor regulación. Sin embargo todo depende de un correcto acoplamiento.

Marte Espinal (2018) establece que la clave en la integración de las tecnologías se basa en tres objetivos: favorecer a la comprensión del contenido, ayudar a crear en los usuarios del material y procesos mentales coherentes y favorecer la transmisión de información y la generación de conocimiento. En ese sentido los objetivos establecidos por Marte Espinal (2018) muestran la necesidad de la fusión de las tecnologías con el constructivismo, que busca la construcción e

interacción social de los conocimientos; y el cognoscitivismo, que se enfoca en los procesos mentales.

Las estrategias usadas en el cognoscitivismo se basan en la instrucción, la cual resulta ser un punto toral en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en esta corriente. Es así como los problemas que se pueden suscitar son ocasionados por instrucciones no adecuadas. Estas instrucciones deben facilitar el aprendizaje y de acuerdo a Martín, Martínez, Martín, Nieto y Núñez (2017) la instrucción debe servir para que “asista a los estudiantes a organizar y relacionar la nueva información con el conocimiento existente en la memoria” (52). Todo ello orienta y dirige los procesos mentales para generar el conocimiento.

En ese sentido la instrucción debe buscar un proceso sistemático basado en los procesos mentales de los estudiantes, con el fin que sean capaces de hacer las conexiones mentales con los conocimientos que ya tienen y el nuevo. Conexiones que pueden potenciarse mediante procesos basados en el constructivismo, siendo este un factor clave en el diseño de la instrucción (Corvalán Vásquez, 2011). Mostrando así la conexión constructivista-cognitiva que permite mejorar los procesos reduciendo deficiencias de una con la otra y a su vez potenciarlas por medio de una correcta mezcla.

En ese sentido la adopción de una metodología se basa en considerar aspectos de diferentes corrientes pedagógicas orientadas de acuerdo a los objetivos o competencias que el docente busca se desarrollen en el proceso. Por lo que resulta necesario conocer las particularidades de cada una de ellas.

### 2.1.1 Constructivismo

El constructivismo es una corriente que ha tenido un gran protagonismo en el ámbito educativo, la cual ha estado presente y se ha apoderado fuertemente en los modelos de las instituciones educativas. La educación actual va encaminada en los fundamentos y características propias de esta corriente. Entre los grandes personajes dentro del constructivismo destacan Jean Piaget, J. Brunner, Vigotsky, entre otros. Cada uno de ellos dando aportes desde diferentes dimensiones como ser la epistemología, la psicología y la pedagogía (Cerezo, 2007).

El enfoque constructivista busca comprender la forma en que los individuos desarrollan y construyen su propio conocimiento, a través del entorno en que se desenvuelven. Suárez (2000: 47) menciona que,

El constructivismo expresa que el conocimiento se sucede como un proceso de construcción interior, permanente, dinámico a partir de las ideas previas del estudiante, constituidos por sus experiencias o creencias, que en función del contraste, comprensión de un nuevo saber o información mediado por el docente, va transformando sus esquemas hacia estados más elaborados de conocimiento, los cuales adquieren sentido en su propia -aprendizaje significativo-. Este proceso depende de la interacción –cognitiva- que logra el sujeto con la realidad en donde actúa, construcción potenciado por los procesos mentales básicos o superiores (cognitivos) de que goza como ser inteligente.

Es así como la teoría constructivista considera la construcción del conocimiento como un proceso individual que tiene lugar en la mente de las personas, lugar donde se encuentran almacenadas sus representaciones del mundo. Es decir que la individualidad en el proceso de construcción del conocimiento posee un mayor peso para lograr la adquisición de estos, sin embargo es necesaria también la interacción con otras personas para impulsar el proceso de construcción, en el sentido que cada individuo toma un punto de referencia para medir sus procesos de conocimientos y reconocer e identificar errores, deficiencias o necesidades que se ve obligado a superar. (Sanjosé, Valenzuela, Fortes, & Solaz-Portolés, 2007: 6)

En los sistemas educativos del país la teoría constructivista es base de los modelos que se han establecido. La Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), que es la regente de la educación superior en Honduras, en la serie de publicaciones de las reformas universitarias #3 (2009: 35) establece que *“La Perspectiva Pedagógica del Modelo Educativo de la UNAH se construyó tomando como base la Teoría constructivista, la Teoría crítica y la Teoría humanista”*. Enfatizando el uso de la resolución de problemas para lograr un aprendizaje significativo en el estudiante y autorregulado, fundamentado en las teorías cognitivas.

### **2.1.2 Cognoscitivismo**

De lo anterior se destaca la teoría cognoscitiva estudiada y desarrollada por autores como ser Jean Piaget, Jerome Bruner, Noam Chomsky y Herbert Simon,

los cuales según Cerezo (2007: 7) tienen gran influencia en la consolidación de esta corriente. Particularmente los trabajos de Jean Piaget (1977) donde se destaca el constructivismo cognitivo, mostrando así la preponderancia que tienen los procesos mentales en otras corrientes pedagógicas.

En general la perspectiva cognoscitiva está basada en la teoría del conocimiento, alcanzando mucho más de ella por medio de la búsqueda de una comprensión psicológica y no solo filosófica. Estableciendo así su objetivo primordial, el cual es el análisis psicológico de los procesos del conocimiento del hombre, opuesto a lo que planteaba el conductismo con su método de estímulo-respuesta.

Roberto Corral (2000) establece que,

*Es posible identificar rasgos comunes en los modelos psicológicos elaborados desde esta perspectiva, ante todo, el reconocimiento del carácter activo de los procesos cognoscitivos, como una de sus características esenciales: todo conocimiento es resultado de la búsqueda y acción real del sujeto sobre su entorno, y no puede concebirse como mera transmisión desde fuera o cualidad inherente de la psique originada en lo interno. De esta forma, uno de sus propósitos declarado es la concepción de modelos del aprendizaje, entendidos como una relación del sujeto activo sobre el objeto.*

(77)

Esta relación que menciona el autor permite el desarrollo de estrategias para la obtención del conocimiento, las cuales se muestran al momento de plantear un problema donde cada individuo debe hacer uso del conocimiento previo, organizarlo y transformarlo para llegar a una solución, a esto se le conoce como estrategias metacognitivas.

La metacognición es parte de la psicología cognitiva la cual va relacionada con aquellas actividades que muestran el funcionamiento cognitivo de los individuos autorregulado y transformado. Una definición más formal la brinda Cerchiaro, Paba & Sánchez (2011: 101) quienes definen la metacognición como *“el grado de conciencia o conocimiento de los individuos sobre sus formas de pensar, sus contenidos y la habilidad para controlar esos procesos con el fin de organizarlos, revisarlos y modificarlos en función de los progresos y los resultados del aprendizaje”*.

Sin duda alguna el estudio y la búsqueda del desarrollo de habilidades cognitivas resulta de mucho provecho para el proceso de enseñanza aprendizaje. El analizar las formas en que los individuos abordan un problema para posteriormente instruirlos mediante recursos cognitivos son prácticas del enfoque cognitivo y para ello, la metacognición, no se puede restringir a un modelo propio sino a múltiples y variados métodos como menciona Cerchiaro, Paba & Sánchez (2011: 101).

Uno de estos modelos establece que el individuo se centre en la selección de una estrategia con el fin de alcanzar una meta que lo conducen a experiencias

metacognitivas, lo que a su vez mejora o enriquece el almacén de conocimientos metacognitivos (102), es decir, parte de objetivos, experiencias metacognitivas, el conocimiento metacognitivo y el uso de estrategias.

En particular al momento de motivar a los estudiantes a resolver problemas es donde se desarrolla la metacognición, así lo establece Flavell (1971, citado de Cerchiaro, Paba & Sánchez, 2011: 100) donde señala que la metacognición “*se desarrolla a través de la práctica, lo cual abre el espacio para la acción educativa*”, la cual se estimula mediante instrucciones precisas y encaminadas a la resolución de problemas.

### **2.1.3 Las NTIC's**

Por otro lado las nuevas tecnología de la información y comunicación (NTIC's) han venido a originar un cambio en las formas y procesos de enseñanza-aprendizaje. En relación a lo que Suárez (2000: 50-51) menciona, estas, más allá de ser una herramienta para las prácticas docentes, pueden llegar a ser fuentes de enseñanza para estimular y potenciar el aprendizaje de los estudiantes, siendo a su vez parte de las estrategias que utilizan los individuos para construir su aprendizaje.

Si bien es cierto la introducción de las tecnologías de información y comunicación en la educación se realizó tomando en consideración las teorías del aprendizaje y el conductismo, más adelante con el avance estratosférico que surgió (NTIC's) se reformuló y tomó en cuenta los paradigmas cognoscitivos y los trabajos de autores como Bruner, Ausubel y Piaget (Rosa Fuentes, Corral,

Alfonso, & Ojalvo, 2000). Con ello las NTIC's brinda un medio para potenciar el desarrollo del aprendizaje a través de la dinámica que ofrecen, buscando la comprensión del individuo.

Es así como se puede hablar desde dos perspectivas, una, considerando las NTIC's como mediadoras de proceso enseñanza- aprendizaje, por medio de multimedia, plataformas virtuales, etc., todas ellas con la guía docente; y otra que las considera como herramientas para favorecer la comprensión, es decir, el uso de software para manipular, simular y profundizar en el aprendizaje.

La primera perspectiva del uso de las tecnologías en la educación es la que se ha venido desarrollando en las instituciones de educación superior del país, principalmente con el uso de plataformas virtuales. Las plataformas virtuales vienen a ser parte de las diferentes cátedras que se brinda en cualquier universidad como apoyo a las labores presenciales. Sin embargo su uso aún se considera escaso por los docentes y estudiantes, lo que ha impedido el empoderamiento y desarrollo pleno de estas como mediación de la educación.

Probablemente por factores como la instrucción y motivación, se limita el uso de estas herramientas, sin dejar a un lado los recursos que se requieren para las mismas. Recursos que deben estar disponibles para los docentes y estudiantes (Cámara Serrano, 2006: 66-68), para los cuales bastará con un dispositivo móvil o computadora, conexión a internet, cuenta de correo electrónico o de las plataformas a utilizar, además de una correcta preparación en la utilización de los mismos.

Además las nuevas generaciones poseen un manejo experto de estas nuevas tecnologías denominándolos así como nativos digitales (Dussel & Quevedo, 2010: 12), lo que supone un mayor acercamiento de preparación a aquellas generaciones que se les dificulte el uso de las tecnologías para no entorpecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Al eliminar o abordar formas de reducir los inconvenientes que se puedan presentar basta enfocarse en los recursos didácticos que se requieren para el uso de las plataformas. Los cuales deben de ir estructurados con instrucciones precisas de manera que puedan ser desarrollados satisfactoriamente. En este punto es donde autores como Serrano (2006: 70) menciona que las NTIC's "a la hora de utilizarlas deben estar al servicio de la estrategia didáctica", para así lograr el objetivo planteado encaminado al aprendizaje de los estudiantes.

## **2.2 Resolución de problemas**

En la educación matemática es necesario poner en práctica actividades y metodologías que desarrollen la comprensión del individuo, disminuyendo así la creencia de que la matemática debe enseñarse mediante clases magistrales, donde el estudiante es pasivo en el proceso de su aprendizaje. En este sentido y al considerar que las corrientes actuales de la educación se basan en el constructivismo, el cual contextualiza y muestra la importancia de esta al individuo, es necesario abordar metodologías para lograr un aprendizaje significativo. Dentro de ellas se hace énfasis a la resolución de problemas.

Antes de hablar más a fondo en cuanto a la resolución de problemas es necesario definir primero lo que es un problema e ir hilvanando un concepto formal del mismo. Con respecto a ello, Triana (2003) menciona que:

Un problema es una situación o dificultad prevista o espontánea, con algunos elementos desconocidos para el sujeto, pero capaz de provocar la realización de acciones sucesivas para darle solución. Por otro lado, se considera la resolución de problemas como una habilidad, y como tal se caracteriza y estructura, todo ello en base a determinadas acciones, que son las que permiten acceder a las vías para resolver los problemas.

Así, la realización de acciones con un propósito determinado es producto del desarrollo social que van alcanzando las personas a través de su actividad. En este proceso, en la medida que el hombre adquiere conocimientos teóricos y los lleva a la práctica, llega a dominar la acción a manera de “saber hacer”, condición indispensable para la realización de cualquier actividad. (4)

Mostrando con ello que la resolución de problemas es un proceso que abarca el conocimiento individual y social, enmarcando la interacción social para la construcción del nuevo conocimiento, junto con la práctica para la utilización de ese saber. Todo ello permite un análisis secuencial mediante medios externos de verificación, como ser el contexto social, para lograr el aprendizaje, como producto esperado en la práctica.

Por otro lado Sanjosé, Valenzuela, Fortes & Solaz-Portolés (2007: 540) considera que “un sujeto se enfrenta a un problema (a diferencia de un ejercicio) cuando no dispone de las representaciones completas Modelo de la Situación y/o Modelo del Problema, necesarias para dar respuesta a las preguntas formuladas en la demanda del enunciado”. Lo cual implica que deberá de realizar conjeturas y un análisis partiendo de conocimientos previos y lógicos para llegar a su solución.

Lo anterior establece que un problema demanda un alto nivel cognitivo, requiere determinar la información relevante y utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. Mientras que un ejercicio suele ser metódico, con una estructura previa, y alejado de un contexto real, donde el estudiante ya conoce el proceso a seguir.

Con esto se considera que la resolución de problemas es una metodología que implica la utilización de conceptos previos junto con estrategias diversas que permitan llegar a la solución del mismo, apegado a un contexto real o ideal de otras ciencias. Donde el camino para obtener la solución podría ser incierto y se tiene que ir construyendo por medio de un proceso de análisis y reflexión, adquiriendo así el conocimiento por medio de la práctica y estrategias nuevas durante el proceso.

Por lo cual la resolución de problemas en matemáticas encamina el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia los objetivos establecidos para la educación, desarrollando y potenciando las habilidades pertinentes en el estudiante.

Cumpliendo con lo que algunos educadores establecen, como ser Santos Trigo (2007: 21) el cual menciona que “en el aprendizaje de las matemáticas es importante el proceso y el sentido que los estudiantes muestran en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas”, donde no basta solo llegar a la solución, sino que es muy importante el camino y razonamiento trazado para obtenerla. En ese sentido De Guzmán (1996: 21) plantea que “la enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces”. Sin duda alguna las bondades de esta metodología son evidentes y amplias, pero ¿de dónde surge la resolución de problemas como metodología?

Si se busca hablar de los orígenes de la resolución de problemas se debe dar un vistazo desde la antigüedad, pues las matemáticas surgieron y se desarrollaron por la necesidad que tenían las civilizaciones para resolver los problemas que se les presentaban en sus labores. Sin embargo desde un punto de vista más formal y teórico la resolución de problemas surge, hace aproximadamente 40 años, como una propuesta para el desarrollo de las características propias de las matemáticas (Trigo, 2007: 18-19). De esto Kleiner (1986) afirma que “el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se origina a partir de un esfuerzo por resolver determinado problema” (citado de Trigo. 2007: 19), con lo que dicha metodología aporta a la adquisición de los contenidos matemáticos que se utilizan.

Es así como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) ha determinado que la resolución de problemas es una de las metas más importantes en el aprendizaje de las matemáticas, ya que permite el desarrollo de estrategias en el individuo y lo adopta de una participación activa en su aprendizaje siguiendo la formalidad de la disciplina matemática.

Por lo que “reconocer que resolver problemas es una actividad esencial en el desarrollo y aprendizaje de la matemáticas implica la necesidad de discutir las ideas principales alrededor de esta actividad” (Trigo, 2007: 12). Dichas ideas fueron enmarcadas por algunos trabajos, como los planteados por el matemático húngaro George Polya (1945) con su método heurístico y el norteamericano Alan Schoenfeld (1992). Donde hacen énfasis a un modelo heurístico desarrollando la comprensión, ejecución, análisis y comprobación del proceso empleado.

De esto cabe destacar que una de las creencias más fatales para la matemática es verla como una ciencia con procesos meramente algorítmicos, dejando a un lado la comprensión de la misma. Lo cual se muestra en investigaciones como la realizada por Pochulu (2005), titulada “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad” donde destaca que uno de los mayores errores que presentan los estudiantes es plantear en términos de una ecuación lineal una expresión del lenguaje coloquial. Concluyendo que unas de las razones que originan esta situación viene dada por el uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos, desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas, y una escasa

importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas.

Por tal razón los métodos o modelos para la resolución de problemas con un enfoque basado en el constructivismo – cognitivo resulta de gran necesidad para minorizar los errores que se frecuentan en los estudiantes. El uso de estos modelos dirige al estudiante a la comprensión de las matemáticas como al análisis de los procesos realizados, ese fue el fin que Polya (1945) buscaba con su modelo empleado para la resolución de problemas.

### **2.2.1 Modelo heurístico de Polya para la resolución de problemas**

George Polya es considerado como el pionero en formular y estructurar un método para la resolución de problemas. A partir de su modelo otros matemáticos plantearon métodos con el fin de mejorar esta actividad entre ellos destacan Schoenfeld (1984), Gagné (1983), Mayer (1991), Montague (1988), Glass (1986), Stein (1984), entre otros.

En sus estudios, Polya, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento y cómo es que se derivan los resultados matemáticos, así se muestra en sus obras “Descubrimiento Matemático” y “Matemáticas y razonamiento plausible”. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello su enseñanza enfatizaba el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. A través de su libro “Cómo plantear y resolver problemas”, introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que

conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Agrega que la heurística tiende a la generalidad, al estudio de los métodos, independientemente de la cuestión tratada y se aplica a problemas de todo tipo. (Alfaro, 2006)

Por otra parte Schoenfeld, además de las heurísticas, propone tomar en cuenta otros factores tales como: Recursos: son los conocimientos previos que posee la persona, se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentar un problema. Control: que el alumno controle su proceso entendiendo de qué trata el problema, considere varias formas de solución, seleccione una específica, monitoree su proceso para verificar su utilidad y revise que sea la estrategia adecuada. E introduce el Sistema de creencias, por considerar que van a afectar la forma en la que el alumno se enfrenta a un problema matemático. (Boscan Mieles & Klever Montero, 2012: 12)

Ambos autores, Polya y Schoenfeld, destacan la resolución de problemas mediante la heurística, la diferencia radica en la extensión que Schoenfeld brinda al modelo planteado por Polya, sin embargo su objetivo principal es el mismo, mostrar que la resolución de problemas matemáticos es hacer matemática y determina una metodología de enseñanza.

Por otro lado, para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, Polya generalizó su método en los siguientes cuatro pasos: (Winmates, 2015)

## 1) Entender el problema.

La comprensión del problema es la primera fase, en la cual surge la identificación de los datos e incógnitas, la manipulación y reformulación del mismo. En esta fase, una buena lectura y comprensión de ella juega un papel importante, es por esta razón que autores como Fernández (2013) muestran y analizan la importancia de la comprensión lectora para resolver problemas matemáticos.

La comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, que como menciona Sanjosé, Valenzuela, Fortes & Solaz-Portolés (2007: 539), “éste es un texto habitualmente corto, con unas pocas frases. El cual demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático”.

“Según Polya (1945) entender un problema es apropiarse de él; concretarlo en tan pocas palabras que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea.” (citado en Boscan Mieles & Klever Montero, 2012: 12)

El trabajo de hacer una radiografía al enunciado del problema permite más allá de identificar los datos, analizar si estos son suficientes y necesarios para encontrar la solución, si se puede determinar otros datos a partir de lo que conocemos o si el problema a abordar es coherente. Además así como menciona Garofalo y Lester (1985),

En esta fase de la resolución está implicada no sólo la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también

la autoevaluación que la persona hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito.

(citado de Barroso & Rodríguez Ortiz, 2007: 260)

Con ello se determina que es en este momento donde el estudiante puede medir sus conocimientos y la asimilación de los mismos. Lo cual impulsa a retroalimentar el contenido necesario para llegar a comprender la situación planteada.

## 2) Configurar un plan

La concepción de un plan para resolver un problema es la fase donde el individuo determina la forma en cómo se puede abordar la situación problemática, conecta variables, busca facilitar la solución. Es en este paso donde el docente debe guiar al estudiante para que pueda generar un plan, teniendo cuidado de no imponérselo sino que el mismo lo construya. La configuración de un plan según Fuentes (2008: 49) “hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo”, todo ello para lograr el objetivo primordial, el cual es la construcción y producción del estudiante en su propio conocimiento. En esta fase el empleo de estrategias es de vital importancia, estrategias que pueden surgir al conocerlas previamente o bien generar nuevas todo con el fin de llegar a la solución del problema.

## 3) Ejecutar el plan

Luego de la concepción del plan la ejecución de este corresponde a la elaboración del proceso creativo. En esta etapa es importante la verificación de cada paso ejecutado buscando que cada proceso realizado sea lógico, coherente y veraz de todo razonamiento. Esta fase puede resultar cíclica pues

al llegar a una dificultad o tropiezo se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo. Autores como Fuentes (2008: 49) consideran que “hay que tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos y continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica”

#### 4) Mirar hacia atrás

Esta última fase es una visión retrospectiva donde se tiene que analizar la solución y el procedimiento que llevó a la misma. Tiene una gran importancia pues se confronta lo obtenido, realizado mediante el modelo del problema, con el contexto y su contraste con la realidad que se quería resolver. El hecho de esta fase permite al individuo identificar algún otro modelo para resolver el problema, la existencia de alguna otra solución, la justificación del resultado y el uso de lo planteado a otras situaciones.

### 2.2.2 Otros modelos para resolver problemas

Así, como se mencionó anteriormente, el modelo de Polya impulsa la creación y desarrollo de nuevos modelos cuya base radica en las etapas que él estableció. En la siguiente tabla se muestran algunos de estos modelos.

Tabla 1:  
*Modelos de Resolución de Problemas Matemáticos*

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Polya (1945)	Comprensión del problema	Configuración de un plan	Ejecución del plan	Mirar hacia atrás.
Dunlap y McKnight	– Percepción de símbolos	– Determinación de lo que hay	– Formulación de los datos	– Verificación de las

(1980)	<p>escritos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Decodificación de símbolos escritos</li> <li>-Formulación del significado general de oraciones</li> <li>-Traducción del mensaje general en un mensaje matemático</li> </ul>	<p>que buscar</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Examen de los datos relevantes</li> <li>- Análisis de las relaciones entre los datos</li> <li>- Elección de las operaciones matemáticas</li> <li>- Estimación de las respuestas</li> </ul>	<p>mediante la notación matemática</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ejecución de los cálculos matemáticos</li> <li>- Decodificación de los resultados para que tengan sentido técnico</li> <li>- Formulación de los resultados técnicos como respuestas a las cuestiones iniciales</li> </ul>	<p>respuestas</p>
Gagné (1983)	Traducción verbal de las situaciones descritas al lenguaje matemático		Fase central de cálculo	Validación de la solución
Montague (1988)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lectura del problema</li> <li>- Paráfrasis</li> <li>- Visualización</li> <li>- Enunciado del problema</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Hipótesis</li> <li>- Estimación</li> </ul>	- Cálculo	- Verificación
Schoenfeld (1984)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Análisis</li> <li>- Exploración</li> </ul>	- Diseño	- Implementación	- Verificación
Uprichard, Phillips & Soriano (1984)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lectura</li> <li>- Análisis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimación</li> <li>- Traducción</li> </ul>	- Cálculo	- Verificación
Mayer (1991)	- Representación	- Planificación	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monitorización</li> <li>- Ejecución</li> </ul>	- Verificación

	– Traducción – Integración			
Garofalo y Lester (1985)	– Orientación	– Organización	– Ejecución	– Verificación
Glass y Hoyak (1986)	– Comprensión o representación del problema	– Planificación	– Ejecución del plan	– Evaluación de los resultados
Brandsford y Stein (1984)	– Identificación – Definición	– Exploración	– Actuación	– Observación – Aprendizaje

Fuente: (Barroso & Rodríguez Ortiz, 2007: 259)

### 2.3 Modelización matemática

La matemática es una ciencia pura y exacta que es adoptada por otras para el desarrollo de las mismas, dentro de lo cual, las aplicaciones que tienen las matemáticas son numerosas y deben ser conocidas en los procesos educativos. Al analizar las etapas de la educación, sin duda alguna, se refleja que paulatinamente en la educación matemática, se introduce la aplicación en diferentes contextos, algunos de interés y otros irrelevantes para los estudiantes. Independientemente de las aplicaciones planteadas, el producto de lo que se desarrolla en los estudiantes es bueno, pues concretiza los conocimientos mediante situaciones reales o ideales dotadas de un entorno de la realidad.

Respecto a ello, en la antigüedad los griegos creían que el mundo se podía explicar mediante las matemáticas, de aquí surgió la idea de la matematización del universo. Dando la pauta de algo que hoy en día se conoce como modelización

matemática, la cual establece que algunos problemas o situaciones pueden ser analizados mediante una ecuación matemática.

Para entender lo que se pretende establecer en esta investigación hay que abordar el concepto de modelación y modelización y hacer referencia a la utilización de estas en el proceso y propuesta educativa que se implemente.

Modelar es establecer relaciones matemáticas del mundo real con el propósito de generar un uso para diferentes situaciones. Villa (2007) llama a un modelo matemático como *“un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”*. (67)

Por otro lado, el mismo autor, define la modelización como el proceso de obtención de un modelo matemático. Es decir, la modelización está determinada por cada etapa que genera como producto la modelación matemática. En este sentido al momento de buscar potenciar las habilidades y conocimientos de los estudiantes por medio de situaciones reales se emplea la modelización matemática como estrategia para el proceso de aprendizaje.

Según Hein & Biembengut (2006: 1) “La modelización matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad a un lenguaje matemático: modelo matemático”. En el cual es necesario tomar en consideración aspectos referentes de la situación a modelar, así como, la estructuración del mismo y la correcta utilización de los conceptos matemáticos que se necesitan. Así se puede mostrar al alumno una forma interesante para la

presentación y uso de los tópicos matemáticos, desarrollando en él habilidades comprensivas y manipulativas de algún tema específico.

La modelización matemática según autores como Bosch, García, Gascón, & Ruíz (2006: 44) se puede tomar como “una herramienta desde el punto de vista didáctico ó como un contenido más restringido a la relación de las matemáticas con alguna disciplina concreta”. Como herramienta supone un medio para asimilar el aprendizaje en situaciones concretas, representación matemática del medio, y como contenido plantea las conexiones de los contenidos matemáticos con otras ciencias, donde ambas perspectivas coinciden en la aplicabilidad matemática.

Modelar (considérese como modelización), mediante ecuaciones polinómicas, hace uso de representaciones algebraicas que deben ser identificadas por los estudiantes para obtener una ecuación acorde a lo que se plantea. Para ello, en ocasiones, se requieren ciertos conocimientos previos como ser proporcionalidad, fórmulas de distancias, velocidad, interés compuesto y simple, por mencionar algunas. Lo que conlleva a la necesidad de dotar a los estudiantes de material y/o procesos para asimilar estos conocimientos que se fundamentan en la resolución de problemas.

Por otro lado, al tratar de emplear la modelización como estrategia didáctica en el aula, se presentan ciertos obstáculos relacionados con el tiempo, espacio y conocimientos matemáticos que se abordan en cursos superiores. Por lo que es necesario amoldar la modelización de acuerdo a los objetivos o competencias que el profesor busca desarrollar en los estudiantes.

Respecto a ello Villa (2007: 70) menciona que:

En la mayoría de los casos, el proceso de modelización matemática no se puede desarrollar en todo su sentido en el aula de clase, en parte, porque algunas de las situaciones del mundo real a las que se pueden ver enfrentados los estudiantes, requieren de herramientas matemáticas que no siempre se encuentran en correspondencia con su desarrollo del pensamiento; por tanto, el docente debe realizar un proceso direccionado en dos sentidos: primero, el de descontextualización y segundo, el de recontextualización de tal manera que la situación, sin perder su esencia e intencionalidad, se transforme de tal manera que propicie el aprendizaje de los estudiantes.

Añadiendo a esto la amplia gama de aplicaciones que se pueden representar mediante ecuaciones, situación que podría desorientar y abrumar al estudiante, por lo que resulta favorable restringir el tipo de ecuaciones para un mayor control de los modelos y casos que se puedan presentar. Tomando como punto de partida aquellos problemas que se representan mediante ecuaciones lineales con una incógnita.

### **2.3.1 Ecuaciones lineales con una incógnita**

Una ecuación lineal con una incógnita se define como *“una expresión algebraica que simplificada se puede expresar en la forma  $ax + b = 0$ , donde*

$a \neq 0$ , y  $a, b \in R$ . (Swokowski & Cole, 2006: 61). Las aplicaciones que se permiten desarrollar mediante ecuaciones de este tipo son varias, sin embargo suelen considerarse unas cuantas, las cuales a su vez, permitirán la asimilación de nuevas aplicaciones que podrían surgir. Lo que hay que tener presente son los aspectos claves para poder representar un problema mediante una ecuación; la traducción al lenguaje matemático, la estructuración de las relaciones y generación del modelo, la resolución de la ecuación y el análisis de la respuesta encontrada.

Autores como Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velasquez, Villegas y Flores (2012) consideran que:

Mediante las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se contribuye al desarrollo de las siguientes competencias: formular, plantear, transformar y resolver problemas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer, cuando y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. (87)

Aludiendo a la importancia que conlleva el estudio y la formación de los estudiantes en este objeto matemático mediante la resolución de problemas, y de acuerdo al programa de la asignatura que se busca analizar, se considera aplicaciones de cinemática, mezclas de sustancias, interés simple y de relación de cantidades, modeladas mediante ecuaciones lineales con una variable. Todas

ellas clasificadas de acuerdo a Cifuentes y cols (2012) en cuatro tipos de problemas:

1. Proporcionalidad simple
2. Función afín.
3. Proporcionalidad compuesta e igualdad de combinaciones afines. (Implican problemas de movimiento, mezclas, velocidad)
4. Función de funciones. (Problemas de sustitución y de edades) (97-107)

Cada una de estas categorías considera ciertos problemas, los cuales se enmarcan en los que se han establecido para analizar. Para el caso del tipo de proporcionalidad simple, acoge aquellas aplicaciones que involucran proporciones o porcentajes. Un ejemplo de ellas son algunos problemas de interés simple, los cuales se encuentran en numerosos textos, y de particular interés los usados en las asignaturas que se brindan en la UNAH-VS, como ser Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica de Swokowski & Cole (2006), Precálculo de Sullivan (2005) y Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía de Arya & Lardner (2009).

Sullivan (2005) introduce al lector a este tipo de aplicaciones definiendo el interés y mostrando la fórmula general, de la siguiente forma.

El interés es el dinero pagado por el uso del dinero. La cantidad total prestada (sea por un banco a una persona en la forma de crédito por un individuo a un banco en la forma de una cuenta de ahorros) se llama capital. La tasa de interés, expresada como

porcentaje, es la cantidad cargada por el uso del capital  $P$  durante un periodo de  $t$  años a una tasa anual  $r$ , expresado como un decimal, el interés simple cargado será  $I = Prt$  (25)

Sin embargo al dar a conocer la fórmula resulta favorable analizar la relación que se emplea, donde se pueda guiar al estudiante a que determine lo que sucede al aumentar o disminuir el capital o el tiempo.

Por otro lado los textos insertan problemas relacionados a una proporción simple con temáticas de descuento de artículos, distancia, circuitos eléctricos u otras áreas, donde dan a conocer la fórmula o relación existente para que puedan llegar a la ecuación.

Algunos ejemplos de problemas que exponen los libros de textos de esta temática son los siguientes

- Durante una venta de liquidación un artículo tiene marcada una rebaja de 20%. Si su precio de liquidación es \$2, ¿cuál era su precio original? (Arya & Lardner, 2009: 73)
- En teoría eléctrica, la ley de Ohm afirma que  $I = \frac{V}{R}$ , donde  $I$  es la corriente en amperes,  $V$  es la fuerza electromotriz en voltz y  $R$  es la resistencia en ohms. En cierto circuito  $V = 110$  y  $R = 50$ . Si se cambian  $V$  y  $R$  en la misma cantidad numérica, ¿qué alteración en ambos hará que  $I$  se duplique? (Swokowski & Cole, 2006: 80)
- La fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración. (Sullivan, 2005: 148)

Los problemas que involucran algunos conceptos económicos como ser costos, utilidades, o problemas que resultan de la forma  $y = mx + b$ , son propios de la categoría de función afín, algunos ejemplos de esta tipología son:

- Un fabricante de zapatos puede vender a \$80,000 el par. Si tiene unos costos fijos totales de \$400,000, mas unos costos de producción de \$20,000 por cada par de zapatos que fabrica, determine cuántos pares de zapatos se deben fabricar para obtener una utilidad total de \$800,000. (Cifuentes Á. P., Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, & Flores, 2012)
- A un fabricante le cuesta \$2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60¢ por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90¢, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de \$1000. (Arya & Lardner, 2009: 73)
- Seiscientas personas asisten a presencia el estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan 5\$ y los de niños \$2. Si la taquilla recibió un total de \$2,400, ¿cuántos niños asistieron al estreno? (Swokowski & Cole, 2006: 77)

En cuanto a los problemas que caen en la tipología de proporcionalidad compuesta, se encuentran aquellos que hacen uso de conceptos que se abordan en las tipologías anteriores, proporcionalidad simple y función afín, donde hacen

comparación de dos o más aspectos modelados por estas. Los problemas de mezclas, distancias, decisión de inversión, son ejemplos de estos.

En cuanto a las aplicaciones de mezclas cabe resaltar lo que establece el Instituto de Monterrey, manifestando que

Los problemas de mezclas son un subconjunto de los problemas de tasas. Para resolverlos, es importante reconocer primero el contexto en donde el problema ocurre, y luego identificar una fórmula que pueda ser usada para representar las diferentes cantidades (y tasa a las que esas cantidades ocurren) dentro del problema. Los problemas de mezclas normalmente pueden definirse en términos de una sola variable, aunque algunas personas prefieren representarlos con sistemas de dos variables. (MITE, 2014)

Las diferentes proporciones o tasas que se presentan en estos problemas, resalta que para un abordaje correcto se requiere conocer el contexto, pues las representaciones de las expresiones algebraicas pueden variar en concepto. Por ende, las dificultades en este tipo de problemas se podrían presentar en la asignación de la variable, producto de una mala comprensión de lo solicitado.

Por ejemplo Swokowski & Cole (2006: 74) en su libro Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica plantea el siguiente problema, dando una referencia al lector por medio de una figura

Un radiador contiene 8 cuartos [1 cuarto (unidad sajona que se abrevia qt) $\approx$ 0.946 l] de una mezcla de agua y anticongelante. Si 40% de la mezcla es

anticongelante, ¿cuánto de ésta debe drenarse y sustituirse por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% de anticongelante?

Solución: Sea  $x$  = número de cuartos de la mezcla por drenar.

Como había 8 qt en la mezcla original a 40%, el problema se puede describir como en la figura 1.

Figura 1: Representación pictográfica (mezclas)

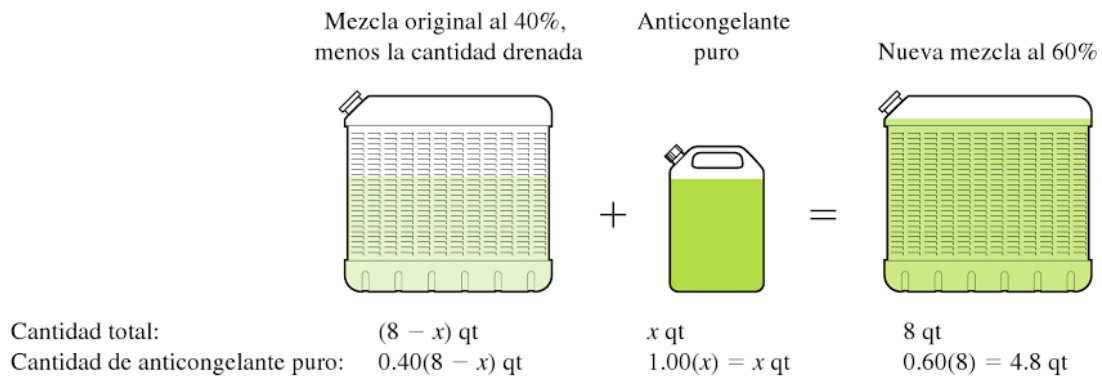


Figura 1: Representación pictográfica de Swokowski y Cole (2006: 74)

En vista de que el número de cuartos de anticongelante puro de la mezcla final se puede expresar como  $0.40(8 - x) + x$ , se obtiene la ecuación

$$0.40(8 - x) + x = 4.8$$

Resolviendo la ecuación obtenida se tiene que  $x = \frac{8}{3}$  qt de la mezcla original.

En consecuencia, hay que drenar  $\frac{8}{3}$  qt de la mezcla original.

Comprobación: Observemos primero que la cantidad de anticongelante de la mezcla original de 8 qt era  $0.4(8)$ , o sea 3.2 qt. Al drenar  $0.4(8)$  qt de la mezcla original al 40%, se pierden  $0.4\left(\frac{8}{3}\right)$  qt de anticongelante y, por tanto, quedarán  $3.2 - 0.4\left(\frac{8}{3}\right)$  qt de anticongelante después del drenado. Si agregamos  $\frac{8}{3}$  qt de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante de la mezcla final es  $3.2 - 0.4\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{8}{3} = 4.8 \text{ qt}$

El saber lo que representa cada expresión algebraica en la aplicación conlleva a la ecuación lineal adecuada que modela el problema planteado. El determinar cada expresión en términos de una sola variable es un punto a considerar para la adecuada construcción y posteriormente resolución del problema. Sin embargo en algunos planteamientos los representan con sistemas de dos variables, por ejemplo en el caso anterior al considerar la variable  $y$  como la cantidad mezcla original al 40% y  $x$  como la cantidad de anticongelante se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} y & + & x = 8 \\ 0.4y & + & x = 0.6(8) \end{array}$$

Donde al resolverlo mediante el método de sustitución se tiene que  $y = 8 - x$  y posteriormente al sustituir en la siguiente ecuación se obtiene  $0.4(8 - x) - x = 4.8$ , lo cual muestra que es equivalente a la ecuación lineal que se construyó anteriormente. En este sentido hay que destacar que se busca que el estudiante haga uso de una sola variable y para poder plantear una ecuación lineal en la resolución del problema.

Por otro lado los problemas de decisión de inversión hacen uso del concepto de interés simple para la formulación de la ecuación que resuelve lo que se plantea. Como ejemplo se expone el problema extraído del texto de Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía de (Arya & Lardner, 2009).

La señora Cordero va a invertir \$70,000. Ella quiere recibir un ingreso anual de \$5,000. Puede invertir sus fondos en bonos del gobierno a un 6% o, con un riesgo mayor, al 8.5% de los bonos hipotecarios. ¿Cómo debería invertir su dinero de tal manera que minimice los riesgos y obtenga \$5,000?

Solución: Sea la cantidad invertida en bonos del gobierno  $x$  pesos. Entonces la cantidad invertida en bonos hipotecarios es  $(70,000-x)$  pesos. El ingreso recibido por los bonos gubernamentales al 6% es  $\frac{6}{100}x$  pesos. El ingreso percibido por los bonos hipotecarios al 8.5% es

$$\frac{8.5}{100}(70,000 - x) = \frac{85}{1000}(70,000 - x) \text{ pesos}$$

Dado que el ingreso total recibido por los tipos de bonos debe ser de \$5,000,

$$\frac{6}{100}x + \frac{85}{1000}(70,000 - x) = 5,000$$

Resolviendo la ecuación lineal anterior se tiene que  $x = 38,000$  pesos

En consecuencia, la señora Cordero debería invertir \$38,000 en bonos del gobierno y los restantes \$32,000 en bonos hipotecarios. Ella podría aumentar su ingreso invirtiendo una proporción más grande de su capital en bonos hipotecarios, pero incrementaría su riesgo.

En la resolución de la aplicación el proceso empleado es esquemático y constructivo, en el cual se puede hacer mención del modelo de Polya en su desarrollo. Donde la fase uno y dos del método de George Polya se cumple cuando se define lo que representa la variable y cada expresión algebraica, y concluye al construir la ecuación lineal; la tercera fase se desarrolla al resolver la ecuación lineal encontrando con ello la solución al problema. Sin embargo la fase cuatro, que corresponde a la visión retrospectiva, no es presentada. Cabe destacar que para usar el método heurístico de Polya hay que argumentar lo realizado y con ello se muestra en papel el análisis y el progreso que el estudiante posee al resolver problemas.

Un caso similar al anterior lo presenta Swokosky (2005) con el siguiente ejemplo,

Dos ciudades están conectadas por una carretera. Un auto sale de la ciudad B a la 1:00 P.M. y avanza con una rapidez constante de 40 mi/h hacia la ciudad C. Treinta minutos después, otro vehículo sale de B y avanza hacia C con una rapidez constante de 55 mi/h. Si despreciamos las

longitudes de los autos ¿a qué hora alcanzará el segundo automóvil al primero?

Solución: Denotemos con  $t$  el número de horas de viaje del primer auto después de la 1:00 P.M. Como el segundo sale de B a la 1:30 P.M. ha viajado  $\frac{1}{2}$  hora menos que el primero, lo que lleva a la tabla 2. La cual establece los datos conocidos, como la rapidez, y representa los datos por conocer con expresiones algebraicas de acuerdo a las condiciones que establece el enunciado del problema.

Tabla 2:  
*Ordenamiento de datos de ejercicio*

Autos	Rapidez (mi/h)	Horas de viaje	Millas recorridas
Primer auto	40	$T$	$40t$
Segundo auto	55	$t-1/2$	$55(t-1/2)$

Fuente: (Swokowski & Cole, 2006)

Figura 2: Representación pictográfica (cinemática)

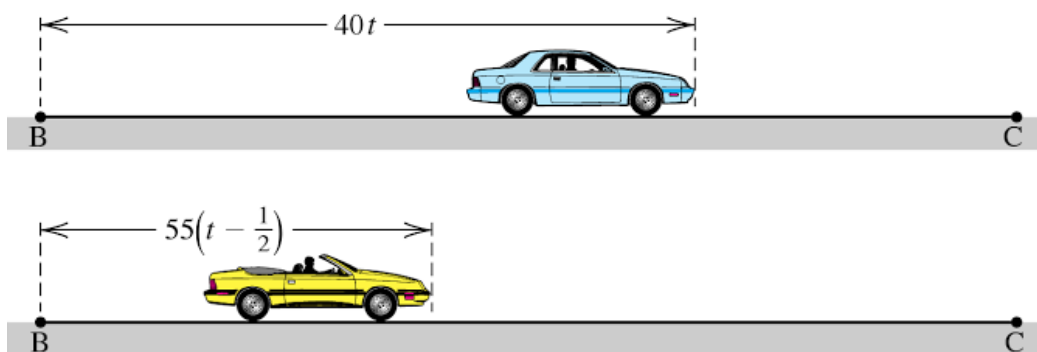


Figura 2: Representación pictográfica de Swokowski y Cole (2006: 75)

La figura 2 ilustra las posibles posiciones de los vehículos  $t$  horas después de la 1:00 P.M. El segundo alcanza al primero cuando el número de millas recorridas por los dos autos es igual; esto es, cuando

$$55 \left( t - \frac{1}{2} \right) = 40t$$

$$t = \frac{11}{6} \text{ horas}$$

En consecuencia,  $t$  es  $1\frac{5}{6}$  horas o, lo que es igual a, 1 hora 50 minutos después de la 1:00 P.M. por lo que el segundo auto alcanza al primero a las 2:50 P.M.

El proceso mostrado para la resolución del problema anterior determina los significados de las expresiones algebraicas. Los cuales son necesarios para poder modelar la situación mediante la ecuación lineal que se plantea. En este sentido se destaca la variable  $t$  como el tiempo en horas del viaje del primer vehículo y de acuerdo a los datos  $t-1/2$  representa el tiempo en horas de viaje del segundo auto. Por otro lado el empleo de la fórmula descrita anteriormente se utiliza para poder determinar la expresión algebraica que representa la distancia recorrida de cada auto. Con ello se llega a concluir la fase dos que Polya establece en su modelo. La identificación y relación de estas expresiones vienen a ser determinantes para construir la ecuación que brinda la respuesta correcta a la interrogante.

Del análisis de los problemas planteados por diferentes autores se destaca la utilización de un proceso argumentativo para la estructuración de la ecuación

que resuelve lo planteado. Sin embargo no siempre se analiza el resultado obtenido, traslapándolo con el enunciado que se brinda con el fin de analizar y explicar la veracidad de la respuesta encontrada.

Por último la categoría de función de funciones considera problemas, que como el ejemplo de mezclas brindado anteriormente, se pueden estructurar por medio de un sistema de ecuaciones. Cifuentes & col. (2012) establecen que:

En este contexto se encuentran, por ejemplo, los problemas de sustitución y de edades. Por otra parte, las ecuaciones de primer grado dan respuesta a la solución de problemas matemáticos y de la vida real en la medida en que sirven para encontrar un dato desconocido conocida la igualdad entre dos combinaciones afines de ese dato. Los fenómenos están relacionados estrechamente con las subestructuras, pues ellas los expresan matemáticamente mediante modelos.

Dentro de esta categorización se consideran los siguientes ejemplos

- Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años, el tendrá el doble de la edad de su vástago. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora? (Arya & Lardner, 2009)
- Un estudiante de un curso de álgebra obtiene notas de 75, 82, 71, y 84 en los exámenes. ¿Qué calificación en su siguiente prueba elevará su promedio a 80? (Swokowski & Cole, 2006)

## 2.4 Propuesta

La propuesta metodológica desarrollada, se establece considerando aspectos de otros autores, como ser Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas y Flores (2013), los cuales mencionan que.

El trabajo con las ecuaciones lineales de primer grado contribuye al desarrollo de las competencias, pues el estudiante (a) desarrolla pensamiento matemático en la medida en que traduce desde el lenguaje natural al simbólico y formal; (b) maneja expresiones que contienen fórmulas y símbolos; (c) utiliza los diferentes tipos de representación de las ecuaciones de primer grado y las relaciona de acuerdo con el propósito; (d) decodifica e interpreta el lenguaje simbólico —debe traducir la realidad a una estructura matemática mediante un modelo matemático—; y (e) puede analizar, reflexionar y criticar un modelo y sus resultados. La competencia que tiene mayor relevancia para nuestro trabajo es utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones.

Además la propuesta se basa en estrategias metacognitivas, pues pretende analizar y a su vez desarrollar los conocimientos de los estudiantes con base en lo que se sabe acerca de las cosas (conocimiento declarativo), se sabe sobre cómo hacer las cosas (conocimiento procedimental) y el conocimiento del por qué y cuándo de los aspectos (conocimiento condicional). (Rodríguez, 2004)

Dicha propuesta se realiza en 6 días diferentes, en los cuales se toman 50 minutos por día para trabajar la propuesta de forma presencial y grupal, y se

asignan dos horas para que los estudiantes trabajen en sus casas con una guía y presenten un trabajo individual. Los trabajos en casa se comparten de manera virtual por medio de la plataforma destinada para la clase.

En ese sentido se considera para el primer día, la aplicación de una prueba diagnóstica con la cual se identifican las dificultades que poseen los estudiantes al resolver problemas por medio de la resolución de los mismos y una serie de preguntas que permiten conocer y contrastar lo realizado con lo que plantean en las respuestas a las interrogantes (Anexo 2).

El pretest o prueba diagnóstica consta de cuatro problemas donde cada uno de ellos recae en una de las cuatro categorías que establecen Cifuentes y cols. (2012), siendo el primer problema el que corresponde a la categoría de proporcionalidad simple, el segundo problema a la categoría de función afín, el tercero a la categoría de proporcionalidad compuesta y el cuarto a la categoría de función de funciones (Anexo 2). Además se comparte la solución de los problemas de la prueba diagnóstica por medio del campus virtual, con el fin que los estudiantes puedan identificar sus fallos (Anexo 3)

Seguidamente, se establecen 4 sesiones presenciales en las cuales se muestra paulatinamente la estrategia sistemática para resolver problemas, abordando en cada sesión diferentes fases del método heurístico de Polya. Cabe resaltar que en las sesiones presenciales se desarrolla trabajo grupal, donde previamente se les comparte a los estudiantes los problemas a discutir en cada sesión por medio de un medio virtual, para que en la sesión presencial puedan

comentar con los miembros de su grupo lo analizado y presentar un trabajo consensuado por el grupo. Los grupos se conforman entre los mismos estudiantes por afinidad, puesto que no es necesario que sean homogéneos ya que la propuesta busca implementar el trabajo colaborativo luego de un análisis individual, el cual es realizado por el estudiante previamente.

Además para cada día después de cada sesión presencial, los estudiantes deben de presentar una asignación individual, que consiste en resolver diferentes problemas aplicando lo desarrollado en la sesiones de cada fase. Con ello se pueden ver los errores individuales y el logro alcanzado por cada individuo durante la aplicación de la propuesta.

La fase de comprensión del problema se aborda en una sesión presencial, desarrollada el día siguiente de la aplicación de la prueba diagnóstica (Anexo 5). Para la cual se discuten los siguientes dos problemas

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Bryan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo, de ida y vuelta, duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Bryan en su bicicleta?

En los cuales deben de explicar con sus propias palabras lo que plantea cada problema, identificar los datos desconocidos que se quieren conocer, de ser posible, representar el problema mediante un diagrama o dibujo e identificar la incógnita y lo que representa. Estos aspectos fueron considerados con base a los indicadores que se determinaron mediante los trabajos de Boscan Mieles y Klever Montero (2012), Chavarría (2014), Pochulu (2005), entre otros.

Para el día siguiente los estudiantes entregan la asignación #1 (Anexo 6) que consiste en hacer lo mismo que realizaron con su grupo en clase, solo que ahora de forma individual. Para ese día también se desarrollan las fases de elaboración y ejecución de un plan, donde la forma de trabajo es igual que en la sesión anterior, los estudiantes en sus casas analizan los problemas a desarrollar y en la sesión presencial discuten con su grupo y presentan el trabajo respectivo (Anexo 5). Para esta sesión se trabaja con los dos problemas de la sesión anterior y uno nuevo problema, el cual es el siguiente

**Problema 3:** Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?

Lo que se debe realizar en cada problema va orientado al cumplimiento de los indicadores que miden el desarrollo de estas dos fases. Se les pide a los discentes que representen los datos por conocer en términos de la incógnita, la cual se identificó en la sesión anterior, que establezcan relaciones entre esos términos mencionando lo que representa cada expresión o término algebraico;

que construyan la ecuación que modela la situación planteada y resuelvan la ecuación.

Para el problema 3, deben hacer lo que se les pedía en la sesión anterior y lo de esta sesión, esto con el objetivo de retroalimentar la primera fase del proceso. Para el día siguiente se aplica la metodología desarrollada para esta fase a los mismos problemas de la asignación #1 (Anexo 6) y se entrega de manera individual.

Para la fase de visión retrospectiva, se analizan de manera grupal los problemas que han sido abordados en las sesiones anteriores. Esta fase se desarrolla en una sesión presencial, que al igual que en la sesión anterior, se añade un nuevo problema para que el grupo lo desarrolle considerando las fases anteriores (Anexo 5). El nuevo problema plantea lo siguiente

**Problema 4:** Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por \$2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de \$185 en la transacción completa. Encuentre el costo de cada automóvil.

En esta fase de busca analizar la respuesta obtenida y el proceso desarrollado considerando tres aspectos. El primero, verificar las relaciones que se establecieron en la fase 2; el segundo, justificar la construcción de la ecuación; y el tercero, comprobar la solución de la ecuación planteada. Con ello se revisa el proceso de construcción y resolución de la ecuación planteada y la adecuación de

esta respuesta en base a las relaciones que se deben cumplir de acuerdo al enunciado.

Con esto se desarrolla cada fase del proceso de Polya en tres sesiones presenciales. Además se deja una nueva asignación a presentar dentro de los dos días siguientes, en la cual deben de resolver los cuatro problemas que han abordado en asignaciones previas y cuatro nuevos problemas, los cuales deben resolverlos aplicando todo el proceso.

Luego de abordar la fase de visión retrospectiva, se establece una nueva sesión presencial, en la cual el docente desarrolla un problema ejemplificando el proceso y recalcando aspectos puntuales del mismo. Con ello se pretende reforzar la metodología planteada para resolver problemas y despejar dudas de los estudiantes. El problema queda a elección del docente, sin embargo se sugiere que sea de mezclas, pues de acuerdo a observaciones realizadas este tipo de problemas genera mucha dificultad en los estudiantes.

Finalmente la última sesión corresponde a la aplicación de una prueba final (Anexo 4) la cual consta de cuatro problemas de diferentes categorías de acuerdo a la categorización establecida por Cifuentes y cols. (2012).

Como muestra de desarrollo de los ejercicios con base a la propuesta se expondrá la resolución del siguiente problema,

Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 millas por hora, o en una bicicleta a una velocidad de 12 millas por hora. Si le toma una hora

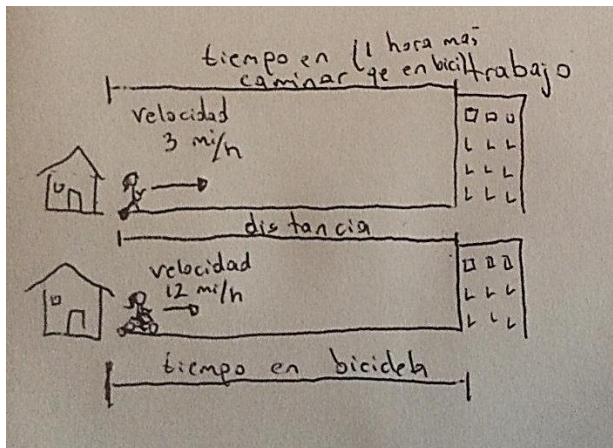
más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

Solución:

### **Fase 1: Comprensión del problema**

**Explicación:** el problema busca determinar el tiempo que tarda una mujer en moverse de un lugar a otro caminando. Para lo cual se brindan datos de velocidad con la que camina y velocidad de la mujer cuando va en bicicleta.

### **Representación pictográfica:**



**Identificación de incógnita:** Se desconoce el tiempo que tarda la mujer en ir al trabajo en bicicleta y el tiempo que tarda en ir al trabajo caminando. Sea  $t$  el tiempo que tarda la mujer yendo en bicicleta.

### **Fase 2: Formulación de un plan**

**Representación de datos en términos de la incógnita:**  $t + 1$  : representa el tiempo que tarda en ir caminando.

**Relación de términos:** La distancia que recorre en ambos casos es la misma, si va en bicicleta sería  $12t$  si va caminando el término sería  $3(t + 1)$ , esto se obtienen mediante la fórmula de distancia que es velocidad por tiempo.

### **Fase 3: Ejecución de un plan**

**Construcción de la ecuación y resolución de la ecuación:**

$$\begin{aligned}12t &= 3(t + 1) \\12t &= 3t + 3 \\12t - 3t &= 3 \\9t &= 3 \\t &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

**Respuesta:** El tiempo que le toma en ir al trabajo caminando es  $t + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ , lo que equivale a una hora y veinte minutos.

### **Fase 4: Visión retrospectiva**

**Justificación de la construcción de la ecuación:** La ecuación se construye mediante la premisa que la distancia en ambos casos es igual, por lo que se iguala la distancia cuando la mujer se mueve caminando con la expresión que representa la distancia cuando la mujer se mueve en bicicleta.

**Comprueba la ecuación:** Sustituyendo el valor encontrado en la ecuación se tiene que se cumple la igualdad

$$\begin{aligned}12\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3} + 1\right) \\ \frac{12}{3} &= 3\left(\frac{4}{3}\right) \\ 4 &= 4\end{aligned}$$

**Cumple las relaciones:** Las relaciones que deben de cumplir es que el tiempo en ir caminando es una hora más que el tiempo en bicicleta, lo cual se cumple. Además la distancia debe ser la misma, lo cual se observa en la comprobación que se cumple.

En resumen, la propuesta desarrolla un proceso continuo para la asimilación del proceso propuesto para resolver problemas, basadas en cuatro fases donde se analiza el cumplimiento de cada instrucción para lograr la solución adecuada al problema.

### **3. Marco Metodológico**

Un marco metodológico expone todo el proceso realizado en la investigación, el enfoque, diseño, técnicas de recolección de datos y formas de analizar los resultados obtenidos. Franco, Y. (2011) define el marco metodológico como “el conjunto de acciones destinadas a describir y analizar el fondo del problema planteado, a través de procedimientos específicos que incluye las técnicas de observación y recolección de datos, determinando el cómo se realizará el estudio”.

La metodología muestra el conjunto de métodos que se utilizan en la investigación, que en base al enfoque y diseño se determinan las variables, población estudiada, hipótesis y el plan a seguir para el análisis de datos. “*El término diseño se refiere al plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea*”. (Hernández Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio, 2010: 120)

A continuación se detalla la metodología concebida para la situación problemática planteada, considerando los aspectos mencionados anteriormente, los cuales exponen el camino que guía la presente investigación.

#### **3.1 Enfoque, diseño y tipo de investigación.**

De acuerdo a la problemática que se plantea se requiere una metodología que permita determinar las dificultades que se presentan al momento de resolver

problemas, las cuales se necesitan analizar si siguen presentes al ejecutarse una nueva forma de buscar la solución de estos, es decir, mostrar si las dificultades detectadas son inalterables aun cuando se sistematiza y se orienta a un proceso de mejora. Además de esto, la comparación de un antes y después resulta indispensable con el fin de verificar si se produce una mejora y que tan buena es, en cuanto a resultados y aceptación de la misma por los participantes en el proceso.

En ese sentido, el enfoque cuantitativo posee características de acorde a lo que se busca; como ser la medición de la variable o variables que se consideran. Además establece un proceso secuencial en el cual se analiza la etapa previa a la intervención y la etapa final del experimento (Hernández Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio, 2010: 5). Mostrando con ello un diseño preexperimental, propio de este enfoque.

Por otro lado, el enfoque cualitativo, como menciona Sampieri (2010) “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación”, haciendo uso de técnicas de recolección de datos como ser entrevistas y evaluación de experiencias personales. Aspectos que se requieren en el estudio con el fin de establecer una propuesta acorde al entorno, interpretar la aceptación de la misma y las dificultades que se presentan en la resolución de los problemas en cada parte del proceso.

Es así como se selecciona una combinación de ambos enfoques, haciendo uso de técnicas y procedimientos de ellos, lo cual enriquece el estudio. Respecto a esto Todd, Nerlich, y McKeown (2004), citado por Hernández, Fernández y Baptista (2006: 755-756) mencionan que:

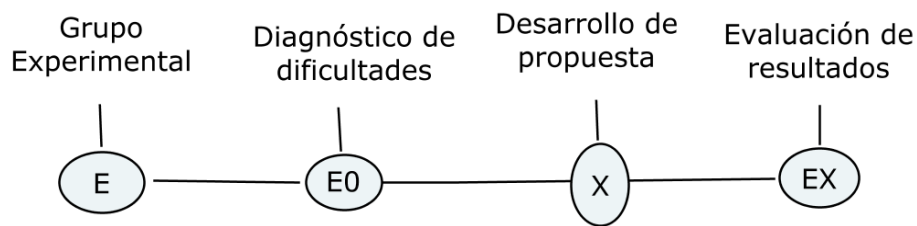
Se logra una perspectiva más precisa del fenómeno. Nuestra percepción de éste es más integral, completa y holística. Además, si son empleados dos métodos –con fortalezas y debilidades propias-, que llegan a los mismos resultados, esto incrementa nuestra confianza en que éstos son una representación fiel, genuina de lo que ocurre con el fenómeno estudiado.

En cuanto al alcance del estudio, se busca especificar dificultades, reacciones de la propuesta aplicada y observar los resultados obtenidos. Llevando a la selección de un estudio de tipo descriptivo, el cual según Sampieri (2010) “busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. Describe tendencias de un grupo o población.” Con ello se logra una revisión y análisis de los datos de acuerdo a la frecuencia de estos, permitiendo resaltar aquellos aspectos que más contribuyen o retrasan el desarrollo de los estudiantes para resolver los problemas.

Finalmente, referente al diseño de investigación, su selección fue determinada por los aspectos prácticos y particulares al entorno. Al buscar realizar una intervención educativa el grado de control que se requiere es mínimo, pero se necesita dar seguimiento a un proceso. Por lo cual un diseño de

preprueba y posprueba a un solo grupo resulta indicado. Además según Sampieri (2010) si no se busca establecer relaciones causales los diseños preexperimentales pueden ser usados. Por tales motivos se selecciona un diseño preexperimental para la presente investigación, en el cual se realiza un diagnóstico del grupo, se ejecuta la propuesta y se verifica mediante un test los resultados, los cuales a su vez permiten compararse con los resultados previos. El siguiente diagrama representa el proceso que se sigue.

Figura 3: Diagrama del proceso investigativo



El diagrama de la Figura 3 muestra que el punto de partida es la selección del grupo experimental (E) al cual se le aplica una evaluación diagnóstica (EO) para determinar las dificultades. Seguidamente se desarrolla la propuesta (X) con dicho grupo experimental y se evalúa los resultados obtenidos (EX).

### 3.2 Población y Muestra

Los sujetos estudiados corresponden a los estudiantes que cursan la asignatura de Matemática I de la UNAH-VS en el Primer Período Académico (I PAC) del año 2018. Tomando la sección 1400 en horario de 2:00 pm a 3:00 pm, la cual cuenta con 58 alumnos matriculados, de los cuales 12 son de reingreso y 46

son de primer ingreso. Del total de alumnos matriculados en dicha sección solo 53 fueron partícipes del proceso, quedando así 11 de reingreso y 42 de primer ingreso. Dentro de los 53 estudiantes, no todos cumplían con las asignaciones por lo que el total analizado variaba en cada fase del proceso.

Según McMillan & Schumacher (2005: 407) este tipo de muestreo recae en lo que él menciona un muestreo comprensible, pues se elige un grupo entero a partir de criterios. El muestreo es no probabilístico y corresponde a las muestras intencionadas, las cuales permiten analizar la situación estudiada de acuerdo al enfoque y lo que pretende el investigador. En este caso el criterio de la muestra es tomada de acuerdo a la jornada que permite una mayor facilidad de interacción con el grupo y porcentajes de aprobación intermedios en comparación con otras.

Para la prueba piloto, se consideró a los estudiantes que cursan la asignatura de Matemática 1 MM-110 de la UNAH-VS en el horario de 3:00 pm - 4:00 pm, en el primer periodo académico del año 2017. Siendo un total de 56 estudiantes matriculados. En cuanto a sexo 26 eran mujeres y 30 hombres, en cuanto a año de ingreso a la UNAH-VS, 39 eran de primer ingreso mientras que 17 eran de reingreso.

### 3.3 Operacionalización de Variables

Tabla 3:

*Operacionalización de variables*

<b>Variables</b>	<b>Definición conceptual</b>	<b>Definición operacional</b>	<b>Dimensión</b>	<b>Indicador</b>
METODOLOGÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS	Metodología mediante la cual se les plantea a los alumnos impulsos que les facilitan la búsqueda independiente de soluciones a los problemas	Actividades realizadas en cada una de las etapas o fases de la metodología, enfocadas en:  Comprensión del enunciado, concepción y ejecución de un plan y visión retrospectiva.	Comprensión del problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reformulación del problema</li> <li>• Identificación de la variable</li> <li>• Representación pictográfica</li> </ul>
			Elaboración de un plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer relaciones entre datos</li> <li>• Representar todos los términos en función de la variable</li> <li>• Reconocer estructuras de</li> </ul>

	propuestos. (Balderas, 1999)			ecuaciones <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construcción de la ecuación que modela la situación planteada.</li> </ul>
			Ejecución del plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solución de la ecuación planteada</li> <li>• Propiedades operacionales</li> </ul>
			Visión retrospectiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificación de la solución encontrada</li> </ul>
APRENDIZAJE DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS	Proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas,	Evaluación del modo de proceder de los estudiantes al resolver problemas de matemáticas de	Formulación Matemática (FM)	Traducción a lenguaje algebraico (TL)
				Planteamiento de la ecuación (PL)

	<p>conocimientos, conductas o valores relacionados con la toma de decisiones (conscientes e intencionales) en el cual el estudiante elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplir una determinada demanda u objetivo. (Monereo , Castelló,</p>	<p>acuerdo a cuatro dimensiones que son: Comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (Cumplimiento de indicadores y preguntas) y verificación de logro obtenidos (Pretest y Postest)</p>	Conocimientos Previos (CP)	Operación de porcentajes/fracciones (OP)
				Uso de Fórmula cinemática/utilidad (FC)
			Operatoria (O)	Operar números reales correctamente (ON)
				Aplica correctamente propiedades del algebra (PA)
			Interpretación	Interpretación de cada término algebraico (IE)
				Extracción adecuada de datos (CL)

	Clariana, Palma, & Perez, 1998)			
--	------------------------------------	--	--	--

Fuente: Propia

*Nota: La consideración de las variables fue basado en lo establecido por Boscan Mieles y Klever Montero (2012), tomando así la misma definición conceptual y operacional.*

### **3.4 Técnicas de recolección**

Las técnicas de recolección de datos fueron determinadas por el enfoque y características propias del diseño y el tipo de investigación. Entre las cuales se considera una entrevista (Anexo-1) a docentes, con el fin de indagar y conocer las percepciones de los educadores en cuanto a las dificultades que presentan los discentes en el tema de ecuaciones lineales con una incógnita. Pruebas diagnósticas (Anexo-2), para determinar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas, las cuales a su vez permiten recolectar información referente al agrado y percepción de los estudiantes al resolver problemas aplicados. Guías de trabajo en casa (Anexo-6), para ir midiendo el avance que tiene cada estudiante al momento de considerar la metodología planteada para la resolución de problemas, las cuales se elaboran en base a las dimensiones de la propuesta determinadas por las cuatro fases del método heurístico de George Polya. Y finalmente un post-test para medir si hubo mejora al aplicar la nueva metodología para resolver problemas y la satisfacción del estudiantado con respecto a ella (Anexo-4).

La propuesta (Anexo-5) se basa en las cuatro fases para resolver problemas planteadas por George Polya (1945), la cual fue elaborada considerando actividades que potencien cada fase. El tiempo programado para la realización de la propuesta, en un inicio, es alrededor de 400 minutos, distribuidos en 5 sesiones de la siguiente manera:

Tabla 4:  
*Distribución original de la propuesta*

Sesión 1	Pretest	50 min
Sesión 2	Comprensión del problema. (Presencial)	50 min
	Asignación 1 (Virtual)	50 min
Sesión 3	Elaboración y ejecución de un plan. (Presencial)	50 min
	Asignación 2 (Virtual)	50 min
Sesión 4	Visión retrospectiva. Resolución de problema. (Presencial)	50 min
	Asignación 3 (Virtual)	50 min
Sesión 5	Postest	50 min

Fuente: Propia

Sin embargo mediante un análisis de la prueba piloto se tuvo la necesidad de modificar la distribución del tiempo y sesiones, lo cual está detallado en el capítulo de análisis y resultados, quedando de la forma siguiente:

Tabla 5:  
*Desarrollo de la propuesta en el pilotaje*

Sesión	Actividad	Tiempo
1	Pretest	50 minutos
2	Comprensión del problema	50 minutos
3	Elaboración y ejecución de un plan	50 minutos
4	Visión retrospectiva	50 minutos
5	Retroalimentación, clase magistral	50 minutos
6	Postest	50 minutos

Fuente: Propia

Respecto a ello, investigaciones de autores como Cifuentes, et. al. (2013), consideran 11 sesiones en tiempo de 935 minutos, para realizar una propuesta con estudiantes de secundaria; Boscan & Klever (2012), 9 sesiones en un total de 540 minutos, aplicadas a estudiantes de secundaria; y San José, et al. (2007), solamente 2 sesiones de 50 minutos cada una, con el fin de determinar las dificultades de resolución de problemas. En base a esto se ha considerado una menor cantidad de tiempo, debido a que la propuesta es aplicada a estudiantes universitarios, quienes ya han recibido enseñanza de problemas aplicados y poseen cierto conocimiento de los mismos. Además el tiempo de la propuesta fue determinado por el programa de la asignatura Matemática I (MM-110), donde solo señala dos horas para resolver problemas de este tipo, que de acuerdo a la problemática planteada resulta insuficiente para lograr los objetivos. Por lo que se extiende la cantidad de tiempo sin alterar significativamente la secuencia y la programación del curso.

Por otro lado, los problemas fueron seleccionados, primeramente, de acuerdo a los estipulados en el programa de la asignatura, y clasificados según lo que establece Cifuentes A. P., Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, & Flores (2013: 97-100):

1. Proporcionalidad simple
2. Función afín. (implican conceptos económicos)
3. Proporcionalidad compuesta e igualdad de combinaciones afines. (implican problemas de movimiento, mezclas, velocidad)
4. Función de funciones. (Problemas de sustitución y de edades)

Es así como los ejercicios abordados, tanto en el pretest, postest, desarrollados en clase y asignaciones, fueron extraídos de diferentes textos utilizados para dicha asignatura, por lo que se considera, desde una primera instancia, una validez por parte de los autores. A su vez, estos, recaían en una de las clasificaciones mencionadas anteriormente.

### **3.5 Plan de análisis**

En el plan de análisis se requiere describir las herramientas, procesos y estrategias para obtener la información relevante al estudio de acuerdo a los datos recolectados. En ese sentido por poseer una combinación del enfoque cuantitativo y cualitativo, el análisis se encamina en dirección de ambos.

Primeramente, es necesario un ordenamiento de los datos recolectados a través de las diferentes técnicas. Por lo que se crea un archivo en Microsoft Excel que contenga la transcripción de las entrevistas realizadas a docentes, las opiniones de los alumnos al final de cada etapa de las sesiones y el cumplimiento de los indicadores al resolver problemas por parte de los estudiantes.

Para analizar la parte cualitativa se codifica los aspectos abordados en la entrevista de docentes y las opiniones de los alumnos, todo ello con el fin de realizar una triangulación de datos y determinar evidencias discrepantes o negativas. (McMillan & Schumacher, 2005: 477).

Las categorías que surgieron para el análisis de los datos, obtenidos mediante la entrevista, están representadas en la siguiente matriz

Tabla 6:  
Categorías de la entrevista

Categoría	Observación	Preguntas de la entrevista
Trayectoria	Permite observar y determinar la experiencia del sujeto.	#1, #2
Detección de dificultades	Establecen las dificultades observadas por los sujetos y sus factores.	#3, #3a, #4, #4a,
Planes de mejoras	Establece propuestas a considerar de acuerdo a la experiencia del sujeto	#3c, #4c.
Relevancia	Determina la importancia de intervenir la problemática planteada.	#4b

Fuente: Propia

Por otro lado las preguntas realizadas al final del pretest permiten determinar las dificultades de acuerdo a la opinión de los alumnos, las cuales junto con la entrevista y las observaciones durante el proceso de análisis, permitirán establecer aspectos concluyentes en torno a las dificultades que se presentan.

En cuanto a la aceptación de la propuesta, los resultados y opiniones de los discentes conducirán a la interpretación adecuada que permitirá determinar la calidad de la propuesta, junto con la revisión de expertos, quienes fueron docentes de la Institución que coordinan o han coordinado la clase de Matemática I, y los resultados que se obtengan en su aplicación.

Para el análisis de los datos cuantitativos se considera el modelo planteado por Hernández et al. (2006: 406) para el cual se selecciona un programa computacional, Microsoft Excel, que permita el ordenamiento de los datos, y generar las tablas de frecuencia y contingencia que se requiere. Con las cuales se producirá el reporte final.

En ese sentido lo que se busca medir es el progreso en el proceso de resolver problemas, para lo cual se considera las cuatro fases de George Polya (1945) como sus dimensiones, y se determinan indicadores basados en estudios previos. Es así como para el pretest y postest se considera los siguientes indicadores

### **Dimensiones a considerar en el pretest y postest**

Tabla 7:  
*Indicadores de las dimensiones*

<b>Dimensión</b>	<b>Indicador</b>
Comprensión del problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reformulación del problema</li> <li>• Identificación de la variable</li> <li>• Representación pictográfica</li> </ul>
Elaboración de un plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer relaciones entre datos</li> <li>• Representar todos los términos en función de la variable</li> <li>• Reconocer estructuras de ecuaciones</li> <li>• Construcción de la ecuación que modela la situación planteada.</li> </ul>
Ejecución del plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solución de la ecuación planteada</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propiedades operacionales</li> </ul>
Visión retrospectiva	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificación de la solución encontrada</li> </ul>

Fuente: Propia

Además en el desarrollo de la propuesta y las asignaciones estas dimensiones son analizadas y evaluadas de acuerdo a los indicadores. Las cuales se sintetizan en una tabla y se exponen los resultados obtenidos por medio del uso de un programa estadístico.

Por otro lado, en base al análisis de diferentes autores y observaciones en las diferentes sesiones se establece la siguiente categorización de errores:

Tabla 8:  
*Categorización de errores*

<b>Categoría</b>	<b>Indicador</b>
Formulación Matemática (FM)	Traducción a lenguaje algebraico (TL)
	Planteamiento de la ecuación (PL)
Conocimientos Previos (CP)	Operación de porcentajes/fracciones (OP)
	Uso de Fórmula cinemática/utilidad (FC)
Operatoria (O)	Operar números reales correctamente (ON)
	Aplica correctamente propiedades del algebra (PA)
Interpretación	Interpretación de cada término algebraico (IE)
	Extracción adecuada de datos (CL)

Fuente: Propia

Con todo ello se elabora una comparación mediante gráficos descriptivos de las dificultades que se detectaron al inicio del proceso y al final, además de los

resultados que se obtuvieron con el grupo. Considerando niveles de logros y porcentajes de aciertos en las diferentes etapas de resolver un problema, tomando una medición dicotómica en cada indicador, es decir, establecer si se cumplió o no el indicador respectivo durante el proceso.

Para la validación de la propuesta, Carlos Álvarez de Zayas (2007) establece que “las investigaciones pedagógicas tienen dos formas de validación: la primera se puede realizar mediante aplicación de la misma en la práctica pedagógica o enseñanza experimental y en la segunda se puede aplicar el criterio de especialistas o expertos.” Por lo que se realiza una prueba piloto con el fin de mostrar y analizar la consistencia y buena estructuración de la propuesta en la práctica. Lo que permite desvelar aspectos a reformular referente a la misma, particularmente en la instrucción, tiempo destinado, orden de actividades; así como, indicadores de las dimensiones que se han de considerar.

## **4. Análisis y discusión de resultados**

### **4.1 Prueba piloto**

Para el primer período académico (I PAC) del año 2017, se realizó un ensayo de la propuesta con el fin de identificar aquellos aspectos inconsistentes de la misma. Se tomó un grupo de estudiantes que cursan la clase de Matemática I y se procedió a desarrollar lo planificado previamente (Anexo-5). El grupo analizado correspondía a la sección 1500 de la clase de Matemática 1 (MM-110) de ese período académico siendo un total de 56 estudiantes matriculados, sin embargo solamente 42 fueron partícipes del proceso.

Primeramente se expuso a los estudiantes lo que se iba a realizar en los días próximos y se les notificó que se realizaría una prueba diagnóstica (Anexo-2) de aplicaciones con ecuaciones lineales. En ese sentido se les aconsejó que repasaran con el fin de no verse desprevenidos y asustados por la evaluación a realizarse.

Además se hizo hincapié en la importancia de revisar día a día el espacio virtual de la asignatura (Anexo-7), en el cual se les proporcionaría el trabajo a realizarse en el aula de forma grupal y el trabajo individual que deberían presentar el día siguiente. Con respecto a la conformación de los grupos, estos debían ser de 4 a 5 miembros, formados por afinidad entre los estudiantes.

El tiempo en que se realizó la propuesta excedió lo estipulado, siendo necesario realizar 6 sesiones de la siguiente manera:

Tabla 9:  
*Distribución de tiempo de la propuesta*

Sesión	Actividad	Tiempo
1	Pretest	50 minutos
2	Comprensión del problema	50 minutos
3	Elaboración y ejecución de un plan	50 minutos
4	Visión retrospectiva	50 minutos
5	Retroalimentación, clase magistral	50 minutos
6	Postest	50 minutos

Fuente: Propia

El hecho de aumentar un día más la propuesta ocurrió debido a las dificultades que encontraban los grupos al trabajar con lo que se les planteaba, estableciendo solo para la primera sesión la discusión, mientras que para las sesiones posteriores la discusión se dejó para el día siguiente. Además, el día añadido fue destinado para que el docente mostrara mediante un ejemplo el método planteado, resaltando cada uno de los pasos y en particular la fase 4 correspondiente a la verificación de la solución.

### **Pretest**

Los errores que se evidencian en la prueba diagnóstica son los siguientes:

De un total de 42 individuos:

Tabla 10:  
*Errores en el pretest en pilotaje*

Ejercicio	Error	Cantidad
-----------	-------	----------

#1 Porcentajes	Análisis	31
	Operaciones	5
#2 Función afín	Análisis	32
	Operaciones	7
#3 Mezclas	Análisis	22
	Operaciones	7
#4 Función compuesta	Análisis	13
	Operaciones	7

Fuente: Propia

Para la etapa piloto de la propuesta se consideran dos grupos de errores, procedimentales (operaciones) y analíticos, estos últimos involucran interpretación de los datos brindados y la forma de cómo trabajarlos. La tabla 10 muestra la frecuencia con que se da cada tipo de error, siendo los errores analíticos los que predominan en todos los ejercicios.

Cabe resaltar que en los últimos dos ejercicios la cantidad de errores disminuye, sin embargo, esto no indica que el abordaje o la solución dada en cada problema es la correcta. Para ello se requiere cuantificar la cantidad de ejercicios que fueron trabajados por los estudiantes y los que no, así como las soluciones correctas y erróneas.

Tabla 11:  
*Datos del pretest en pilotaje*

Problema	Trabajaron	No trabajaron	Bueno	Malo
#1 Porcentajes	40	2	9	31
#2 Función afín	35	7	1	34
#3 Mezclas	25	17	1	24
#4 Función	39	3	24	15

compuesta				
-----------	--	--	--	--

Fuente: Propia

Los datos de la tabla 11 manifiestan la poca cantidad de estudiantes que intentaron llegar a la solución del ejercicio 3, referente a un problema de mezclas, donde de acuerdo a la tabla 10 dicho ejercicio posee pocos errores esto debido a que una gran cantidad de estudiantes no abordaron el problema. Además solamente un estudiante pudo dar una solución correcta a lo que planteaba el enunciado de dicho ejercicio lo que evidencia que un 96% de estudiantes que intentaron resolver el problema se equivocaron.

Por otro lado, para el último ejercicio aproximadamente el 62% brindaron la solución correcta, donde de acuerdo a la tabla 10, este ejercicio fue el que presentó la cantidad más baja de errores, aspecto que podría deberse a la familiaridad que poseen los estudiantes en problemas de este tipo o una exigencia cognitiva baja.

### **Postest**

En el postest, de los 42 individuos, se observó lo siguiente

Tabla 12:  
*Errores en el postest en pilotaje*

Ejercicio	Error	Cantidad
#1 Porcentajes	Análisis	11
	Operaciones	9
#2 Función afín	Análisis	25
	Operaciones	2
#3	Análisis	13

Mezclas	Operaciones	3
#4	Análisis	21
Función compuesta	Operaciones	0

Fuente: Propia

De acuerdo a la tabla 12, la tendencia de los errores analíticos predomina siendo los que se presentan con mayor frecuencia. Se destaca además la poca cantidad de errores procedimentales, siendo el ejercicio 1 el que posee mayor cantidad de estos, producto de una deficiencia en operar porcentajes.

Tabla 13:

*Datos del postet en pilotaje*

Problema	Trabajaron	No trabajaron	Bueno	Malo
#1 Porcentajes	39	3	18	21
#2 Función afín	37	5	11	26
#3 Mezclas	20	22	2	18
#4 Función compuesta	35	7	11	24

Fuente: Propia

En cuanto a la cantidad de ejercicios que fueron abordados por los estudiantes se evidencia un porcentaje alto, arriba del 83%, para todos los ejercicios excepto el problema 3 de mezclas. Además cerca del 30% de estudiantes que trabajaron los ejercicios brindaban la solución correcta, con la misma excepción del ejercicio 3, donde solo el 10% lo tuvo bueno.

La comparación en cuanto a la cantidad de ejercicios trabajados en cada una de las pruebas y la cantidad de ejercicios cuyo resultado fue correcto se resume en los siguientes gráficos:

Gráfico 1: *Comparación de ejercicios trabajados*

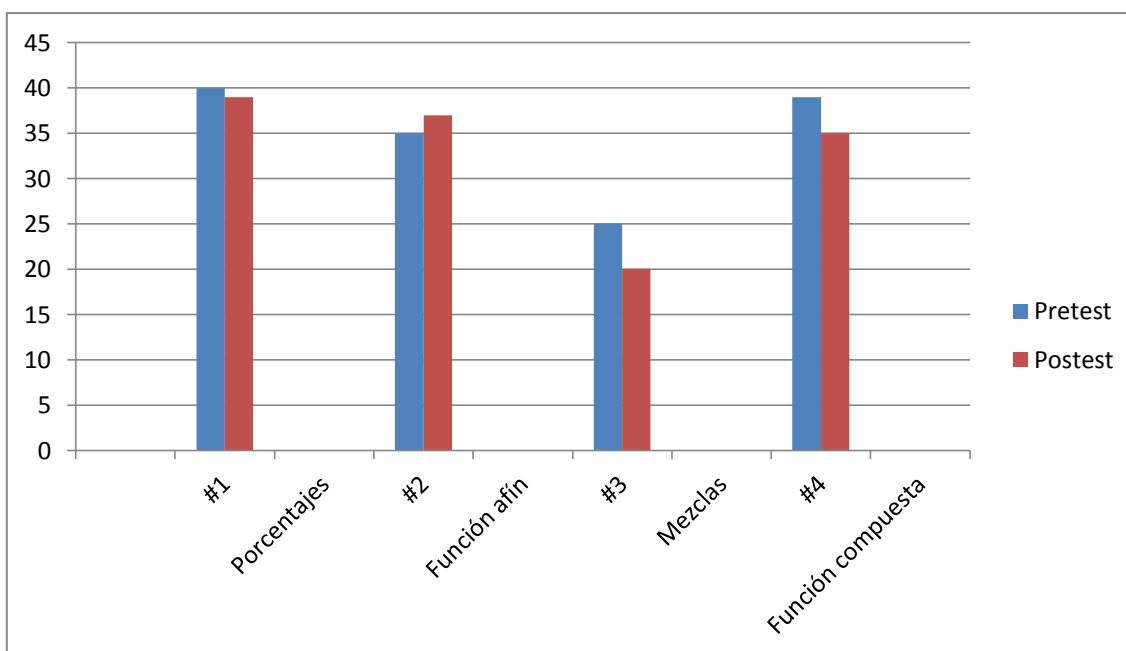


Gráfico 1: *Cantidad de ejercicios trabajados durante el pretest (azul) y postest (rojo) en la implementación piloto de la propuesta.*

El gráfico 1 permite visualizar que en el pretest la cantidad de estudiantes que trabajaron los ejercicios es mayor que en el postest, aspecto que podría ser un indicio de mayor confianza producto de una evaluación no sumativa y falta de formalidad para un proceso de resolución. Se destaca además, que en el problema 2 la cantidad de ejercicios trabajados es mayor en el postest pero la diferencia con el pretest es mínima.

Gráfico 2: Comparación de ejercicios correctos

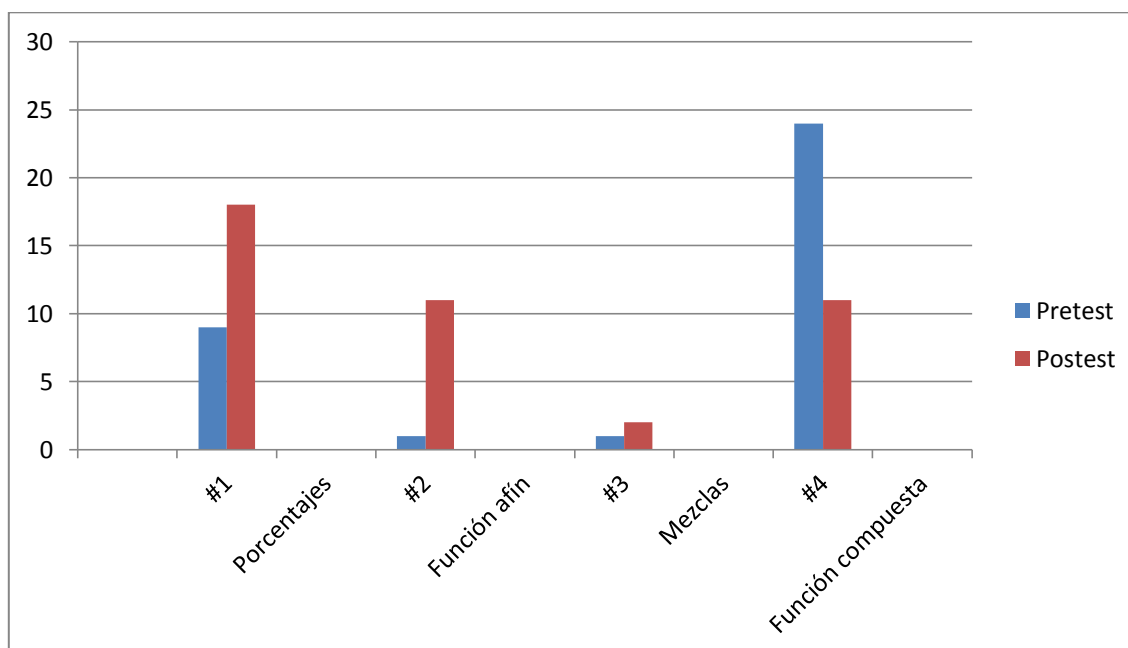


Gráfico 2: Cantidad de ejercicios correctos durante el pretest (azul) y posttest (rojo) en la implementación piloto de la propuesta.

Ahora, con respecto a la cantidad de ejercicios con soluciones correctas, expuesto en el gráfico 2, en el posttest se observa una mejora, donde la diferencia entre pretest y posttest en el ejercicio de mezclas es mínima, producto de un poco porcentaje de estudiantes que trabajaron dicho ejercicio. Mientras que para el problema 4 la diferencia entre ambas pruebas es casi el doble, siendo la mayor cantidad la que corresponde al pretest.

En resumen, se resalta que, en la prueba diagnóstica la mayor parte de estudiantes trabajaron los ejercicios, sin embargo algunos no terminaron, otros solo identificaron variables y la gran mayoría brindó resultados erróneos (ver Figura 4). Por otro lado en la comparación entre la cantidad de ejercicios correctos

en la prueba final hubo mejora, exceptuando el problema de la categoría de función compuesta. De acuerdo a los resultados esto se debe a que la dificultad cognitiva del problema en el pretest y postest es diferente. Por lo que una de las recomendaciones y correcciones que surgen, por medio de lo observado y obtenido en esta aplicación piloto, es revisar y equiparar la dificultad de los problemas.

Figura 4: Errores en primera aplicación de la metodología

$x = 1,050$   
 3)  $\frac{x}{74} = \frac{5}{90}$   
 $x = \frac{5(74)}{90}$  Se deben mezclar 4 litros.  
 $x = \frac{370}{90}$   
 $x = 4$

3) ? Litros = 74%  
 $9 = 5Lts = 90\%$

Ejercicio 3:  
 ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?  
 74% alcohol

Se destacan los errores cometidos por los estudiantes en el problema 3, donde, como se mencionó anteriormente, un análisis erróneo, y posiblemente escaso, evita encontrar la solución a la problemática expuesta en el enunciado. La figura 4, muestra un ejemplo de ello, ya que, el estudiante, no extrae toda la información que brinda el ejercicio, como ser la representación de la mezcla con su porcentaje de alcohol, ni muestra un proceso de análisis para comprender lo

que se plantea, lo que conlleva a plantear un modelo erróneo; debido a una extracción parcial de los datos y no establecer relaciones con los mismos la ecuación construida no es adecuada y en el peor de los casos no se logra construir. Además, en otros casos solamente trataban de extraer los datos pero no generan una estrategia para la solución del problema.

En cuanto a las sesiones que se abordaron para el desarrollo de la propuesta se analizó el trabajo de los grupos en cada ejercicio asignado, de lo cual se resume en lo siguiente:

Tabla 14:  
*Observaciones en pilotaje*

Sesión	Observación general
#2: Comprensión del problema	En el problema 2, se presentó una duda por cuestiones de redacción. Donde 41 min representaba el tiempo que duró el viaje de ida y vuelta, pero su interpretación pareciera ser ambigua, por lo que se sugiere una mejora en la redacción.
#3: Elaboración y ejecución de un plan	No se realizó la discusión el día de la sesión, se pospuso para el día siguiente. Hay que considerar reformular el tiempo asignado y los ejercicios abordados, mejorar la instrucción, cambiar la palabra variable por incógnita.  El ejercicio de edades solo tuvo un error por un grupo al abordarlo.

#4: Visión retrospectiva	No se discutió lo realizado en todo el grupo, se cambió y extendió el tiempo de la propuesta, dejando una sesión más para discutir y retroalimentar lo realizado. Además muestra una forma por parte del docente para abordar los problemas aplicados. Sistematizar el proceso de justificación en tres partes, comprobación de la solución de la ecuación, comprobación de las relaciones entre variables, argumentación de la construcción de la ecuación. La justificación debe responder la pregunta ¿Por qué? Se sugiere cambiar la reformulación del problema con explicación del problema
--------------------------	--

Fuente: Propia

A continuación se muestra el logro de los indicadores en cada una de las sesiones que realizaron los 10 grupos, los cuales fueron conformados por afinidad por los mismos estudiantes. Es así como se obtuvieron grupos de cuatro o cinco integrantes los cuales discutían y trabajaban en las sesiones presenciales.

#### Sesión #2: Comprensión del problema

La sesión de comprensión del problema se realizó buscando que los estudiantes pudieran plantear el enunciado de cada problema de manera pictográfica, además debían explicar la problemática con sus propias palabras, es

decir, reformular el enunciado sin perder el sentido e identificar los datos desconocidos.

Gráfico 3: Cumplimiento de indicadores (Etapa 1)

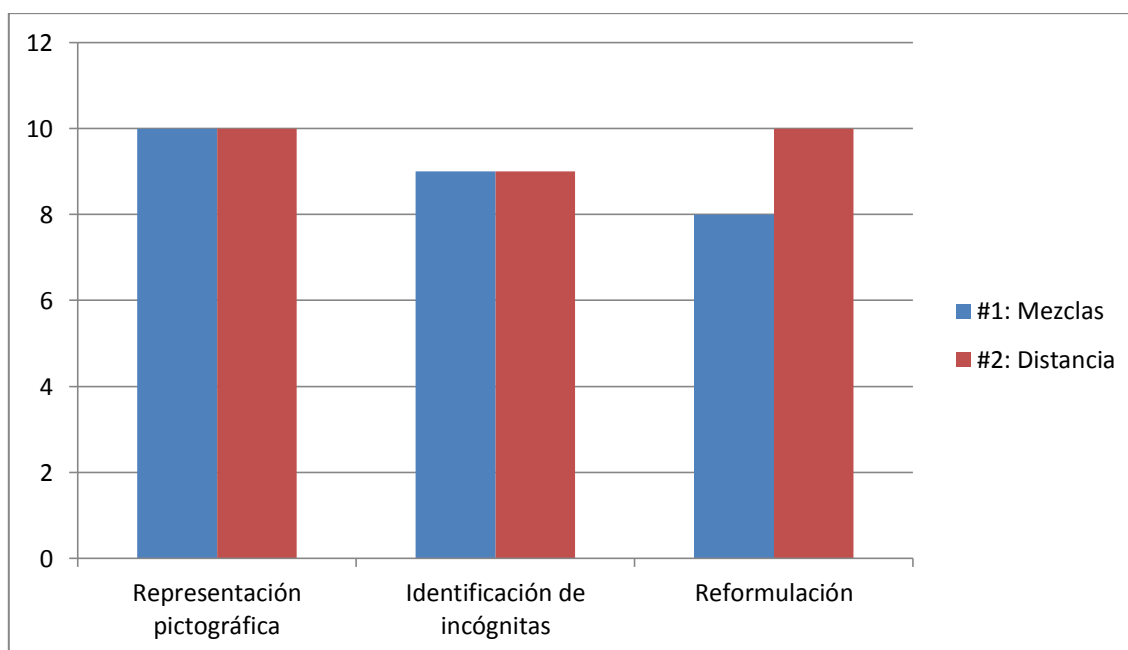


Gráfico 3: Cantidad de grupos que cumplieron con cada indicador de la etapa de comprensión del problema, durante la implementación piloto de la propuesta.

El gráfico 3 muestra un total cumplimiento de los grupos para el primer indicador de la etapa 1 del proceso. Para el segundo indicador solamente un grupo no lo realizó en ambos problemas, mientras que el cumplimiento del tercer indicador no fue total, ya que el primer ejercicio no fue reformulado por dos de los diez grupos que realizaron la sesión.

Sesión #3: Elaboración y ejecución de un plan

Durante la sesión #3 se abordan dos fases del método que se plantea, que corresponden a la fase 2 de elaboración de un plan y la fase 3 de ejecución del plan, donde los indicadores cumplidos por los grupos de trabajo son los siguientes:

Gráfico 4: Cumplimiento de indicadores (Etapa 2 y 3)

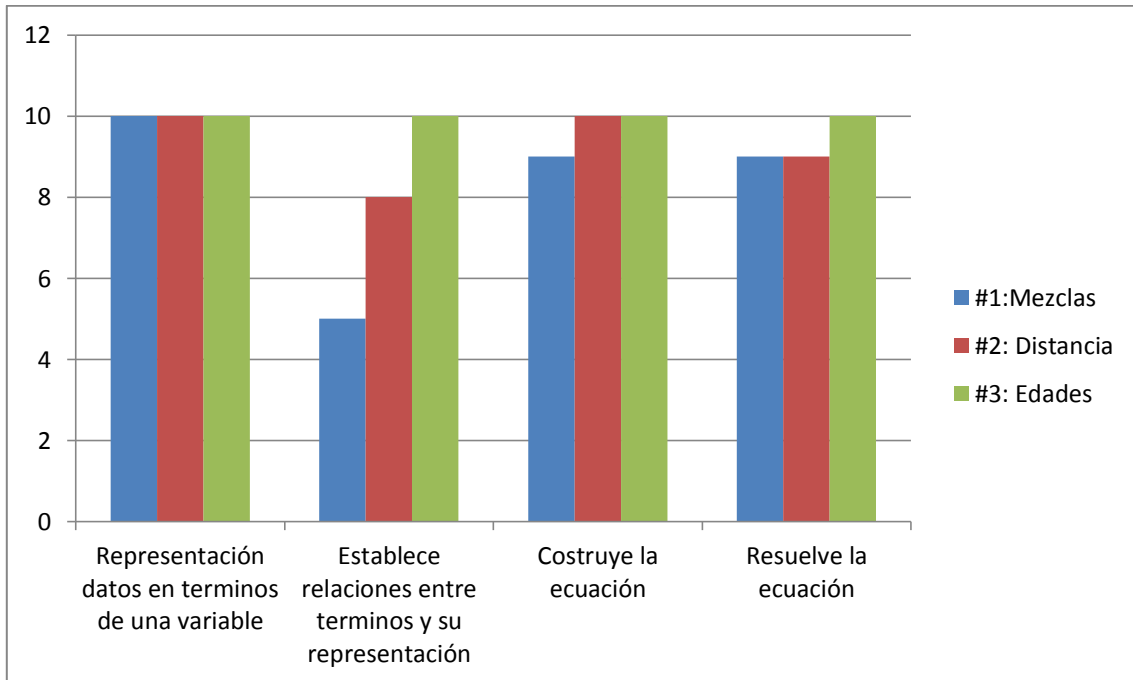


Gráfico 4: Cantidad de grupos que cumplieron con cada indicador de las etapas de formulación y ejecución de un plan, durante la implementación piloto de la propuesta.

Para las fases 2 y 3 del proceso para resolver problemas, de acuerdo al gráfico 4, el cumplimiento total de los indicadores solo se desarrolla en el tercer problema planteado, que consiste en determinar las edades de personas de acuerdo a algunos aspectos planteados. Además el indicador que presenta mayores discrepancias entre los tres ejercicios trabajados por los grupos es el de

establecer relaciones entre los datos, evidenciando a su vez una mayor dificultad de lograrlo en el problema de mezclas.

#### Sesión 4: Visión retrospectiva

El problema en esta sesión surgió por los indicadores usados para medir la dimensión de visión retrospectiva. Estos no fueron adecuados, pues a pesar de que ellos justificaran, los argumentos no tenían un sentido claro o solo se enfocaban en comprobar la solución en la ecuación y no en el problema en sí. Por tal razón la reestructuración de los indicadores para esta dimensión son necesarios.

De lo anterior los aspectos a reformular para mejorar la propuesta son los siguientes:

- 1) Revisar la redacción de los problemas pues en ciertos casos se puede mal interpretar debido a la falta de lectura y de aplicación de los signos de puntuación. Además frases como “tanto y medio” , que se presentaba en el enunciado del problema 2 del postest, que exponía lo siguiente: *El salario base de un trabajador es L. 100 por hora, pero recibe un tanto y medio de esta cuota por cada hora que rebase las 40 horas por semana. Si el cheque de su semana es de L. 5,950. ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?*, generó un error sustancial en él, por lo que hay que hacer énfasis en la traducción del enunciado a lenguaje algebraico (ver Anexo 4). En la palabra variable se sugiere hacer un cambio por incógnita, ya que es un dato desconocido el que se busca.

- 2) Con respecto al tiempo de la propuesta, resultó necesario extenderlo. Originalmente se había considerado realizar cuatro sesiones presenciales de una hora, pero en base a lo presentado en la implementación piloto, se añadió una sesión más para reducir factores que puedan sesgar los resultados.
- 3) En cuanto a los indicadores, se reformuló la redacción de algunos de ellos quedando de la siguiente manera

Tabla 15:  
*Modificación en la redacción de indicadores*

<b>Dimensión</b>	<b>Indicador</b>	<b>Corrección</b>
Comprensión del problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reformulación del problema</li> <li>• Identificación de la variable</li> <li>• Representación pictográfica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explicación del problema</li> <li>• Identificación de la incógnita</li> <li>• Representación pictográfica</li> </ul>
Elaboración de un plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer relaciones entre datos</li> <li>• Representar todos los términos en función de la variable</li> <li>• Reconocer estructuras de ecuaciones</li> <li>• Construcción de la ecuación que modela la situación planteada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer relaciones entre datos</li> <li>• Representar todos los términos en función de la incógnita.</li> <li>• Construcción de la ecuación que modela la situación planteada.</li> </ul>
Ejecución del plan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solución de la ecuación planteada</li> <li>• Propiedades operacionales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solución de la ecuación planteada</li> <li>• Propiedades operacionales</li> </ul>
Visión	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificación de la solución</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentación de la</li> </ul>

retrospectiva	encontrada	construcción de la ecuación. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprobación de la solución de la ecuación</li> <li>• Comprobación de las relaciones entre variables</li> </ul>
---------------	------------	--

Fuente: Propia

*Nota: La columna central muestra como estaba originalmente el indicador, mientras que la columna derecha, muestra la corrección de los indicadores. En la fase de ejecución del plan no se realizó ningún cambio.*

## 4.2 Aplicación de la propuesta mejorada

Luego de las observaciones y modificaciones realizadas a la propuesta se procede a la recopilación y análisis de resultados, los cuales se analizan desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa.

Con respecto al análisis, a continuación se detallan los resultados en base a tres etapas del proceso: la prueba diagnóstica (pretest), el desarrollo de la propuesta y la prueba final (postest), todo ello considerando ambos enfoques. Además se efectúa el análisis para la aceptación y percepción que se tiene de la propuesta, con base en los resultados obtenidos y las consideraciones de los docentes y discentes, actores principales durante la propuesta.

### 4.2.1 Discusión de los errores y observaciones del pretest

En términos generales, al resolver un problema se busca llegar a una solución adecuada en función de lo que plantea la problemática dada. Sin

embargo, el proceso para llegar a dicha solución, esté correcta o incorrecta, desvela los conocimientos y aprendizajes que los estudiantes han adquirido; lo cual es un aspecto fundamental para que el docente pueda orientar de mejor manera su cátedra, e identificar las competencias u objetivos que logran los estudiantes en las diferentes etapas del proceso educativo. Aspecto que, según Cárdenas (2014), permite evaluar elementos cognoscitivos en el estudiante, su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, analizar y resolver problemas (68).

En particular, referente a una etapa diagnóstica, los resultados más allá de datos cuantificables de ejercicios buenos, malos, trabajados o dejados en blanco, es necesario analizar la manera en que cada individuo buscó llegar a la solución. A continuación se detallan los datos generales y la discusión de cada proceso del desarrollo.

Tabla 16:  
*Datos del pretest*

	Problema 1: Porcentajes		Problema 2: Función afin		Problema 3: Mezclas		Problema 4: Función compuesta	
	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%
<b>Bueno</b>	5	10%	4	9%	2	7%	10	25%
<b>Malo</b>	47	90%	42	91%	27	93%	30	75%
<b>Trabajaron</b>	52	98%	46	87%	29	55%	40	75%
<b>No trabajaron</b>	1	2%	7	13%	24	45%	13	25%

*Nota: La columna con etiqueta fr de frecuencia indica la cantidad mientras que la columna con etiqueta % indica el porcentaje*

La tabla 16 muestra la cantidad y el porcentaje de ejercicios buenos y malos en base a la cantidad total de estudiantes que trabajaron cada ejercicio, además expone el porcentaje de estudiantes que no trabajaron los ejercicios propuestos, siendo porcentajes dispersos por cada ejercicio con diferencia no menos de 11 puntos porcentuales entre cada uno.

Además, se evidencia un problema en el ejercicio 3 referente a mezclas, cuyo enunciado establece lo siguiente:

*¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?*

Algunos errores, en dicho problema, son por causa de duplicidad de la variable, donde la variable representa dos cosas a la misma vez (ver Figura 5 y 6); otros por no trabajar correctamente los porcentajes (ver Figura 6, 7 y 8), desestiman que es una parte de un todo, donde algunos trabajan un porcentaje por sí solo, otros los operan entre sí de forma errónea. Todo ello imposibilita la construcción de una ecuación acorde al problema, destacando que en algunos casos basta con trabajar correctamente los porcentajes.

Dicho error coincide con lo que concluye Chavarría (2014) el cual expresa que en el proceso de resolución de problemas se evidencia la falta de conocimientos previos, los cuales debieron ser aprendidos en la educación secundaria. En ese sentido se requiere repasar contenidos previos antes de

empezar a resolver problemas, particularmente el concepto de porcentaje y su correcto uso e interpretación.

Figura 5: Error en el problema de mezclas 1

$x = \text{litros de liquido contiene alcohol. } \frac{74}{100} = 0.74$   
 $x(0.74) + 5(0.9) = x(0.84)$   
 $0.74x + 4.5 = 0.84x$   
 $4.5 = 0.84x - 0.74x$   
 $4.5 = 0.1x$   
 $\frac{4.5}{0.1} = x$   
 $45 = x$

La figura 5 muestra el error planteado anteriormente, donde  $x$  representa dos cosas al mismo en tiempo. Con base en cómo se plantea la ecuación la variable  $x$  representa la cantidad de litros de alcohol, que es lo que menciona el estudiante, pero además representa la cantidad de litros en la mezcla total.

Figura 6: Error en el problema de mezclas 2

$3.74x + 5 + 90x = 84x$   
 $164x^2 - 84x = -5$   
 $80x - 5 =$   
 $x = \frac{-5}{80}$   
 $x = -\frac{1}{16}$

En el ejemplo de la figura 6, al igual que en el anterior se evidencia la duplicidad de lo que representa la variable  $x$ , pero además se observa un resultado imposible para la solución del problema ya que el valor para  $x$  es un

número negativo. Aspecto que de haberse analizado podría permitir una corrección inmediata para el planteamiento de la ecuación.

Figura 7: Error en el problema de mezclas 3

3. Litros = ? 74%  
Litros = 5 90%  
Mezcla deseada 84%

$x = 0.74 - 0.90$   
 $x = 0.10 \div 5$   
 $x = 2 \text{ litros}$

Por otro lado, la figura 7 muestra el mal manejo de los estudiantes al momento de trabajar con porcentajes, donde de acuerdo a la extracción de datos, evidencia que necesita encontrar una cantidad de litros, relacionándolo con los porcentajes dados, pero la construcción de la ecuación o plan a seguir expone un error por falta de conocimientos previos, ya que, realiza una resta de porcentajes, seguido de una división de la resta por una cantidad. Aunado a esto la escasa comprensión y errores analíticos en el trabajo efectuado para resolver el problema, evita identificar el mal proceder por parte del alumno.

Figura 8: Error en el problema mezclas 4

Handwritten student work for a mixture problem. The work shows a diagram with three boxes representing mixtures: 74%, 90% (labeled "5 litros"), and 84%. Below the diagram are several equations:

$$x(74\%) + 5(90\%) = 84\%$$
$$x(74\%) + 4.5 = 84\%$$
$$x(74\%) = 84\% - 4.5$$
$$x(74\%) = 79.5$$
$$x = \frac{79.5}{74}$$

Además, el error común que se presentó, lo muestra claramente la figura 8, donde el estudiante trabajó el porcentaje como un número más en un lado de la ecuación. A pesar de ello la construcción de la ecuación muestra esbozos de un correcto proceso, salvo el detalle del porcentaje, ocasionado por falta de un proceso para relacionar los datos.

Se destaca además el bajo porcentaje de aciertos en los ejercicios, siendo 25% el porcentaje mayor de respuestas correctas, correspondiente al problema de función compuesta cuyo enunciado planteaba lo siguiente:

*Si la edad del padre es el triple de la de su hijo, la edad que tenía el padre hace cinco años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años ¿Cuál es la edad de ambos?*

En este caso necesitaban encontrar edades que cumplieran las condiciones dadas. Algunos aspectos a destacar en este problema son los errores cometidos por falta de análisis, ya que no siempre buscaban construir una ecuación cuya

solución permitiera dar respuesta a la interrogante planteada en el ejercicio (ver Figura 11), y cuando construían una ecuación la traducción al lenguaje algebraico, en varios casos, era incorrecta (ver Figura 9 y 10).

Figura 9: Error en problema de función compuesta 1

4. Edad Padre =  $3X$   
Edad hijo =  $X$

Edad Hijo.  
 $X = 15$

Edad Padre.  
 $3X = 3(15)$   
 $= 45$

$2X - 5 = X + 10$   
 $2X - X = 10 + 5$   
 $X = 15$

Res: La edad del padre es 45 y la del hijo es 15.

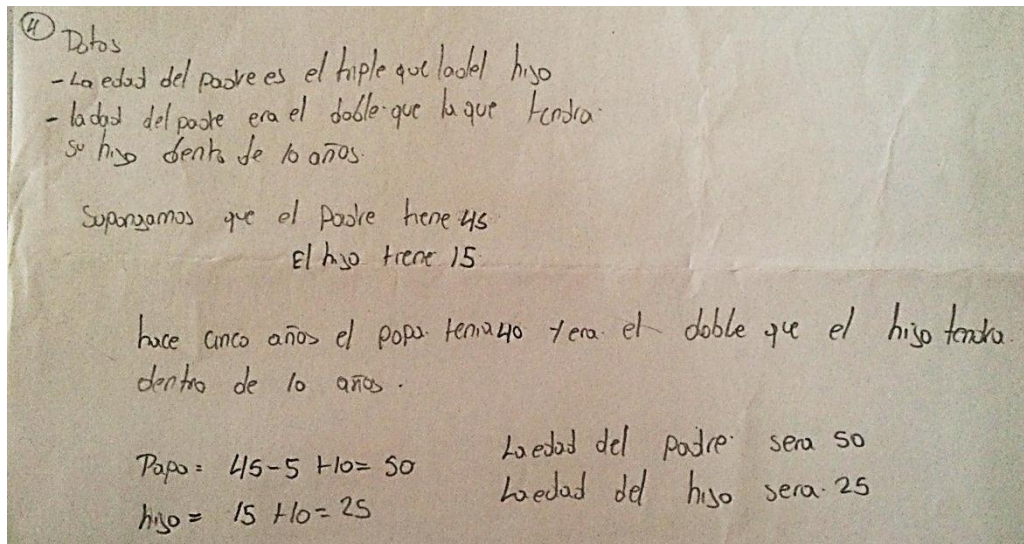
Para el caso de la figura 9 el estudiante plantea las incógnitas de acuerdo a la relación que menciona el ejercicio, donde establece que la edad del padre es el triple de la edad de su hijo. Sin embargo para la construcción de la ecuación, donde hace uso de la segunda relación que dice el enunciado del problema, surge un error en su traducción al lenguaje algebraico, pues según lo que plantea el estudiante se interpreta que cinco años menos que el doble de la edad del hijo es la edad que tendrá el hijo dentro de diez años. Y el ejercicio dice que la edad que tenía el padre hace cinco años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años.

Figura 10: Error en problema de función compuesta 2

4) Edad padre =  $3(x)$  6    Hace 5 años    Edad padre :  $2(y+10)$   
Edad hijo =  $x - 2$     Edad hijo :  $y+10 = 0$   
 $3(x) = x$   
 $3x = x$   
 $2x = 0$   
 $x = 2$   
 $2(y+10) = y+10$   
 $2y+20 = y+10$   
 $y = 10-20$   
 $y = 10$

De igual forma, otro estudiante interpreta bien la primera relación del enunciado del problema pero falla en la segunda. La figura 10 muestra que traduce bien el doble de la edad del hijo dentro de diez años, a pesar que hace uso de otra variable, pero para la construcción desestima que el doble de la edad del hijo dentro de diez años debe coincidir con la edad que tenía el padre hace cinco años. Además busco en base a las relaciones crear dos ecuaciones evidenciando un error operacional al momento de resolver la ecuación  $3x=x$  donde la solución dada, según el alumno, es  $x=2$ .

Figura 11: Error en problema de función compuesta 3



Además otros estudiantes, como en el ejemplo de la figura 11, no construían un modelo en base a lo que planteaba el enunciado, sino que trataban de analizarlo buscando que cumpliera las condiciones establecidas. En el caso del desarrollo de la figura 11 el estudiante supuso el primer dato en base a la relación del triple de la edad del padre con respecto a la de su hijo, pero no interpretó adecuadamente la segunda relación pues de acuerdo a lo expuesto la edad del padre de hace cinco años luego de diez años ( $45-5+10$ ) debe ser el doble de la edad del hijo dentro de diez años ( $15+10$ ) que es totalmente alejado a lo que planteaba el problema. Lo cual condujo a un error por una mala interpretación y escaso análisis.

Mientras que para los demás ejercicios el porcentaje de aciertos es menos del 10%. Donde los errores están estrechamente relacionados por los conocimientos previos, como ser operaciones con porcentajes y quizá el

conocimiento de la fórmula de utilidad, la cual mediante un análisis adecuado la pueden deducir.

Figura 12: Error en problema de proporcionalidad simple 1

① un reloj L. 2,300 con un descuento del 35%  
 $2,300 \times 35\% = 805 + 2,300 = 3,105$  Lps  
Error = 35%  
El precio normal del Reloj es de 3,105 Lps

Por ejemplo, la figura 12 evidencia un error de interpretación ya que el enunciado del ejercicio planteaba que Juan compró un reloj a L. 2,300 con un descuento del 35% y se debía determinar el precio original del reloj, el estudiante consideró el porcentaje de descuento de lo que pagó por el reloj y no del precio original del mismo.

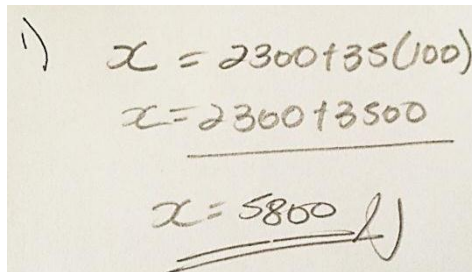
Figura 13: Error en problema de proporcionalidad simple 2

1. Precio del reloj = 2300 Lps  
Descuento = 35%  $\cdot$  0.35  
Precio Original = X  
 $X = 2300 \times \frac{35\%}{100}$   
 $X = 805$

Muy similar la figura 13, muestra el mismo error anterior donde el 35% de descuento el estudiante lo tomó de lo que pagó por el reloj, pero además considera que el precio original del reloj era ese 35% de lo pagado por él, solución que careció de un análisis para verificar la adecuación de esta con la situación

planteada, en el sentido que si hay un artículo con descuento el valor original del mismo no debe ser mayor que lo pagado por él.

Figura 14: Error en problema de proporcionalidad simple 3


$$\begin{aligned} 1) \quad x &= 2300 + 35(100) \\ x &= 2300 + 3500 \\ \hline x &= 5800 \end{aligned}$$

Otro de los errores frecuentes al trabajar con porcentajes es no saberlos operar. Para el caso de la figura 14, el estudiante no trabajó el porcentaje como la parte de un todo, sino que representó el 35% como 35(100). En este caso el planteamiento, en sentido general de la ecuación, es adecuada pues el estudiante manifiesta que el precio original del reloj es lo pagado por él (2,300 L) más el descuento.

Ahora, con respecto al problema que corresponde a la categoría de función afín y es el problema dos de la prueba diagnóstica, los errores también se muestran en relación a los conocimientos previos. El enunciado del problema planteaba lo siguiente: *Un comerciante ofrece 30% de descuento sobre el precio marcado de un artículo, y aún así obtiene una ganancia del 10%. Si al comerciante le cuesta L. 350 el artículo, ¿cuál debe ser el precio marcado?*

Figura 15: Error en problema de función afín 1

(2) 350 Lps.  
 $350 - 30\% = X$   
 $105 = X$

Los errores en el desarrollo del problema que expone la figura 15 son por no saber representar un porcentaje, ya que resta una cantidad con un porcentaje por sí solo, además no cumple con las condiciones que plantea el ejercicio pues, de acuerdo al alumno, el valor de  $x$  corresponde al 30% del costo del artículo (350 L). En ese sentido se observa un abordaje débil del problema con una falta de comprensión lo que evitó interpretar y lograr determinar la solución correcta.

Figura 16: Error en problema de función afín 2

2. Artículo = 350  
Descuento = 30% =  $0.30 = 105$   
Ganancia = 10% =  $0.10 = 45$   
Precio = ? 500

$X = 350 \times \frac{30}{100} = 105$   
 $X = 105 + 350 = 455$   
 $X = 455 \times \frac{10}{100} = 45.5$   
 $X = 45 + 455$   
 $X = 500$

Otro ejemplo de los errores para el problema de función afín lo muestra la figura 16, donde el error radica en considerar el descuento del costo del artículo al comerciante siendo un error de interpretación. Además la ecuación planteada presenta inconsistencia pues son diferentes relaciones manteniendo siempre la variable  $x$ , lo cual se interpreta como una duplicidad de lo que representa  $x$ .

Por otro lado, la cantidad de los errores cometidos en cada problema, en base a la clasificación de errores dada, se distribuyen de la siguiente manera.

Gráfico 5: Errores del pretest

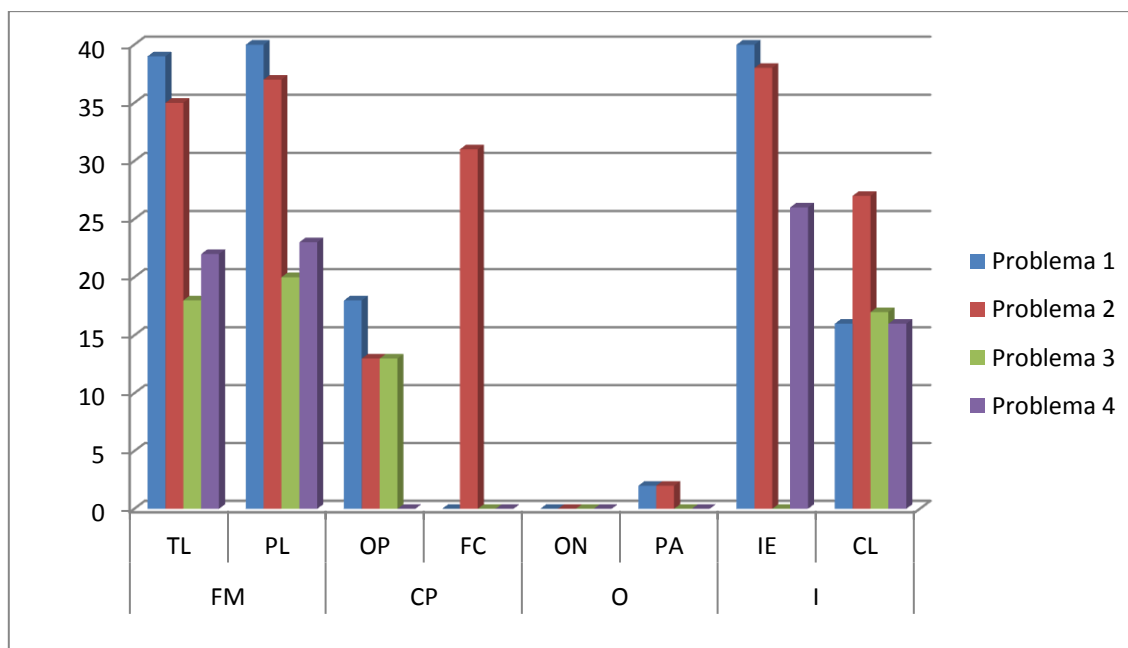


Gráfico 5: Cantidad de errores cometidos, de acuerdo a la categorización de errores establecida, en cada uno de los problemas del pretest.

De acuerdo al gráfico 5, se evidencia lo que manifiestan diversos autores (Cifuentes, et. al., 2013; Boscan & Klever, 2012; Sanjosé, 2007) donde establecen que la mayor dificultad radica en el planteamiento de la ecuación y comprensión de lo que se solicita. Pues los mayores porcentajes de errores cometidos en los cuatro problemas se encuentran en traducción al lenguaje algebraico (TL), planteamiento de la ecuación (PL), interpretación de datos (IE) y extracción de datos (CL). Por otro lado resulta curioso la cantidad de errores cometidos por los

conocimientos previos, en particular, operar porcentajes (OP) para los problemas donde se hace uso de ello y uso de fórmulas (FC) para el problema 2.

Finalmente, referente a las cuatro etapas que plantea Polya para resolver problemas se expone que etapas se cumplieron de acuerdo a los indicadores estipulados para el total de estudiantes que realizaron la prueba.

Gráfico 6: Cumplimiento de fases en el pretest

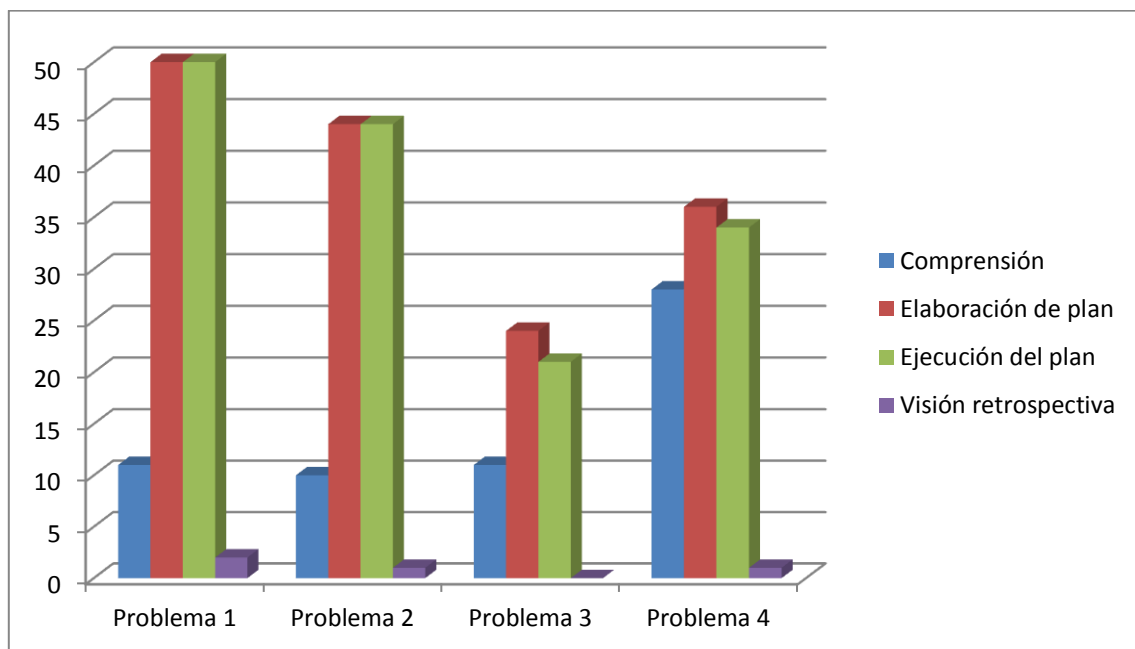


Gráfico 6: Cantidad estudiantes que cumplieron con cada etapa del proceso de resolver problemas en el pretest.

Una de las mayores deficiencias, que denotan los resultados, es en cuanto a la etapa de revisión de la solución. El justificar y analizar el proceso para verificar su validez en cuanto al ejercicio propuesto es un aspecto poco considerado por los estudiantes, a pesar que en algunos casos buscan verificar la solución encontrada en la ecuación, esto resulta insuficiente al considerar que si el planteamiento de la

ecuación es incorrecto, la solución obtenida será falsa a pesar de ser correcta en la ecuación. Esto imposibilita que el estudiante pueda visualizar y comprender su error para tratar de eliminarlo, aspecto que según Guerrero (2015) debe de ser fijado con mayor atención.

Por otro lado las fases de elaborar un plan y ejecutarlo tienen las mayores frecuencias, sin embargo no determinan un abordaje correcto al problema solamente reflejan las ideas que manifiestan los estudiantes para resolver cada ejercicio, el esfuerzo y estrategias utilizadas. Alejadas con el paso de visión retrospectiva, no brindan una confiabilidad a lo realizado.

Además, el hecho de que sin comprender el problema los estudiantes elaboren y ejecuten un plan es una muestra de un arraigo a un proceso metódico no analítico, pues no realizan un análisis profundo con base en aspectos puntuales para ello. Todo se evidencia en la gran cantidad de errores y soluciones incorrectas que se presentan. Con respecto a ello los docentes, a través de las entrevistas, manifiestan que las mayores dificultades de los estudiantes al resolver problemas es que no saben interpretar, ni traducir un enunciado verbal a uno algebraico.

#### **4.2.2 Discusión del desarrollo de la propuesta por etapas**

Para el desarrollo de la propuesta se consideró trabajos grupales, que se analizaron en clase y trabajos individuales, que se entregaban un día después de haber abordado cada fase del proceso. Esto con base en los aspectos que aborda el constructivismo social, cognoscitivismos y las nuevas tecnologías, vistas como

herramienta didáctica. Por lo que a continuación se expondrán los resultados en orden secuencial según lo establecido en la propuesta.

#### 4.2.2.1 Fase 1: Comprensión del problema

La primera etapa que plantea Polya en su método para resolver problemas es la comprensión. Para el desarrollo de los trabajos en grupo se propusieron dos problemas, uno de mezclas y otro de cinemática (ver Anexo 5, guía # 1), los cuales podían ser analizados un día antes de la sesión pues se compartieron por medio del aula virtual destinada para la asignatura. Así en clase el tiempo podría ser mejor empleado para analizar las ideas de cada integrante del grupo y llegar a un consenso. Los problemas planteaban lo siguiente:

**Problema 1:** *Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?*

**Problema 2:** *Bryan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo, de ida y vuelta, duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Bryan en su bicicleta?*

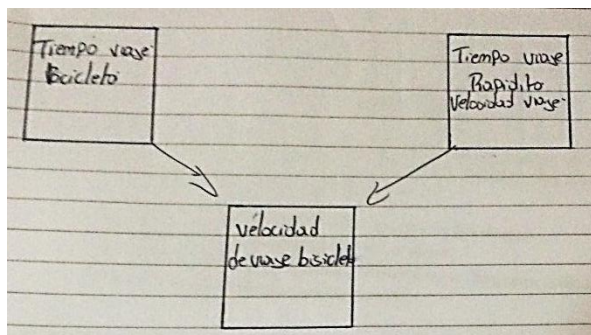
Tabla 17:  
Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 1)

Problema	Representación pictográfica	Identificación de incógnitas	Explica el problema
#1: Mezclas	10	10	8

#2: Distancia	9	9	9
---------------	---	---	---

A pesar de los datos obtenidos, en cada indicador de la etapa, se presentaron algunos errores relacionados con la coherencia o claridad de lo que se expone, por ejemplo, la representación pictográfica no es coherente con lo que establece el enunciado (ver Figura 17) o desde ya evidencia un error a cometer (ver Figura 18). A esto Chavarría (2013: 38) lo cataloga como la dificultad de “capturar los datos relevantes de un problema”, lo cual mediante una correcta verificación podría ser evitado o no afectar al proceso siguiente, en el caso de que

Figura 17: Error en el segundo problema grupal



solo sea la representación pictográfica lo incoherente. Sin embargo, podría servir para inferir en un error de transferencia.

El diagrama presentado en la figura 17, no representa nada propio del ejercicio pues lo único que realizaron fue mostrar algunos aspectos que deben considerar para resolver el ejercicio, como ser, la velocidad al viajar en bicicleta, el tiempo de viaje en bicicleta, el tiempo de viaje en rapido y la velocidad del viaje en rapido. Esto indica una dificultad en poder representar el enunciado mediante

un diagrama o dibujo, aspecto necesario para saber si el grupo comprende plenamente lo que plantea el enunciado del problema.

Figura 18: Error en el primer problema grupal

The diagram shows a sequence of three boxes representing variables. The first box contains '25%' with '(x)kg' written above it. An arrow points from this box to a second box containing '35%' with '(x)kg' written above it. A plus sign is between the first and second boxes. An arrow points from the second box to a third box containing '35%' with '(x)kg' written above it. Below the second box, an arrow points down to the text '-40kg. = [kg total]?', where the variable 'x' is written inside the box.

Otro ejemplo se muestra en la figura 18, donde el diagrama que presenta el grupo ayuda a la construcción de la ecuación, sin embargo en este se evidencia un error relacionado con la interpretación de la variable  $x$ , donde está representada como cantidad de cada bloque del diagrama.

Por otro lado, para la asignación individual se plantearon cuatro problemas uno de cada categoría (ver Anexo 6), según la clasificación establecida por Cifuentes et. al. (2013). En los cuales debían seguir las mismas instrucciones dadas en el trabajo grupal y entregarlos al día siguiente de la sesión.

Gráfico 7: Cumplimiento de indicadores de etapa 1 (Trabajo individual 1)

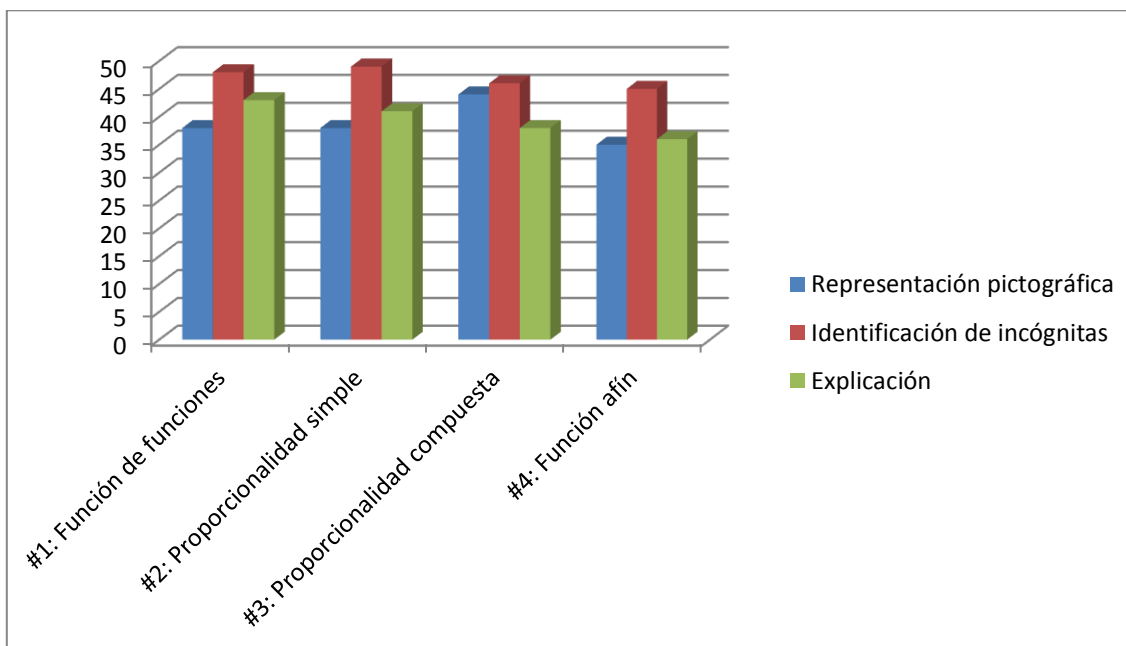


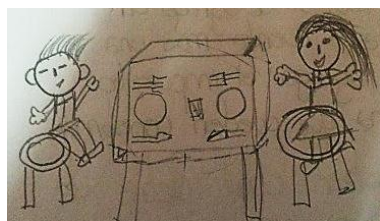
Gráfico 7: Cantidad de estudiantes que cumplieron con cada uno de los indicadores de la etapa 1, comprensión del problema, en los problemas de la asignación individual.

El gráfico 7 permite visualizar el cumplimiento de cada indicador de 50 estudiantes que entregaron la asignación individual, donde se observa que en su mayoría cumplen con los lineamientos establecidos para cada ejercicio, siendo la identificación de la variable el indicador con más cumplimiento. Sin embargo a pesar de ello se evidencian algunos errores.

Para el primer ejercicio, el cual planteaba que: *Una pareja desea cenar en un restaurante pero no quiere gastar más de L. 700. Si se agrega un impuesto de ventas de 12% a la cuenta más una propina de 10%, después de agregar el impuesto. ¿cuál es la cantidad máxima que pueden consumir?* El mayor error está en que desestiman parte de lo que plantea el enunciado, pues no consideran que

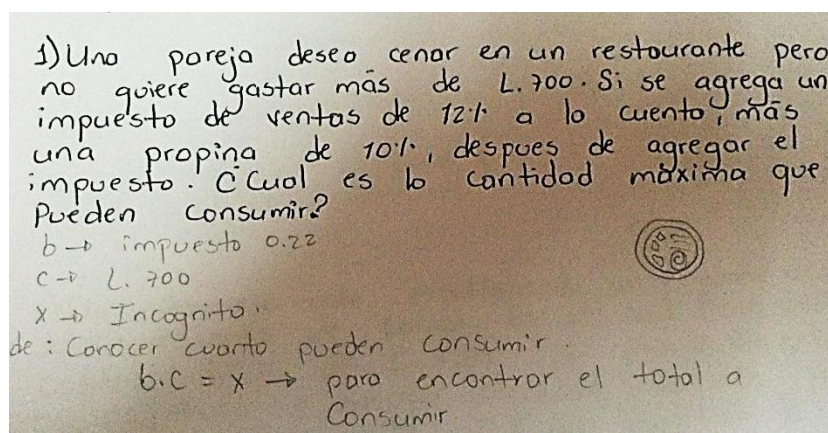
la propina es el 10% de lo consumido más el impuesto (ver Figura 20 y 21). También se evidencia que el diagrama o dibujo que se solicita está alejado de explicar la situación que manifiesta el enunciado (ver Figura 19 y 22). Se destaca que todos los estudiantes identifican adecuadamente la incógnita.

Figura 19: Error en el primer problema 1



La representación pictográfica de la figura 19, no expone la problemática que se plantea solamente el contexto de la situación. Por lo que dicho dibujo no brinda información o ayuda necesaria para el siguiente paso y a su vez no permite evaluar la comprensión que tuvo el estudiante del problema.

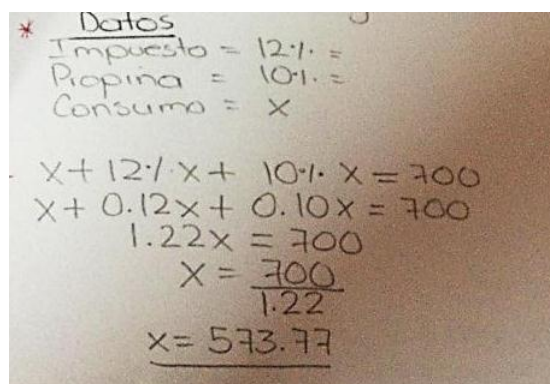
Figura 20: Error en el primer problema 2



Lo desarrollado por otro estudiante se muestra en la figura 20, donde la representación pictográfica no ayuda para la siguiente fase y no realiza la

explicación de lo que plantea el enunciado del problema. Además no indica lo que representa la incógnita aspecto que es relevante para poder construir posteriormente un modelo adecuado.

Figura 21: Error en el primer problema 3



\* Datos  
Impuesto = 12% =  
Propina = 10% =  
Consumo = x

$$x + 12\%x + 10\%x = 700$$
$$x + 0.12x + 0.10x = 700$$
$$1.22x = 700$$
$$x = \frac{700}{1.22}$$
$$x = 573.77$$

En otros casos, los estudiantes no siguieron instrucciones sino que buscaron resolver el problema, lo cual no garantiza que se realizó un análisis profundo de la situación planteada, razón que pudiera ocasionar el no cumplimiento de lo que establece el ejercicio. Por ejemplo, la figura 21, muestra el cumplimiento solo del segundo indicador de la etapa de comprensión del problema. Pero se observa que el estudiante realizó la construcción y solución de la ecuación, aspectos que corresponden a etapas posteriores, donde el estudiante considera los porcentajes de impuestos y propina del valor real consumido, pero el enunciado establece que la propina es el 10% de la cantidad después de agregar el impuesto.

Para los demás ejercicios, los errores expuestos anteriormente también suelen presentarse en ellos. El diagrama no siempre es coherente o representa lo que manifiesta el enunciado, en ocasiones en este se evidencia una mala

interpretación del problema. Además se observó que en su mayoría buscaban resolver los ejercicios, aspecto que no fue solicitado en la instrucción ni se hizo en el trabajo en clase.

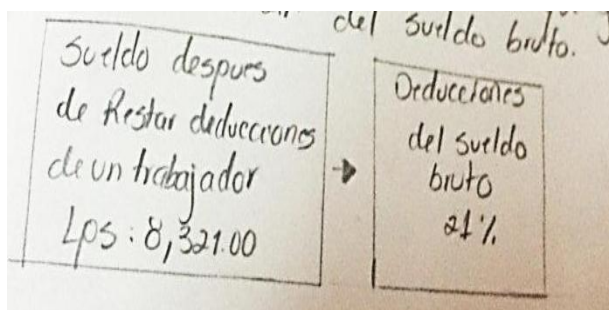
Figura 22: Error en el segundo problema 1



Para el problema 2, la figura 22, evidencia lo realizado por un estudiante como representación pictográfica, cuyo dibujo no explica por si solo lo que establece el enunciado del problema, solamente lo realiza en base al contexto.

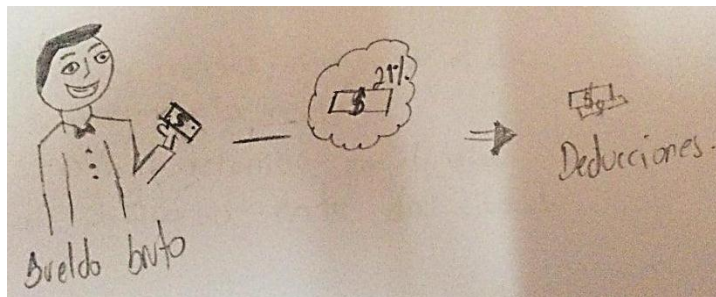
El problema expresa textualmente lo siguiente: Un trabajador percibe L. 8,321 de salario después de restar deducciones las cuales corresponden a 21% del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?

Figura 23: Error en el segundo problema 2



De forma similar, la figura 23, expone otro diagrama que no aporta nada para lograr con éxito las siguientes etapas. En este caso el estudiante solo extrae los datos del ejercicio y los ubica en cajas, tratando de indicar una relación entre ellos.

Figura 24: Error en el segundo problema 3



Otro caso particular se muestra en la figura 24, donde el diagrama representa aspectos torales del planteamiento del ejercicio, sin embargo el error radica en que considera que el sueldo bruto menos el 21% de deducciones brindan las deducciones. A pesar de ello el ejercicio puede ser bien abordado en etapas posteriores, ya que probablemente solo puede ser un error al expresar de manera pictográfica el total que percibe el trabajador luego de las deducciones, es decir, llama al sueldo con deducciones, deducciones.

El tercer problema de la asignación individual plantea que: A un motociclista le toma 1 hora y media más en el día que en la noche viajar entre dos ciudades. En el día recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en la noche recorre un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.

Figura 25: Error en el tercer problema 1



La figura 25, muestra un error en cuanto a la representación pictográfica que se presentó comúnmente, donde el dibujo no es una transformación del enunciado en algo diferente, sino que lo único que realiza es una idea vaga del contexto del ejercicio. Donde a través de él no se puede saber qué es lo que pide el enunciado del problema ni relacionar la información que brinda.

Figura 26: Error en el tercer problema 3

- Identifique el o los datos que se desean conocer.
  - ① Distancia entre las dos ciudades que recorre el motociclista (x)
  - ② Total de millas recorridas en el día 40 millas/hora + 1 hora y media
- De ser posible represente el problema mediante un diagrama o dibujo

Distancia total entre las dos ciudades (x)	=	Distancia recorrida en el día 40 mi/h + 1h 30h	+	Distancia recorrida en la noche 55 millas
--	---	---	---	--

↓

$$(x) = 480 + 60 = 540 \text{ millas} + 660 \text{ millas}$$

$$(x) = 1200 \text{ millas}$$

Otro error surge en la interpretación, la figura 26, muestra el proceso seguido por otro estudiante donde identifica la incógnita adecuadamente, pero considera que para lograr llegar de una ciudad a otra tuvo que viajar un lapso por el día y otro por la noche, estableciendo que esa distancia es el total de lo recorrido en el día más lo recorrido por la noche, situación totalmente diferente a lo que plantea el problema. En este caso el tercer indicador de la etapa de comprensión del problema, el cual es la explicación de lo que plantea el problema, no fue desarrollado, siendo éste el que puede evitar cometer errores como el anterior, ya que permite analizar con mayor detenimiento el enunciado.

Por último, para el cuarto problema de la asignación individual, el cual plantea que:

Un empresario está estableciendo un pequeño negocio de impresiones de carnet. En el cual tiene unos costos fijos de L. 7,105 mensuales por mantenimiento de equipo, tinta y energía eléctrica. Además por cada carnet gasta L. 9 en material de impresión. ¿Cuánto es la cantidad máxima de carnets a imprimir para que sus costos totales no sean más de L. 10,750?

Los errores son similares a los expuestos en los problemas anteriores, donde la representación pictográfica no aporta nada o carece de una explicación de lo que plantea la situación.

Figura 27: Error en el cuarto problema 1

$$\frac{10\,756 \text{ L. costo requerido}}{9 \text{ L. costo del carnet}} = \text{Cantidad de impresoras}$$

Para el caso, la figura 27, indica una mala comprensión del enunciado a través de lo que el estudiante plantea en el diagrama, pues considera que la cantidad total de impresiones es lo que se puede fabricar del costo máximo permitido sin tomar en cuenta los costos fijos. El diagrama expone claramente lo que comprende el alumno, y desde allí se puede saber si el abordaje es correcto o no.

Figura 28: Error en el cuarto problema 2

Cantidad maxima de Carnets a imprimir	=	Costo por impresion de carnet	+	Mensualidad del Local
(x)		9Lps * (x)		7,105
↓		↓		↓
(x)	=	9Lps * 405	+	7,105 Lps
↓		↓		↓
(x)	=	3,645 Lps	+	7,105 Lps
↓		↓		
(x)	=	10,750 Lps		

Otro ejemplo, se muestra en la figura 28, donde el estudiante plantea el diagrama estableciendo desde ya una posible construcción de la ecuación. Sin

embargo, según lo que se observa, el alumno considera que la cantidad de carnets es igual al costo de los carnets más el costo fijo, aspecto erróneo ya que de acuerdo a conceptos de cerradura, la suma de cantidad de dinero no puede dar como resultado cantidad de carnets.

En resumen, en la primera etapa el estudiante busca cumplir con representar mediante un dibujo o diagrama la situación que se expone en cada ejercicio, sin embargo dicha representación muchas veces es muy forzada, estando alejada de la información que plantea el problema. Además en muchos casos el no dedicar tiempo para explicar el enunciado impide que puedan identificar un potencial error en esta etapa.

#### **4.2.2.2 Fase 2 y 3: Formulación y ejecución de un plan**

La etapa 2 y 3 se refiere a la construcción de la ecuación que modela la situación que expone el enunciado y su solución. Para ello, algunos de los indicadores establecidos consideran la relación entre todos los datos y la representación de estos en términos de una incógnita, todo ello depende en gran medida de conocimientos previos y de la etapa de comprensión.

En el desarrollo de la propuesta, los resultados de la asignación grupal se muestran en la tabla 18, donde los primeros dos problemas se habían trabajado previamente, según la fase 1, mientras que para el tercero se debía trabajar la primera etapa y las correspondientes a la sesión de trabajo.

Tabla 18:

Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 2 y 3)

	Representación pictográfica	Identificación de incógnitas	Explica el problema	Representa datos en términos de la incógnita	Establece relaciones	Construye la ecuación	Resuelve la ecuación
Problema 1				8	9	9	9
Problema 2				7	8	9	9
Problema 3	7	9	5	10	10	10	10

Nota: Para el problema 1 y 2 el cumplimiento de los indicadores de la etapa 1 se cuantifica en la sesión anterior (Tabla 17).

Los resultados, de la tabla 18, muestran un abordaje de las etapas 2 y 3 casi completo, en el sentido que en su mayoría construyeron la ecuación y la resolvieron. Sin embargo no siempre cumplían con los lineamientos establecidos. Para el caso del primer problema, algunos grupos trabajaron con dos variables (ver Figura 32), donde llegaron a la solución correcta pero no consideraron la instrucción que establecía representar los datos en términos de una incógnita. Además se evidenciaron algunos errores al operar porcentajes (ver Figura 29 y 31) y otros al momento de brindar la respuesta, la cual no concordaba con lo que pedía (ver Figura 30).

Figura 29: Error en el primer problema 1 (grupal)

$$\begin{aligned}
 0.35K + 0.55K - 40 &= 0.35 \cdot 2K - 40 \\
 0.9K - 40 &= 0.35 \cdot 2K - 40 \\
 0.9K - 2K &= 40 + 0.35 \cdot 40 \\
 -1.2K &= 0.35 \\
 K &= \frac{0.35}{1.2}
 \end{aligned}$$

Para el caso de la figura 29, el planteamiento de la ecuación no considera las signos de agrupación en los términos  $0.55k-40$  y  $0.35 2k-40$ , donde debían ser expresados  $0.55(k-40)$  y  $0.35(2k-40)$  respectivamente, ocasionando un error al momento de encontrar la solución el cual es correspondiente a errores de conocimientos previos.

Figura 30: Error en el primer problema 2 (grupal)

$0.25x + 0.55(x-40) = (x+x-40)(0.35)$   
 $0.25x + 0.55(x-40) = (2x-40)(0.35)$   
 $0.25x + 0.55x - 22 = 0.7x - 14$   
 $0.8x - 0.7x = -14 + 22$   
 $0.1x = 8$   
 $x = \frac{8}{0.1}$   
 $x = 80 \text{ Kg}$

$0.35(x+x-40) = \text{Cantidad total de N. de la mezcla}$

R1= La cantidad de mezcla total es de 80 Kg.

Otro grupo, como lo plantea la figura 30, realizó correctamente todo el abordaje del problema, sin embargo la solución brindada no corresponde a lo que pide el ejercicio, ya que ellos consideraron que el valor de  $x$  era la respuesta a la interrogante planteada, sin embargo lo que se les pedía era la cantidad de mezcla total y la incógnita  $x$  representa la cantidad de uno de los fertilizantes.

Figura 31: Error en el primer problema 4 (grupal)

datos  
 Cantidad de kg del fertilizante de 25% de N = x  
 Cantidad de kg del fertilizante de 55% de N = y

35% de (x+y) = Cantidad de N en la Mezcla

$$x(0.25) = \text{Cantidad de N 1º fertilizante}$$

$$y(0.55) = \text{Cantidad de N 2º fertilizante}$$

$$0.25x + 0.55y = 0.35x + 0.35y$$

$$0.35x - 0.25x = 0.55y - 0.35y$$

$$0.10x = 0.20y$$

$$x = \frac{0.20y}{0.10}$$

$$x = 2y$$

$$x = 2(40)$$

$$x = 80$$

$$y = x - 40$$

$$y = 24 - 40$$

$$94 - y = 40$$

$$y = 40$$

mezcla total =  $y + x = 40 + 80 = 120 \text{ kg}$

La figura 31, muestra un error en base a instrucciones ya que la solución encontrada es correcta. En este caso el error radica en no considerar la ecuación en términos de una sola variable, si bien es cierto establecieron relaciones, construyeron adecuadamente la ecuación y la resolvieron sin error, lo que conlleva a concluir que es acertado el resultado. Es de hacer notar que la propuesta busca que los estudiantes puedan establecer, mediante relaciones adecuadas, solamente una ecuación con una incógnita.

Figura 32: Error en el primer problema 3 (grupal)

- $x + (x - 40) = x + (x - 40)$
- $0.25x + (x - 40)(0.55) = 0.35(x + x - 40)$
- $0.25x + 0.55x - 22 = 0.35(2x - 40)$
- $0.25x + 0.55x - 22 = 0.7x - 14$
- $0.25 + 0.55x - 0.7x = -14 + 22$
- $0.1x = 8.1$
- $x = \frac{8.1}{0.1}$
- $x = 81 \text{ parte fertilizante}$

$(81) + (81 - 40) (0.35)$   
 $94.35 = \text{Mezcla total}$

Por último, conviene destacar que al momento de resolver la ecuación pueden ocurrir errores procedimentales. Tal es el caso que plantea la figura 32, donde un pequeño error en la suma de  $-14+22$ , ocasiona dar una solución incorrecta. Además para encontrar la mezcla total consideran el dato encontrado más el 35% del total de un fertilizante ( $81+ (81-40)0.35$ ), lo que permite inferir un error analítico en el proceso final.

El segundo problema del trabajo grupal, es donde mayores dificultades se suscitaron, pero al final en el proceso de discusión y mediante preguntas orientadoras los grupos, en su mayoría, lograron cumplir con lo establecido. Para dicho problema, no siempre construyeron una sola ecuación, sino que, mediante las relaciones que establecían iban encontrando la solución. Este aspecto denota un punto muy importante en la modelización, ya que determinar lo que representa cada término permitiría que con una sola ecuación encuentren lo que se les pide.

Algunos errores cometidos se muestran a continuación, donde son en parte, por el mal uso de fórmulas de cinemática o despejes de las mismas (ver Figura 34), otros por no interpretar lo que representa cada término de la ecuación (ver Figura 33) y algunos relacionados a la construcción de varias ecuaciones (ver Figura 35), lo que se considera como error por no seguir la instrucción.

El enunciado del problema era el siguiente: Bryan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje, de ida y vuelta, duró 41 min. en total. ¿a qué velocidad viajó Bryan en su bicicleta?

Figura 33: Error en el segundo problema 1 (grupal)

$$\frac{V_{rap}}{3} = \frac{D}{t_{bic}} = \frac{3 \times D}{V_{rap}} = \frac{3(7.4 \text{ Km})}{\left(\frac{7.4 \text{ Km}}{41 \text{ min}}\right)} = \frac{22.2}{0.180487}$$

$$t_{bic} = 123 \text{ min} //$$

$$V_{bic} = \frac{D}{t_{bic}} = \frac{7.4 \text{ Km}}{123 \text{ min}} = 0.06 \text{ Km/min} //$$

En la figura 33, se muestra el desarrollo que un grupo realizó para resolver el problema, en el cual se observa la relación entre la información dada, donde establecen que la velocidad de la bicicleta  $\left(\frac{D}{t_{bic}}\right)$  es un tercio de la velocidad del rapidito  $\left(\frac{V_{rap}}{3}\right)$ , sin embargo para encontrar la velocidad del rapidito toman en cuenta el tiempo del viaje total (41 min) lo que ocasiona el error en el análisis.

Figura 34: Error en el segundo problema 2 (grupal)

$$\begin{aligned} X &= \text{minutos del bus} \\ 3X &= \text{minutos de la bicicleta} \\ X + 3X &= 41 \\ 4X &= 41 \\ X &= \frac{41}{4} \\ X &= 10.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \text{velocidad de la bus} \\ h &= \text{velocidad de la b} \\ V &= 7.4X \\ &= 7.4(10.25) \\ &= 75.85 // \\ h &= \frac{75.85}{3} \\ &= 25.28 \end{aligned}$$

Otro caso lo expone la figura 34, donde consideran que con base en las relaciones el tiempo que tarda en hacer el recorrido en bicicleta es tres veces el

tiempo que tarda en hacerlo en rapidito, aspecto correcto en el análisis. Pero al momento de encontrar la velocidad emplean de forma equivocada la fórmula tomando la velocidad como el producto de la distancia con el tiempo ( $V = 7.4x$ ). Se destaca además lo mencionado arriba, donde en su mayoría los estudiantes plantean dos ecuaciones para encontrar la solución.

Finalmente con respecto al problema tres de la actividad grupal, no se evidenciaron dificultades para establecer relaciones, interpretar lo que representa cada término, construir y resolver la ecuación. Sin embargo solamente la mitad de los grupos cumplieron con todas las indicaciones, las cuales incluían las instrucciones de la sesión grupal anterior, es decir, solo el 50% de los grupos desarrollaron el proceso completo, que en este caso, correspondían a las etapas 1, 2 y 3, del método de Polya (1945).

El enunciado del tercer problema era el siguiente:

**Problema 3:** *Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?*

Ahora, para la asignación individual se muestra la tabla 19 que contiene la frecuencia de cada indicador desarrollado en los problemas propuestos. Los datos corresponden a la cantidad de estudiantes que presentaron la asignación que suman un total de 49, y en base a estos se consideran los porcentajes.

Tabla 19:  
*Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Etapa 2 y 3)*

Problema	Representa datos en términos de la incógnita	Establece relaciones	Construye la ecuación	Resuelve la ecuación
#1: Función de funciones	34 (69%)	33 (67%)	46 (94%)	46 (94%)
#2: Proporcionalidad simple	39 (80%)	34 (69%)	49 (100%)	49 (100%)
#3: Proporcionalidad compuesta	36 (73%)	31 (63%)	45 (92%)	45 (92%)
#4: Función afín	41 (84%)	30 (61%)	48 (98%)	48 (98%)

De acuerdo a los datos se observa que para cada problema lo menos realizado, según lo solicitado, es el establecer relaciones, seguido de la representación de cada término de la ecuación en función de la incógnita. Estos aspectos resultan fundamentales para lograr una construcción adecuada de la ecuación. Según las evidencias la ecuación que es construida es resuelta, lo que establece que las mayores dificultades están relacionadas con la interpretación y traducción al lenguaje algebraico.

En ese sentido para el problema 1, el mayor error tiene que ver con interpretación y comprensión lectora, ya que no consideran que la propina es el 10% de la suma de la cantidad consumida con su impuesto. Para el segundo problema la mayor dificultad es la misma, sumada a algunos errores al trabajar con porcentajes.

Por otro lado en el problema 3, aparte de errores de interpretación, el planteamiento de la ecuación y el uso de la fórmula de cinemática son otros errores frecuentes. Mientras que para el último problema las relaciones, que no son planteadas, generan una solución errónea.

Figura 35: Error en el problema 1 (asignación individual)

$\rightarrow 0.12 = 12\%$  de impuesto  
 $0.10 = 10\%$  de impuesto  
 $c =$  cantidad máxima de consumo  
 $700 =$  límite de presupuesto

$\rightarrow 0.12(c) =$  representa el 12% que es el impuesto  
 $0.10(c) =$  representa el 10% que es la propina.

$\rightarrow 0.12(c) + 0.10(c) + c = 700$  de gastos

$\rightarrow 0.12(c) + 0.10(c) + c = 700$   
 $1.22c = 700$   
 $\frac{700}{1.22} = c$   
 $573.77 = c$

Por ejemplo, para el problema 1, la figura 35 muestra el error de interpretación que, en algunos casos, se podría visualizar desde el trabajo con la etapa de comprensión del problema. En este caso se materializa el error en la construcción de la ecuación, donde el estudiante considera la propina del consumo real, en contrariedad con lo que expone el ejercicio manifestando que la propina es un porcentaje del consumo real más el impuesto. El alumno establece que el consumo real es  $C$ , el impuesto es  $0.12C$  y la propina es  $0.10C$ , donde de acuerdo al enunciado debería ser  $0.10(C+0.12C)$ .

Figura 36: Error en el problema 2 (asignación individual)

$x = \text{Trabajador}$   
 $SB = 8,321 = \text{Salario despues de las deducciones}$   
 $D = 21\% = \text{deducciones} = 17.47$

$SD - D = 0$   
 $(8,321)(21\%) = D$   
 $1,747.41 = D$   
↳ Total de las deducciones que le hicieron = 50

$SB - D = SD$   
 $SB - 1,747.41 = 8,321$   
 $SB = 8,321 + 1,747.41$   
 $SB = 10,068.41$

Para el problema 2, la figura 36 expone el trabajo realizado por otro estudiante, donde se muestra el error al comprender lo que le indica el enunciado del problema. En este caso el error radica en considerar las deducciones como porcentaje de lo que recibe, estableciendo que el 21% de deducciones (D) es porcentaje del sueldo con deducciones (SD) dando así que  $(8,321)(21\%)=1747.41$  son las deducciones hechas. Además el estudiante planteó dos ecuaciones para lograr determinar la posible solución y no identifica una variable como tal, sino que codifica cada dato, dejando la codificación para aquellos datos que desconoce. Este abordaje muestra un punto favorable relacionado a la interpretación de la(s) variable(s), ya que en ningún momento hay duplicidad de las mismas.

Figura 37: Error en el problema 3 (asignación individual)

Distancia = ?  
recorrido en el día = 40 mph  
recorrido en la noche = 55 mph  
Tiempo = 1h : 30 min

$D = 40$   
 $D = 55$

$55D + 40D = 1.5(55)(40)$   
 $95D = 3,300$   
 $D = \frac{3,300}{95}$   
 $D = 34.73$

La distancia entre las dos ciudades es en 34.73

Por otro lado, para el problema 3, los errores manifestados en la etapa de comprensión del problema no pueden ser visualizados por los estudiantes, previo a la construcción de la ecuación. La figura 37, muestra la parte de elaboración y ejecución del plan desarrollada por un estudiante, donde la ecuación planteada es incorrecta, pues a pesar de no mostrar todo el proceso se observa que considera que el tiempo del viaje total es 1.5 horas, interpretando incorrectamente lo que establece el enunciado donde menciona que: a un motociclista le toma 1 hora y media más en el día que en la noche viajar entre dos ciudades.

Figura 38: Error en el problema 4 (asignación individual)

•  $7,105 \text{ lps}$  = costos fijos

$9 \text{ lps}$  cada carnet.  $\times$   $X$  cantidad de carnet. =  $10,750 \text{ lps}$  costos totales.

•  $7,105 =$  costos fijos  
 $9 \text{ lps} =$  cada carnet.  
 $X =$  cantidad máxima de carnet  
 $10,750 =$  costos totales.

$$9 * X = 10,750$$
$$X = \frac{10,750}{9}$$
$$X = 1.194.4$$

Mientras que para el problema 4, la figura 38, evidencia otro error que se observaba a partir de la etapa 1 del proceso planteado para resolver problemas. En este ejercicio el estudiante desestimó por completo el dato de costos fijos para la construcción de la ecuación a pesar de identificarlo como dato que brindaba el enunciado. Es aquí donde la falta de cumplir algún indicador, como ser la explicación del problema, ocasiona que un error siga manifestándose en etapas posteriores.

En resumen, para la etapa de planeación y ejecución de un plan, la estructuración de las relaciones en base a lo que expone el enunciado del problema, junto con representar los datos en términos de una misma incógnita permiten que la construcción de la ecuación lleve un proceso organizado y bien

desarrollado, lo cual de acuerdo a Bosch et. al. (2006), en la modelización, las etapas del proceso poseen una dinámica interna para lograr un correcto desarrollo. Sin embargo, dentro de los indicadores de la etapa de planeación, estos dos son los que menos se cumplen ocasionando así una ruptura que genera un vacío en el proceso donde se construye la ecuación o modelo, que como menciona (Barroso & Rodriguez Ortiz, 2007) se desarrolla como un proceso impulsivo, aspecto que está ligado con la etapa previa de comprensión del problema.

Además, los errores de conocimientos previos se evidencian en estas etapas, los cuales con un proceso de verificación en cada fase podrían ser identificados para su posterior corrección. Dificultades que de acuerdo a Chavarría (2014) pueden ser tratadas mediante retroalimentación del contenido haciendo uso de preguntas orientadoras.

#### **4.2.2.3 Fase 4: Visión retrospectiva**

Para la última etapa, llamada visión retrospectiva, se analiza el proceso para determinar si la solución encontrada es correcta. A esta etapa la suelen llamar comprobación de la solución, que en este caso, es más cercana a una justificación del proceso. Para determinar el cumplimiento de la misma son tres indicadores que se deben cumplir, los cuales se enfocan a argumentar el por qué la ecuación construida es correcta, comprobar la solución de la ecuación y verificar que se cumplan todas las relaciones con dicha solución.

Para la primera parte de la etapa, que corresponde a un trabajo grupal, el cumplimiento de estos indicadores se muestra en la tabla 20. Destacando que para los primeros tres problemas, en las sesiones anteriores se había resuelto cada problema, por lo que en la tabla se deja en blanco los primeros indicadores, mientras que para el cuarto problema se debía aplicar lo desarrollado en clases anteriores con el fin de cumplir con el proceso planteado en la metodología.

Tabla 20:

*Cumplimiento de indicadores trabajo grupal (Etapa 4)*

Problema	RP	II	E	RD	ER	CE	RE	JE	CS	CR
<b>#1: Mezclas</b>								5	8	8
<b>#2: Distancia</b>								5	6	4
<b>#3: Edades</b>								6	9	8
<b>#4: Economía</b>	8	10	9	9	8	9	8	4	8	5

*Nota: Significado de las etiquetas RP: Representación pictográfica, II: Identificación de incógnitas, E: Explica el problema, RD: Representa datos en términos de la incógnita, ER: Establece relaciones, CE: Construye la ecuación, RE: Resuelve la ecuación, JE: Justifica la construcción de la ecuación, CS: Comprueba la ecuación, CR: Cumple las relaciones.*

Con respecto al proceso de visión retrospectiva se observa que, los estudiantes en su mayoría, solo buscan comprobar la ecuación, donde en promedio de los diez grupos 8 cumplieron este indicador para los cuatro problemas, sin analizar si esta concuerda con lo que establece el enunciado del problema. Además solo el 40% de los grupos cumplieron a cabalidad lo que establecían las instrucciones, donde desestiman el justificar la construcción y verificar el cumplimiento de las relaciones establecidas.

Es a través de esta etapa donde se podrían determinar algunos errores y así reestructurar lo realizado para llegar a la solución correcta. En ese sentido algunos grupos lograron ver el error cometido y corregirlo (ver Figura 39), mientras que otros solo afirmaron su proceso. Sin embargo, en algunos casos, consideran que con cumplir la ecuación la respuesta es correcta (ver Figura 40), lo que evita ver y corregir los errores en el planteamiento de la ecuación.

Se destaca además que en el último problema planteado, en el cual debían aplicar todo el proceso visto desde el inicio de la propuesta, los grupos lo hicieron satisfactoriamente, quedando incompleto solamente los aspectos de la última etapa. El problema planteaba lo siguiente:

**Problema 4:** *Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por \$2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de \$185 en la transacción completa. Encuentre el costo de cada automóvil.*

Los errores que se evidenciaron se relacionan con el planteamiento de la ecuación, debido a un escaso análisis y revisión de este según lo establecido en el problema y algunos conceptuales, o bien a un mal abordaje de la revisión de lo elaborado (ver Figura 42).

Figura 39: Identificación de error (etapa 4)

Handwritten mathematical work showing the identification and correction of an error in solving a system of equations. The work is divided into two main sections: 'Error' and 'corrección'.

**Error section:**

- Initial values:  $y = 0.180$  (marked as 'error'),  $a = 0.44$ ,  $b = 41.1$ .
- Equation 1:  $\frac{7.4 \text{ km}}{3y} + \frac{7.4 \text{ km}}{y} = 41$
- Equation 2:  $\frac{7.4 \text{ km}}{3(0.180)} + \frac{7.4}{0.180} = 41$
- Result:  $51.81 = 41$  (circled in red, indicating an error).

**corrección section:**

- Equation 1:  $\frac{7.4 \text{ km}}{3y} + \frac{7.4 \text{ km}}{y} = 41$  (labeled 'sustituyendo').
- Equation 2:  $\frac{7.4 \text{ km}}{3(0.24)} + \frac{7.4 \text{ km}}{0.24} = 41$
- Result:  $41.1 = 41$
- Final result:  $0.24 = y$  (underlined).

Ejemplificando un poco lo mencionado anteriormente, la figura 39, muestra la identificación de error que observó un grupo en su planteamiento previo, el cual pudo ser identificado por la comprobación de la solución. De esto el grupo pudo realizar la corrección mostrando un correcto proceso para plantear u resolver la ecuación.

Figura 40: Error trabajo grupal 1 (etapa 4)

Handwritten mathematical work showing a verification step in a linear regression model. The work is titled 'Verificación'.

Equation 1:  $185 = 0.10(2200) + (-0.05(2900 - 2200))$

Equation 2:  $185 = 220 - 35$

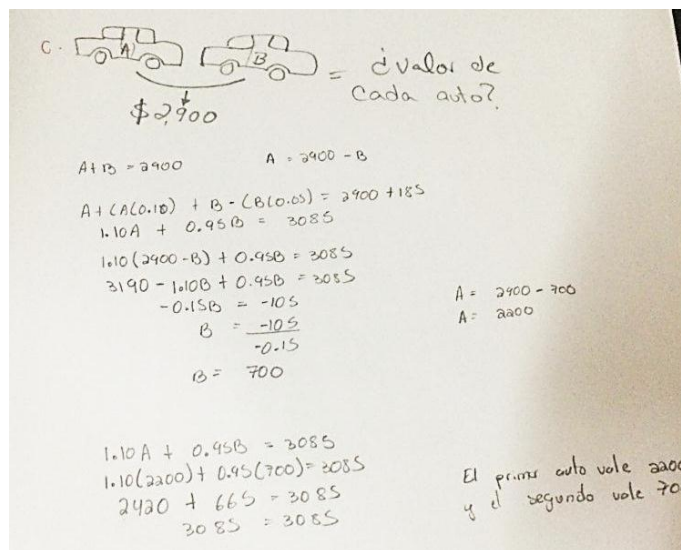
Equation 3:  $185 = 185$

Text: "Por medio de la verificación sabemos que la respuesta es correcta por que se verificaron los costos en la recesión"

Un error de consideración por parte de los estudiantes, lo muestra la figura 40, donde exponen que por cumplir la solución encontrada la ecuación la

respuesta es correcta, desestimando la verificación del planteamiento de la ecuación, situación que de no ser correcta la verificación de la solución no permitiría determinar el error. Por lo que no basta solo con comprobar la solución en la ecuación, sino que se deben verificar otros aspectos como el cumplimiento de las relaciones y la justificación de la construcción de la ecuación.

Figura 41: Error trabajo grupal 2 (etapa 4)



Se destaca que algunos grupos lograron realizar todo el proceso planteado en las sesiones para resolver el último problema, pero en ocasiones no cumplen con representar todo en términos de la incógnita seleccionada. Así lo muestra la figura 41, donde el grupo realiza una representación pictográfica que carece de toda la información dada en el enunciado, pero a pesar de ello logran establecer correctamente las relaciones, con las cuales construyen dos ecuaciones que les permite llegar a la solución correcta. A pesar que no expone la justificación de la ecuación la expusieron verbalmente, así como el cumplimiento de las relaciones.

Figura 42: Error trabajo grupal 3 (etapa 4)

• R// El precio del auto a = 2200

• La ecuación se construye en base a la fórmula  
utilidad = Precio auto a + Ganancia + (Precio auto b - Perdida auto b) -  
costos totales = Ganancia total

Sustitución de la ecuación

$$= 2200 + 0.10(2200) + ((2900 - 2200) - 0.05(2900 - 2200))$$
$$2900 = 185$$
$$= 2200 + 220 + 700 + 35$$
$$= 315$$

El costo del auto b es de 315

Otro caso se muestra en la figura 42, donde el grupo expone la justificación de la construcción de forma adecuada, pero en la comprobación de la ecuación un error de cambio signo originó la respuesta incorrecta. En estos casos podría ser más difícil, para el estudiante, poder garantizar que la solución es adecuada.

Por otro lado, con respecto al trabajo individual para esta etapa, se debía analizar lo realizado en las asignaciones pasadas, en base a los aspectos de la etapa de visión retrospectiva, y además resolver cuatro problemas más considerando todo el proceso visto en las sesiones de trabajo.

El conteo de los indicadores cumplidos para los primeros cuatro ejercicios, los cuales ya habían trabajado las etapas 1,2 y 3, se muestra en la tabla 21. Dicho conteo corresponde a un total de 47 estudiantes, quienes fueron los que entregaron la asignación.

Tabla 21:

*Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Etapa 4)*

Problema	Justifica la construcción de la ecuación	Comprueba la ecuación	Cumple las relaciones	Corrigió
#1: Función de funciones	15 (32%)	22 (47%)	5 (11%)	5 (11%)
#2: Proporcionalidad simple	15 (32%)	25 (53%)	5 (11%)	2 (4%)
#3: Proporcionalidad compuesta	12 (26%)	23 (50%)	5 (11%)	3 (6%)
#4: Función afín	11 (23%)	24 (51%)	0 (0%)	0 (0%)

De acuerdo a los resultados cuantificados se evidencia lo expuesto anteriormente en el trabajo grupal, donde en su mayoría los estudiantes consideran que con comprobar la ecuación se verifica que la solución es adecuada. Además solamente un 5% de los trabajos individuales consideraron todo el proceso que se plantea para esta fase, resaltando que en el problema 4 ninguno verificó las relaciones ya que en la comprobación de la ecuación se cumple.

En términos generales la mayor parte de estudiantes solo trabajaron los nuevos problemas propuestos ya que el 49% no hizo lo que se les solicitaba con los ejercicios trabajados en las asignaciones anteriores. En ese sentido, considerando la aplicación de todo el proceso para resolver problemas, los nuevos ejercicios muestran el desarrollo de la propuesta que adoptaron los estudiantes, el cumplimiento de cada indicador se muestra en la tabla 22, donde los porcentajes están en base a la cantidad de estudiantes que trabajaron los ejercicios, y la última columna en base al total de estudiantes que presentaron la asignación.

Con el fin de reducir el tamaño de la tabla se codifica las etiquetas de la primera fila de la siguiente manera

- RP: Representación pictográfica
- II: Identificación de incógnitas
- E: Explicación
- RD: Representa datos en términos de la incógnita
- ER: Establece relaciones
- CE: Construye la ecuación
- RE: Resuelve la ecuación
- JE: Justifica la construcción de la ecuación
- CS: Comprueba la ecuación
- CR: Cumple las relaciones
- C: Corrigió
- B: Bueno
- T: Trabajaron

Tabla 22:  
Cumplimiento de indicadores trabajo individual (Todo el proceso)

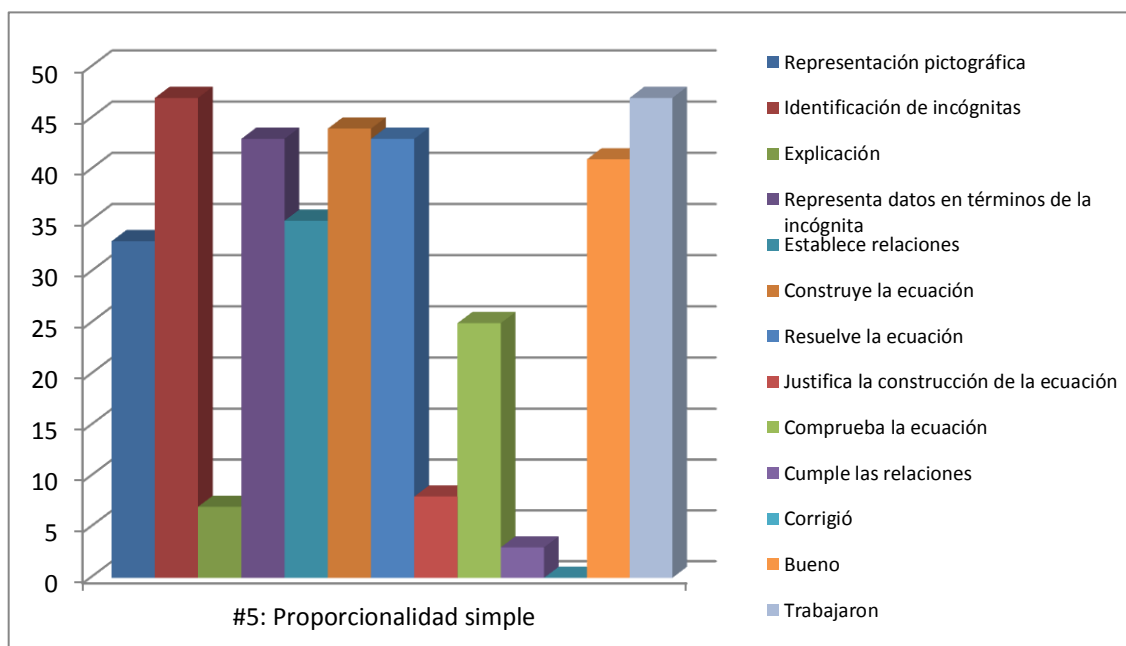
Problema	Fase 1			Fase 2 y 3				Fase 4			C	B	T	
	RP	II	E	RD	ER	CE	RE	JE	CS	CR				
<b>#5:</b>														
<b>Proporcionalidad simple</b>	33 70%	47 100%	7 15%	43 92%	35 75%	44 94%	43 91%	8 17%	25 53%	3 6%	0 0%	41 87%	47 100%	
<b>#6:</b>														
<b>Proporcionalidad compuesta</b>	22 65%	34 100%	4 12%	28 82%	13 38%	34 100%	32 94%	2 6%	15 44%	2 6%	0 0%	11 32%	34 72%	
<b>#7: Función de funciones</b>	29 63%	46 100%	10 22%	46 100%	46 100%	46 100%	46 100%	7 15%	20 43%	1 2%	0 0%	46 100%	46 98%	
<b>#8: Función afín</b>	43 96%	45 100%	8 18%	45 100%	43 96%	45 100%	45 100%	8 18%	28 62%	1 2%	0 0%	43 96%	45 96%	

En términos generales, de la tabla 22, se observa una mayor dificultad en el problema 6 que se trata de un problema de mezclas, en el cual solo el 32% de los estudiantes que trabajaron dicho problema lo hicieron de manera correcta. Este mismo ejercicio es el que posee menor porcentaje de abordaje, lo que evidencia la dificultad que tiene para los estudiantes. Mientras que para los demás ejercicios el porcentaje de respuestas correctas superan el 87% para cada uno.

Además los siguientes gráficos muestran el cumplimiento de los indicadores por cada problema propuesto, extraído de la tabla anterior.

**Problema 5:** *Un distribuidor de autos, en una barata de fin de año, reduce 15% la lista de precios de los modelos del año anterior. Si cierto modelo de cuatro puertas tiene un descuento de L. 160,000, ¿cuál era su precio de lista? ¿Cuánto se ahorra al comprar el modelo del año anterior?*

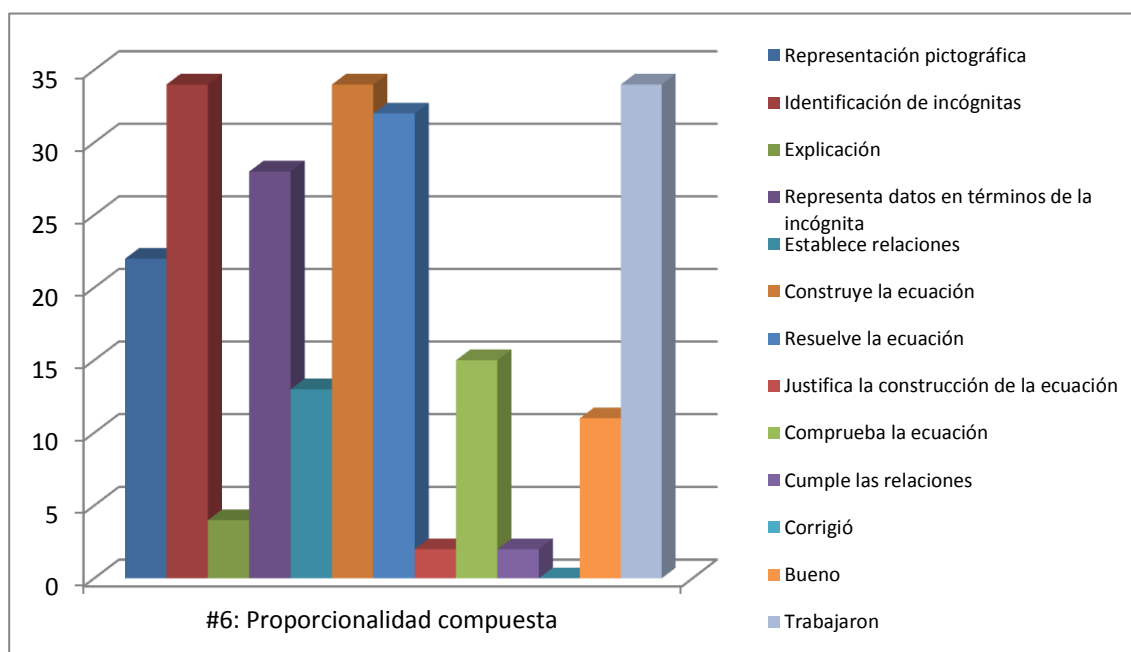
Gráfico 8: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 5)



Del gráfico 8, se determina la poca cantidad de estudiantes que cumplieron con los indicadores de la etapa de visión retrospectiva, donde el indicador que mayor frecuencia tuvo fue la comprobación de la solución, con 25 estudiantes, mientras que la verificación del cumplimiento de las relaciones solo fue hecha por 3 estudiantes y la justificación de la construcción de la ecuación por 8. Además se destaca la poca cantidad de estudiantes que explicaron, de acuerdo a su comprensión, lo que planteaba el enunciado del ejercicio 5, siendo solo 7 estudiantes de 47 quienes lo hicieron.

**Problema 6:** *El radiador de un automóvil contiene 10 cuartos de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y remplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?*

Gráfico 9: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 6)

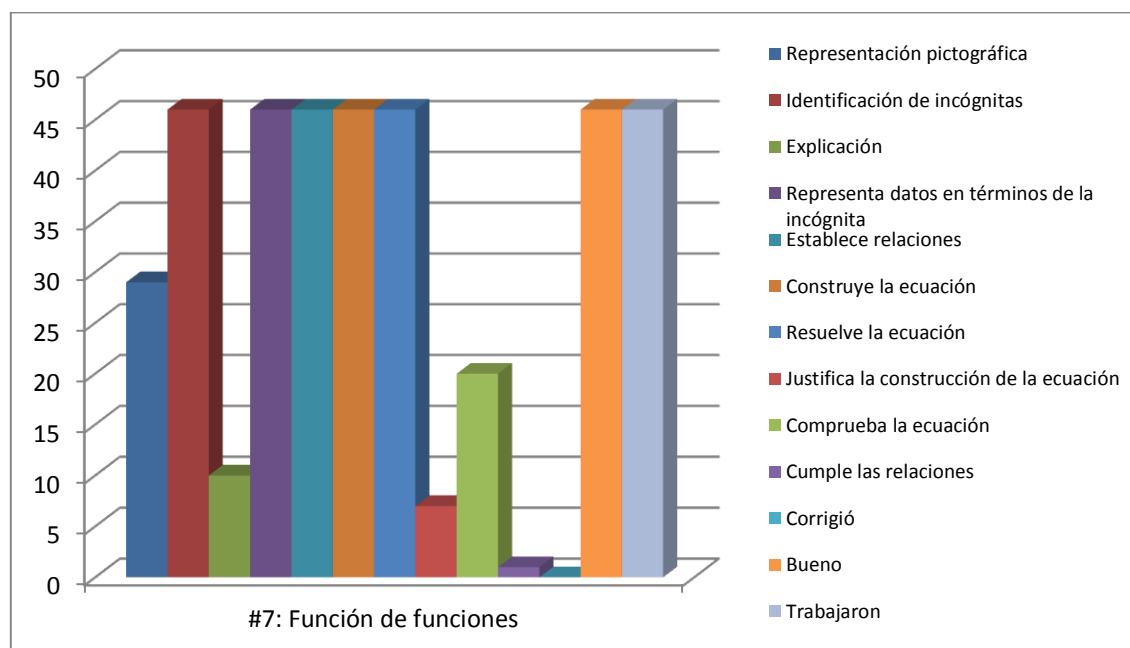


Para el problema 6, el gráfico 9, expone la escasa cantidad de estudiantes que determinaron la solución correcta, solamente 11 de 34 estudiantes. Lo que a su vez muestra un cumplimiento de los indicadores de la etapa 4 menos de la mitad, situación que impediría que cada estudiante pudiera comprobar y verificar todo el proceso desarrollado para el ejercicio.

Para el caso de los indicadores de justificación de la construcción de la ecuación y verificación de las relaciones solo 2 estudiantes de 34 lo hicieron, mientras que la comprobación de la ecuación fue realizada por 15 estudiantes. Donde de acuerdo al dato de ejercicios correctos por lo menos 4 de los estudiantes que comprobaron la ecuación tuvieron malo el ejercicio.

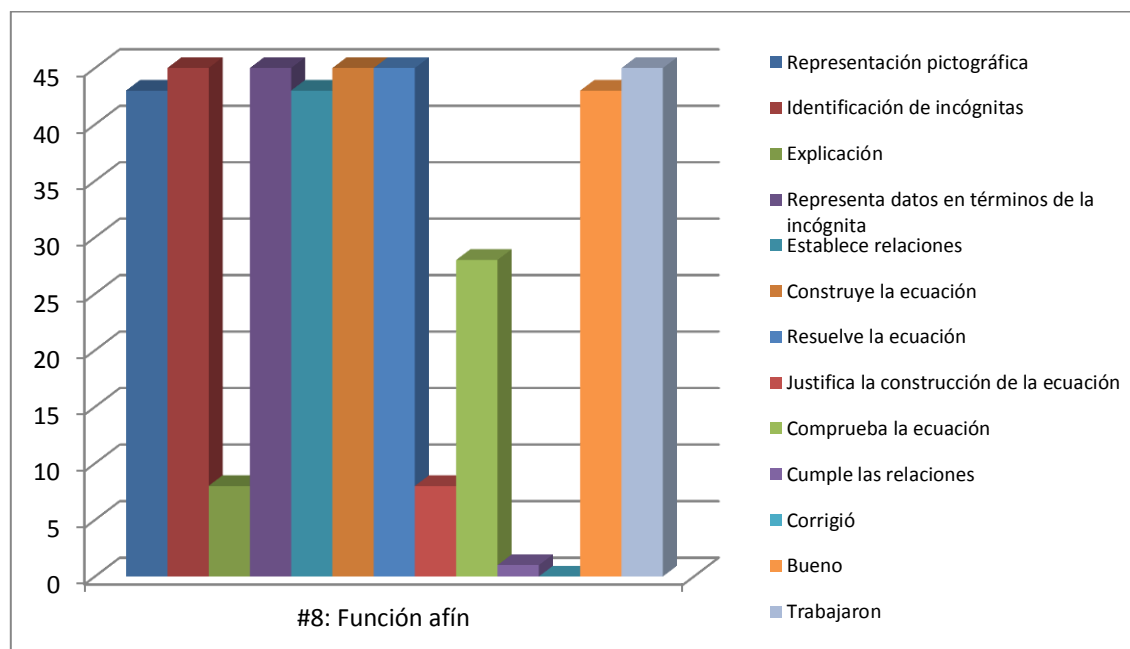
**Problema 7:** Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 millas por hora, o en una bicicleta a una velocidad de 12 millas por hora. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

Gráfico 10: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 7)



El gráfico 10, muestra el resumen de lo que se evidenció en el ejercicio 7, donde los 46 estudiantes que lo trabajaron encontraron la solución correcta. Además de esto, indicadores como la identificación de la incógnita, representación de datos en términos de la incógnita, establecer relaciones, construcción y resolución de la ecuación fueron cumplidos por todos los estudiantes, mostrando fluctuaciones en los tres indicadores de la etapa 4, donde solamente 7 justificaron la construcción de la ecuación, 20 comprobaron la solución de la ecuación y 1 verificó el cumplimiento de las relaciones; también hubo variantes en la explicación del problema pues solo 10 la realizaron y la representación pictográfica que solo 29 la hicieron, situación que, en base a los resultados favorables puede deberse a un exceso de confianza por parte de los estudiantes en lo realizado.

Gráfico 11: Cumplimiento de los indicadores de cada etapa (problema 8)



**Problema 8:** *A un fabricante le cuesta \$2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60¢ por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90¢, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de \$1000.*

Finalmente en el último problema, se observa del gráfico 11 una buena cantidad de ejercicios correctos con respecto a la cantidad de estudiantes que trabajaron este ejercicio, siendo 43 respuestas correctas de 45 estudiantes que abordaron el problema. Repuntando los mismos indicadores que en el ejercicio anterior, que fueron la identificación de la incógnita (45), representación de datos en términos de la incógnita (45), establecer relaciones (43) y resolución de la ecuación (45); con variaciones muy marcadas para la etapa de verificación, donde mayormente los estudiantes se conformaron con comprobar la solución en la ecuación, ya que 28 comprobaron la solución de la ecuación en contraste con los 8 que justificaron la construcción de la ecuación y 1 que verificó el cumplimiento de las relaciones.

En resumen, al hacer un comparativo de los gráficos se observa que en los cuatro problemas hay aspectos que no abordan los estudiantes, como ser la explicación del problema, la justificación de la construcción de la ecuación y el cumplimiento de las relaciones. Si bien es cierto esto no indica que la solución brindada esta incorrecta, pero orienta al discente a que pueda analizarla y estar seguro de ella. Además, el no hacerlo bien impide que determine un error en lo realizado, muestra de ello es la nula cantidad de correcciones registradas.

En ese sentido es la etapa de comprensión del problema y visión retrospectiva que quedan incompletas, para la primera, la mayor parte de estudiantes la completaron en un 67%, mientras que para la segunda solo se cumple un 33% los indicadores. Esto se podría deber a lo extenso que podría considerar el estudiante en exponer lo que establecen estos indicadores. Sin embargo, con respecto al aprendizaje, solo se sugiere que lo realicen pero en cuanto a la evaluación sería necesario plasmarlo con el fin de mostrar sus fortalezas o debilidades en el proceso de resolver los problemas.

Gráfico 12: Cantidad de ejercicios correctos y trabajados (Asignación final)

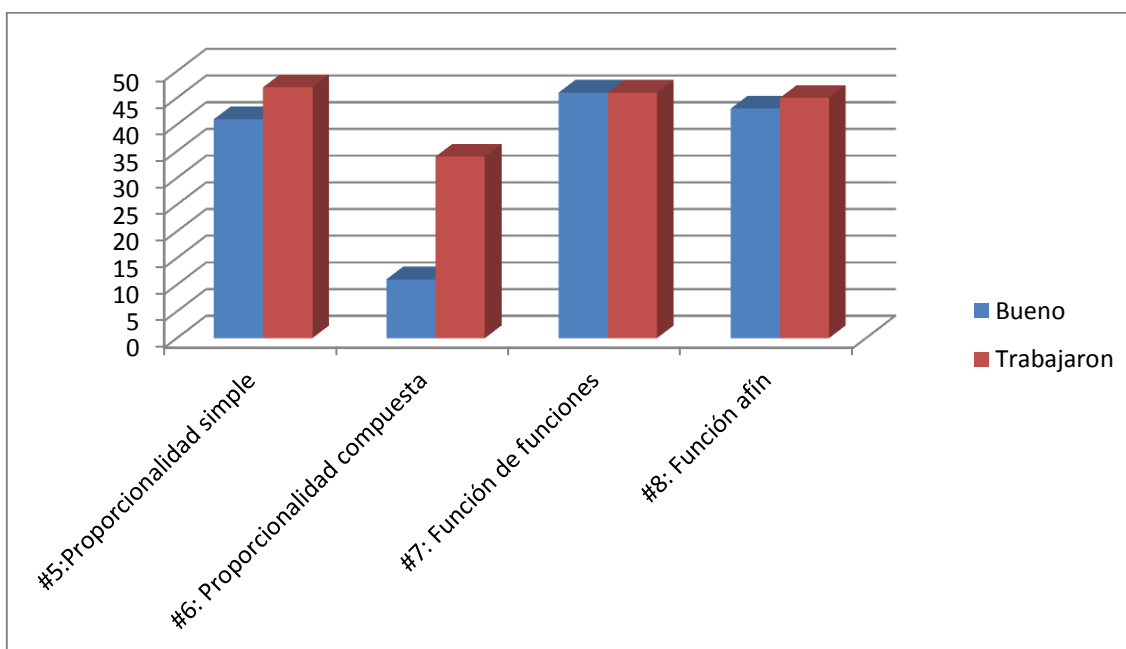


Gráfico 12: Cantidad de ejercicios buenos y cantidad de ejercicios trabajos por los estudiantes en los últimos cuatro problemas de la asignación individual.

Finalmente para esta última asignación, específicamente, los cuatro últimos ejercicios se observa que en su mayoría el porcentaje de ejercicios correctos en

base a la cantidad de trabajados es muy buena, exceptuando el problema #6 de mezclas. El cual fue el menos trabajado y con menos aciertos en su solución, esta dificultad fue expuesta en el pretest, donde manifestaban los estudiantes que los problemas de ese tipo se les dificultaba. Los errores en este problema se deben a un mal planteamiento de la ecuación, algunos conocimientos previos como ser operaciones con porcentajes, una mala traducción al lenguaje algebraico producto de una inadecuada interpretación.

#### 4.2.3 Discusión de los errores y observaciones del postest

Como parte final de la propuesta, la evaluación de los aprendizajes realizada mediante una prueba, mostrará si el producto de la misma es satisfactorio para el proceso de enseñanza aprendizaje. Por lo que a continuación se detallan los datos cuantificables y las observaciones en los resultados de la prueba.

Tabla 23:  
*Datos del postest*

	<b>Problema 1:</b>		<b>Problema 2:</b>		<b>Problema 3:</b>		<b>Problema 4:</b>	
	<b>Porcentajes</b>		<b>Función afín</b>		<b>Mezclas</b>		<b>Función compuesta</b>	
	<b>fr</b>	<b>%</b>	<b>fr</b>	<b>%</b>	<b>fr</b>	<b>%</b>	<b>fr</b>	<b>%</b>
<b>Bueno</b>	22	44%	15	29%	12	34%	17	40%
<b>Malo</b>	28	56%	36	71%	23	66%	25	60%
<b>Trabajaron</b>	50	94%	51	96%	35	66%	42	79%
<b>No trabajaron</b>	3	6%	2	4%	18	34%	11	21%

Según los datos mostrados en la tabla 23, se observa que menos del 50% de estudiantes que trabajaron los problemas llegaron a la solución correcta, teniendo un promedio de 37% de problemas correctos. Particularmente en el problema 3 y problema 2 se evidencia los mayores errores, donde en el primero la cantidad de estudiantes que trataron de desarrollar el problema es la más baja, mientras que en el segundo el porcentaje de respuestas correcta, en base a los estudiantes que abordaron el problema, es el menor.

Para el problema 2 el mayor error radicó en la interpretación y extracción de datos, ya que el enunciado establecía que un trabajador recibía 50% de una cuota, donde en su mayoría, consideraban que la cuota solo era el 50% de lo recibido. Mientras que para el problema 3 el planteamiento de la ecuación, la traducción al lenguaje algebraico, sumado con algunos errores referentes a operaciones con porcentajes fueron los más notorios. Además se infiere que, en base al bajo porcentaje de abordaje del problema, la comprensión e interpretación del mismo apuntan a ser las mayores dificultades para este tipo de problemas.

Figura 43: Errores en el segundo problema del postest 1

$\times 100(40) = \text{salario base por horas totales}$   
 $\times 100(0.5)x = \text{bono por horas extras}$

$$100(40) + 100(0.5)x = 5950$$

$$4000 + 50x = 5950$$

$$50x = 5950 - 4000$$

$$50x = 1950$$

$$x = \frac{1950}{50}$$

$$x = 39$$

La figura 43, muestra el proceder de un estudiante, en el problema 2, durante el postest, donde establece relaciones y a partir de estas construye la ecuación. Sin embargo al considerar que  $x$  representa la cantidad de horas extras trabajadas solo toma el pago de más que el trabajador percibe por hora extra (50% más), donde debería considerar el pago total por hora extra (150%), pues el enunciado planteaba que: *El salario base de un trabajador es L. 100 por hora, pero recibe 50% más de esta cuota por cada hora que rebase las 40 horas por semana. Si el cheque de su semana es de L. 5,950. ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?*

Figura 44: Errores en el segundo problema del postest 2

②. Datos

$x$  = horas extras trabajadas  
 $100 \times 1x$  = La hora trabajada a 100 Lps  
 $50\%$  = Cuota de cada hora  
 $40$  h = horas por semana  
 $5950$  = el pago total

$$5950 = x(100) + 0.50x(40)$$

$$5950 = 100x + 20x$$

$$100x + 20x = 5950$$

$$80x = 5950$$

$$x = \frac{5950}{80}$$

$$x = 74.38$$

- Comprobación

$$74.38(100) - 0.50(74.38)(40) = 5950$$

$$7,438 - 37.19(40) = 5950$$

$$7,438 - 1,488 = 5950$$

$$\underline{5,950 = 5950}$$

1

Rta. El total de horas elaboradas fueron 74.38 h

Otro error frecuente en el problema 2, se expone en la figura 44, donde se observa que el estudiante extrae datos pero no establece relaciones de esos datos, ni manifiesta lo que representa  $x(100)$  y  $0.50x(40)$ . Lo anterior no permite que el estudiante pueda tener argumentos firmes para justificar la construcción de la ecuación, además se resalta que comprueba la ecuación sin considerar los

otros dos aspectos de la etapa de verificación, lo que según él, hace que la respuesta encontrada sea correcta.

Figura 45: Errores en el tercer problema del postest 1

Datos:

- $x$ : Cantidad a mezclarse de vino blanco en litros
- 12,000: litros de jerez a producir.
- 12%: Cantidad de alcohol en el vino blanco.
- 36%: Cantidad de alcohol en el brandy
- 16%: Cantidad de alcohol en el jerez.
- $y$ : Cantidad a mezclarse de Brandy en litros

$$0.16(12,000) - 0.36 = x$$

$$\underline{1,919.64 = x}$$

$$0.16(12,000) = 0.12(1,919.64) + 0.36y$$

Por otro lado, para el problema 3, los errores ocasionados por operar o interpretar mal los porcentajes se siguen frecuentando en el postest. Por ejemplo en la figura 45, se evidencia esta dificultad sumada con aspectos relacionados con la traducción al lenguaje algebraico. En el desarrollo el estudiante no cumple con el proceso seguido en las sesiones y trabajos anteriores, especialmente las relaciones en términos de la incógnita con sus respectivas representaciones en el problema. Es así como en la ecuación dada trabaja un porcentaje como un número solo y establece que la cantidad de vino ( $x$ ) es el 16% de la cantidad de jerez (total de la mezcla) menos 36%, donde al contrastarlo con el enunciado, el cual planteaba lo siguiente: *En una compañía de vino se requiere producir 12,000 litros de jerez encabezando vino blanco, que tiene un contenido de alcohol de 12%, con brandy, el cual tiene un contenido de 36% por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol de 16%. Determine las cantidades de vino blanco y*

de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado. Resulta erróneo.

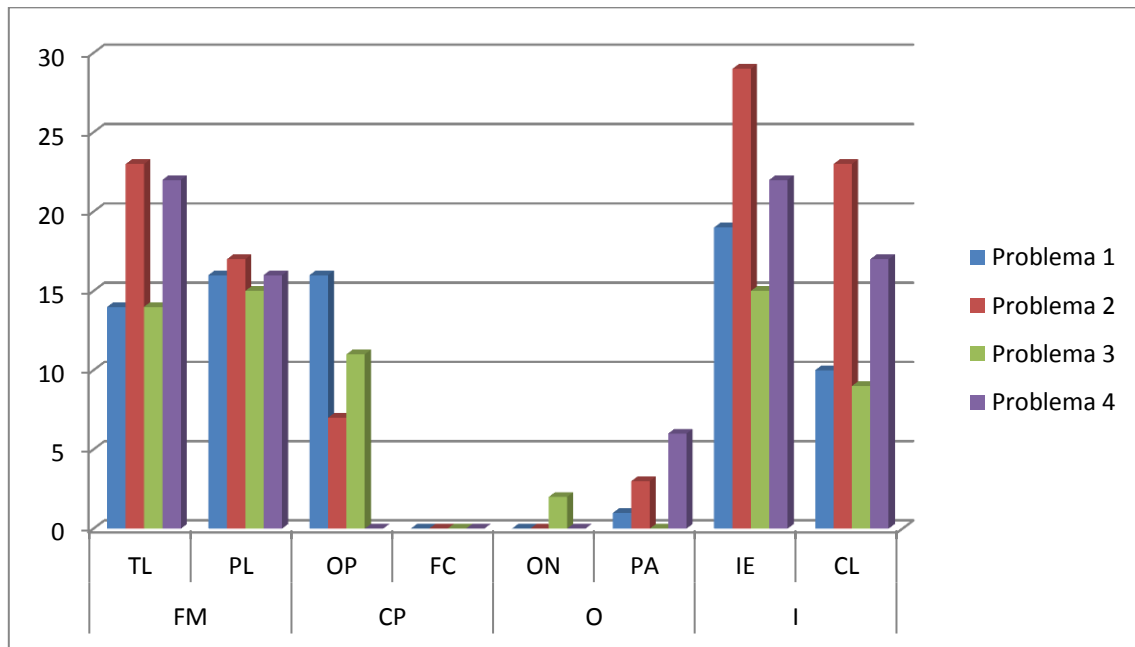
Figura 46: Errores en el tercer problema del postest 2

3)  $x =$  Cantidad de vino blanco y de brandy que deben mezclarse  
 $12,000 =$  Cantidad de jerez  
 $0.36x =$  Contenido de alcohol por volumen.  
 $0.16x =$  Cantidad de contenido de alcohol que debe tener  
 $0.12x =$  contenido de alcohol con brandy  
ecuación  
 $x + 0.12x + 0.16x + 0.36x = 12,000$

Para el mismo problema también se da la duplicidad de la variable. La figura 46, muestra la representación que un estudiante le da a la variable  $x$ , donde la considera como la cantidad de vino blanco y de brandy que se deben mezclar, representado así dos cantidades que no necesariamente deben ser iguales. Esto se afirma al observar las relaciones con sus representaciones, donde establece que  $0.12x$  es el contenido de alcohol con brandy,  $0.16x$  cantidad de contenido de alcohol que debe tener la mezcla, y  $0.36x$  cantidad de alcohol por volumen, que posiblemente se refiere a volumen de vino blanco. Finalizando el análisis del proceso, la ecuación dada se aleja de un proceso analítico bien estructurado, ya que establece que la mezcla total es igual a la suma de los contenidos de alcohol, expuestos en sus relaciones y la cantidad de vino blanco y brandy ( $x$ ), estableciendo así que la suma de alcohol más brandy y vino, que tienen más alcohol, da como resultado una mezcla, que en este caso es el jerez.

En general la frecuencia de errores, de acuerdo a la categorización establecida, se muestra en el gráfico 13 donde se destaca que la cantidad máxima aparece en 29 ocasiones y además resalta que el problema 2 es el que presenta mayor cantidad de errores.

Gráfico 13: Errores en el postest



Se observa que, los errores más frecuentes son los de interpretación (IE), extracción de datos (CL), traducción al lenguaje algebraico (TL) y en menor medida planteamiento de la ecuación (PL), esto debido a que los tres primeros influyen en el cuarto, es decir, al extraer datos incorrectos, interpretarlos equivocadamente y representarlos mal algebraicamente, la ecuación que se construye llevaría esos errores. Esto es lo que Boscan y Klever (2012) llamarían poca comprensión de los enunciados, siendo la mayor dificultad que se da al momento de resolver problemas, según las autoras.

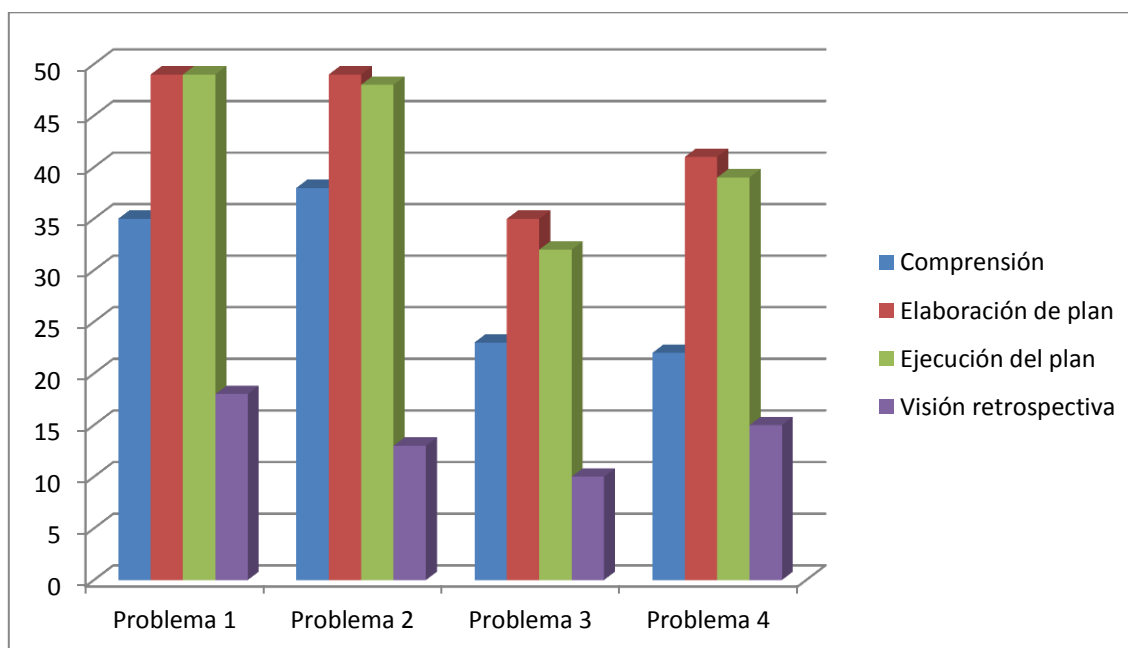
Considerando los datos anteriores, resulta necesario analizar la aplicación de la metodología desarrollada para resolver problemas. Por lo cual en la tabla 25 se muestran las etapas cumplidas del método de Polya para buscar la solución de los problemas planteados en la prueba.

Tabla 24:  
*Etapas cumplidas del proceso (Postest)*

	<b>Comprensión</b>	<b>Elaboración de plan</b>	<b>Ejecución del plan</b>	<b>Visión retrospectiva</b>
<b>Problema 1</b>	35 (66%)	49 (92%)	49 (92%)	18 (34%)
<b>Problema 2</b>	38 (72%)	49 (92%)	48 (92%)	13 (25%)
<b>Problema 3</b>	23 (43%)	35 (66%)	32 (60%)	10 (19%)
<b>Problema 4</b>	22 (42%)	41 (77%)	39 (74%)	15 (28%)

Considerando el porcentaje promedio de ejercicios correctos y el porcentaje promedio de los que desarrollaron todo el proceso planteado, de acuerdo a la tabla 25 y 23, se determina una relación de 2 a 5, es decir, por dos estudiantes que desarrollaron todo el proceso hay cinco problemas correctos. En ese sentido cabe analizar ese dato en relación con la primera etapa, donde la relación es 5 a 6 y particularmente por cada ejercicio la relación es mayor que 9 a 5 donde por cada 9 estudiantes que cumplieron la etapa de comprensión 5 tendrán una respuesta adecuada. Lo cual, esta etapa, podría ser un buen indicador para determinar si la solución de un problema será adecuada o no. Lo anterior concuerda con lo que concluyen Boscan y Klever (2012) donde comprueban que el aumento en la comprensión de los enunciados de un problema está relacionado con el aumento en el número de respuestas correctas.

Gráfico 14: Cumplimiento del proceso en el postest



Mediante la gráfico 14 se puede apreciar la poca cantidad de estudiantes que verifican el proceso para encontrar la solución mediante los aspectos abordados, destacando que en los datos expuestos existe una mínima cantidad que solo comprueban la solución en la ecuación. Además la etapa de comprensión difiere con la de formulación y ejecución de un plan, lo que permite intuir que posiblemente buscan solamente llegar a algo, sin un análisis previo y profundo.

Por otro lado, la etapa de elaboración de un plan tiene como producto la ecuación que modela la situación planteada, pero si no cumple los indicadores establecidos resulta muy probable un error en dicha ecuación. El dato que muestra el gráfico 14 se refiere a que el estudiante construyó la ecuación, pero no garantiza que consideró todo el proceso mostrado en las diferentes sesiones de trabajo.

#### 4.2.4 Comparación de resultados del pretest y postest

Los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica y prueba final aplicadas al curso de Matemática 1 (MM-110) sección 1400 durante el primer periodo académico del año 2018 se presentan en la tabla 26, donde los porcentajes de los ejercicios buenos y malos son en base a la cantidad de estudiantes que trabajaron cada ejercicio, mientras que los porcentajes de los que trabajaron y no trabajaron están de acuerdo al total de estudiantes que realizaron la prueba.

Tabla 25:  
*Comparación Pretest-Postest*

	<b>Problema 1: Porcentajes</b>		<b>Problema 2: Función afín</b>		<b>Problema 3: Mezclas</b>		<b>Problema 4: Función compuesta</b>	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
<b>Bueno</b>	5 (10%)	21 (42%)	4 (9%)	15 (29%)	2 (7%)	11 (31%)	10 (25%)	17 (41%)
<b>Malo</b>	47 (90%)	29 (48%)	42 (91%)	36 (71%)	27 (93%)	24 (69%)	30 (75%)	25 (59%)
<b>Trabajaron</b>	52 (98%)	50 (94%)	46 (87%)	51 (96%)	29 (55%)	35 (66%)	40 (75%)	42 (79%)
<b>No trabajaron</b>	1 (2%)	3 (6%)	7 (13%)	2 (4%)	24 (45%)	18 (34%)	13 (25%)	11 (21%)

De lo anterior se destaca el aumento en cuanto a la cantidad de estudiantes que trabajaron los ejercicios planteados, donde en el pretest únicamente en el primer ejercicio el porcentaje de estudiantes que trabajaron fue mayor en un 4%, mientras que en el segundo, tercero y cuarto el postest mejoró esos porcentajes en 9%, 11% y 4% respectivamente. Lo que permite intuir la mejora en la confianza del estudiante para abordar lo planteado. Sin embargo, el mayor interés se enfoca en el correcto abordaje de los mismos, donde en base a la comparación

del antes y después los resultados arrojan datos significativamente mayores después de la propuesta.

Tomando en cuenta el total de estudiantes que trabajaron cada ejercicio, el porcentaje de estudiantes que determinaron la respuesta correcta tuvo un aumento promedio del 23%, comparando este dato con el estudio de Cedeño (2017), en el cual plantea un método de resolución de problemas de la vida cotidiana, resulta que su análisis arrojó un aumento significativo de más de 17 puntos a la media del postest concluyendo que ayuda significativamente al aprendizaje de resolución de problemas. En ese sentido se puede concluir lo mismo en este estudio ya que supera en 23 puntos dicha diferencia.

#### **4.2.5 Percepción de la propuesta**

Para establecer la aceptación que tiene la propuesta por parte de los estudiantes y docentes, se consideran los resultados obtenidos por medio de entrevistas y encuestas de opinión de cada aspecto del proceso planteado en la propuesta, considerando así, aspectos como el trabajo individual y grupal, ejercicios, desarrollo de cada una de las sesiones de trabajo e instrucciones dadas.

En términos generales los estudiantes plantean los mayores grados de aceptación al análisis en clase donde más de un 83% de estudiantes concuerdan con ello, seguido del trabajo grupal, individual y el proceso empleado para resolver los problemas.

Por otro lado, los ejercicios propuestos, es el único aspecto que los estudiantes consideran un poco inadecuado, donde un 46% de estudiantes lo consideran así. Con respecto a los otros aspectos la inadecuación, desde el punto de vista de los estudiantes, no es más del 14% de los participantes.

Con respecto a los expertos, se considera a tres docentes del departamento de matemáticas seleccionados de acuerdo a criterios, donde se considera a la coordinadora de la asignatura de Matemática 1 (MM-110) y dos profesoras que poseen más de 12 años de experiencia brindando dicha asignatura.

Primeramente se aborda una entrevista con los expertos para saber su percepción de la problemática que se plantea al resolver problemas. En ese sentido se destaca que concuerdan con la problemática evidenciada, la cual es ocasionada por factores como los conocimientos previos, actitud del estudiante, y una falta de cultura en la lectura y mala percepción de las matemáticas en general. Además establecen que las mayores dificultades radican en la interpretación y traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Particularmente referente a la importancia de resolver problemas modelados mediante ecuaciones lineales en el curso, se destaca la opinión de una de las tres profesoras, la cual considera que dicho tema no se debe abordar en la asignatura de Matemática 1, pues eso es lo que hacen en futuras asignaturas, especialmente aquellas del área de física, manifestando que es una pérdida de tiempo para cubrir todo el contenido de la clase. Sin embargo a pesar de su opinión, considera que las potencialidades que dan al aprendizaje resolver

problemas son muy importantes y la mayor dificultad, en los estudiantes, es que no saben interpretar. Aspectos concordantes con las demás docentes, añadiendo la mala adquisición de conocimientos en etapas educativas anteriores.

Ahora con respecto a opiniones de la propuesta expresan lo importante de generar procesos que induzcan a una mejora en el aprendizaje, y en este caso, el trabajo colaborativo e individual permite que el estudiante pueda hacer introspección de sus habilidades y deficiencias y mejorarlas con su grupo. Además hacen mención que para la propuesta depende el tipo de grupo con el que se trabaje, y siempre buscar que los problemas sean acorde a su contexto. Consideran que el tiempo de la propuesta es adecuado, y los resultados que evidencian no tan adecuados.

Al contrastar los aspectos abordados en común tanto con estudiantes y docentes se establece lo siguiente.

Tabla 26:  
*Comparación opiniones de la propuesta estudiantes - docentes*

Aspecto	Estudiantes	Docentes
Trabajo individual	Un 90% considera entre adecuado y muy adecuado.	Lo consideran muy adecuado.
Trabajo grupal	Un 76% considera entre adecuado y muy adecuado	Lo consideran muy adecuado, pero se debe tener cuidado con el tipo de ejercicios que se puede proponer.
Prueba final	Un 43% considera poco adecuada.	Entre adecuada y muy adecuada.

Tiempo de la propuesta	Solo un 14% considera inadecuado.	Adecuada, establecen que sería bueno tener más tiempo pero en base a lo que se dispone está adecuado.
Etapa de comprensión del problema	Un 76% considera entre adecuado y muy adecuado, nadie lo considera inadecuado.	Adecuada, proponiendo que se podría considerar más tiempo para esta si se puede ampliar el tiempo.
Etapa de formulación y ejecución del plan	Un 79% considera entre adecuado y muy adecuado, nadie lo considera inadecuado.	Muy adecuado, el tiempo es prudente.
Etapa de visión retrospectiva	Un 86% considera entre adecuado y muy adecuado.	Adecuada.
Instrucciones dadas	Un 55% considera muy adecuadas las instrucciones dadas, y solo un 14% poco adecuadas.	Adecuada, pero en algunas puede no ser claras a menos que en clase se explique.
Desarrollo de la propuesta	Es una de los aspectos más altos en adecuación por considerando 55% muy adecuada y solo un 7% poco adecuado.	Muy adecuada, la propuesta está bien planteada.
Resultados obtenidos de la propuesta	Un 52% lo considera entre excelente y muy buena, y un 45% como buena.	Poco adecuados, no muestran una mejora significativa de análisis. No puede ver los resultados en cada etapa, y solo con el resultado final no podría considerar como adecuada.

De la tabla 27, se destacan dos observaciones discrepantes, referente al aspecto de la prueba final y los resultados obtenidos de la propuesta. Con respecto a la prueba final, los estudiantes en un porcentaje un poco alto (44%) consideran esta evaluación poco adecuada, mientras que los docentes la consideran entre adecuada y muy adecuada. En ese sentido tomando que la mayoría de estudiantes no consideran poco adecuada la evaluación y los docentes, bajo su perspectiva y experiencia, establecen una correcta adecuación la discrepancia podría surgir en cuanto a la exigencia que se les establece y la presión de la evaluación. Donde en base a los ejercicios abordados anteriormente los docentes no ven una dificultad fuera de lo desarrollado en el proceso.

Por otro lado en cuanto a los resultados, los docentes manifiestan que son poco adecuados a lo que se esperaría de un proceso nuevo, sin embargo a su vez establecen que con los resultados finales no se puede visualizar si hubo un avance en el análisis ya que solo pudieron ver la comparativa del diagnóstico y prueba final, sin visualizar los errores cometidos en cada problema. Mientras que los estudiantes, en su mayoría, la consideran entre excelente y muy buena, lo que en base a resultados y procesos consideran una aceptación.

En resumen, con respecto a lo expuesto por cada parte involucrada la percepción de la propuesta es adecuada, donde, como en todo proceso, se pueden hacer cambios de acuerdo al grupo de estudiantes con los que se trabaje, en cuanto a tiempo, instrucciones y ejercicios. Permitiendo así un proceso mejorado de acuerdo a las exigencias de los grupos y momentos de su aplicación. Además de acuerdo a las recomendaciones que manifiesta Orrantía (2006) al

momento de evaluar la resolución de problemas, donde hace énfasis en aspectos afectivos y actitudinales para el desarrollo de metodologías y, en procesos evaluativos continuos y por etapas; la propuesta coincide con dichos aspectos. En el sentido que los estudiantes y docentes destacan la aceptación en la variedad de actividades, lo que a su vez permite una evaluación de procesos en base a los indicadores establecidos para el cumplimiento de cada etapa.

Además, cabe resaltar que por parte de los estudiantes un 76% no habían trabajado con una metodología parecida en otros temas del área de matemáticas. Lo que muestra una novedad en el entorno donde se propone el proceso para resolver problemas modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita. Aunado a esto, la aceptación de la mayoría de los estudiantes y aprobación de los docentes permite establecer la propuesta como acorde desde el punto de vista de las partes involucradas.

En consideración con lo que establece Cedeño (2016: 148) donde recomienda que “los docentes se actualicen o tengan la capacidad de buscar nuevas formas de enseñar, sobre todo utilizando el método de resolución de problemas”, la propuesta logra dicha recomendación. Además el mismo autor hace hincapié en fomentar estrategias para estimular la percepción de las características y condiciones de la situación problemática así como una sistematización del proceso con el fin que el estudiante tenga una serie de recursos para desarrollar sus capacidades, aspectos torales que la propuesta posee y son percibidos por los docentes y estudiantes.

Finalmente, de acuerdo a Godino (2014: 19) los aspectos claves para establecer la idoneidad didáctica para un proceso tienen que ver con la interacción (Interaccional), adaptación (Ecológica), disponibilidad (Mediacional), representatividad (Epistémica), implicación (Afectiva) y proximidad (Cognitiva), los cuales de las opiniones resultantes y de los fundamentos para la construcción de la propuesta se cumplen. Manifestando en todo el proceso metodológico interacción alumno-alumno, docente-alumno, adaptándolo en función a la programación oficial del curso y permitiendo ser flexible a ciertos cambios futuros, considerando la opinión de los actores principales y estableciendo la propuesta en base a los enfoques constructivistas-cognoscitivos.

## 5. Conclusiones y recomendaciones

### 5.1 Conclusiones

En relación al proceso descrito anteriormente y los resultados obtenidos en cada una de las diferentes etapas del estudio se llega a las siguientes conclusiones:

- Las mayores dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales con una incógnita son aquellas que se relacionan con la interpretación y formulación matemática. Las que se presentan con mayor frecuencia son: la traducción a lenguaje algebraico (TL), planteamiento de la ecuación (PL) e interpretación de lo que establece el enunciado (IE). Estas dificultades se relacionan con lo que se conoce como comprensión lectora, donde la mayoría de autores establecen como una dificultad común al momento de resolver problemas, así como los docentes entrevistados durante la investigación, los cuales exponen que los estudiantes tienen dificultades en interpretar el enunciado y expresarlo en forma algebraica. Además con respecto al proceso, estas dificultades disminuyen al final del mismo, pero a pesar de ello, son las que se dan mayormente entre todas las demás. Permitiendo establecer focos sobre los cuales se deben trabajar y potenciar con el fin de mejorar todo proceso de enseñanza.

Por otro lado los conocimientos previos, especialmente las operaciones e interpretación de los porcentajes, fue un aspecto que se presentó como

dificultad con una cantidad de errores considerable, los cuales en el desarrollo de la propuesta disminuyeron levemente, donde en algunos casos la corrección puntual de estos hubiera permitido obtener la solución adecuada al problema. En ese sentido, se requiere afianzar los conocimientos previos necesarios en todo proceso para resolver problemas.

Finalmente, plantear una ecuación no es algo que paraliza al estudiante, por lo que el error no es el no construir la ecuación sino saber cómo construirla adecuadamente. Por lo que a través del proceso, la evaluación de dicho planteamiento o adecuación reduce este error, sin embargo pocos desarrollan el análisis para la comprobación de la misma.

- En cuanto al proceso planteado a los discentes para resolver problemas, se establece la pertinencia del mismo en base a los fundamentos teóricos y pedagógicos que sirvieron para su planteamiento. Siendo esto un aspecto relevante para su réplica en diferentes entornos.
- A pesar de lo anterior, no todos los aspectos indicados durante la propuesta metodológica fueron desarrollados fielmente, lo que en cierta medida, debilita el observar la potencialidad del proceso. Entre los aspectos que los estudiantes desestimaron o realizaron poco, tanto en trabajos grupales, individuales y pruebas destacan: la explicación de lo

que plantea el ejercicio, donde a través de este se puede evaluar la comprensión del enunciado; representación de cada término de la ecuación, que permite dar una guía para una adecuada construcción de la ecuación; la verificación de relaciones y justificación de la construcción de la ecuación, las cuales cuestionan y muestran si lo desarrollado es adecuado. Por lo que aspectos más comunes a ellos son los que siempre desarrollan, a pesar de mostrar la importancia de cada parte del proceso, factores como el tiempo y la costumbre vienen a perjudicar un correcto cumplimiento del mismo.

- Dentro de las etapas del proceso, la etapa de comprensión del problema permite mostrar si el problema será resuelto correctamente o no. Es decir, si el estudiante sabe lo que le pide el enunciado, lo puede manipular y expresar mediante algún diagrama identificando datos desconocidos y sobre todo sabe explicar lo que se le pide, resulta muy probable que su solución sea correcta. Lo que establece que errores como conocimientos previos o construcción y resolución de la ecuación son disminuidos si se cumple cada indicador de la primera fase del proceso.

Por lo que se recomienda analizar y brindar mayor trabajo y tiempo a la primera etapa del proceso planteado.

- Finalmente, la propuesta metodológica planteada, al sistematizar mediante un proceso la resolución de problemas, permite observar y conocer

puntualmente los errores cometidos por estudiantes en el abordaje y desarrollo de problemas con un enunciado verbal. En ese sentido la sistematización de un proceso orientado a un cambio genera una mejora, por lo que se requiere saber si la mejora es significativa o no. Con base en lo desarrollado y en comparación con otros estudios (Cedeño Loor, 2017; Boscan Mieles & Klever Montero, 2012), se establece que la propuesta genera una mejora en el proceder de los estudiantes al resolver un problema. Dicha mejora no es basada solamente en resultados iniciales y finales, pudiendo ser estos debatibles, sino que se muestra de manera integral, logrando un avance bueno para el proceso de resolución de problemas en cada una de las etapas.

- Además la aceptación de la propuesta metodológica por parte de las personas involucradas, estudiantes y docentes, es muy buena, resultando ser novedosa, particularmente para el grupo de estudiantes que participaron en la misma, y el contexto sobre la cual se realiza.

## **5.2 Recomendaciones**

Por otro de acuerdo a los aspectos concluyentes del estudio se brindan las siguientes recomendaciones.

- A los docentes, a resaltar y crear estrategias que permitan a los estudiantes desarrollar un análisis para una correcta interpretación de los enunciados verbales y transformación de estos a un lenguaje algebraico, a través de una

verificación y justificación de cada paso del proceder de los discentes, puesto que, de acuerdo a los resultados obtenidos la fase de visión retrospectiva, en la cual verifican la solución es la menos abordada. A su vez analizar el por qué los estudiantes no consideran medios de verificación del proceso podría ser parte de un nuevo estudio, midiendo el impacto que esto pudiera tener en lograr la solución correcta.

- Para futuros estudios se sugiere analizar la correlación que tiene el cumplimiento fiel de la primera parte del proceso descrito, comprensión del problema, con la correcta solución a la problemática que se plantea.
- Considerando que para el nivel superior se requieren estrategias para la formación profesional del individuo, se sugiere que se empleen metodologías orientadas a la modelización, donde como punto introductorio a las mismas, la propuesta expuesta en este trabajo, podría ser favorable ya que es flexible para cualquier contexto del área físico – matemático.
- Como estrategia de mejora en los procesos educativos del área de matemáticas o áreas afines, se recomienda replicar la propuesta en diferentes entornos con el fin de evaluarla y mejorarla.

## **Propuesta metodológica para la enseñanza de resolución de problemas de ecuaciones lineales con una incógnita.**

### **Introducción:**

La propuesta metodológica para la enseñanza de resolución de problemas de ecuaciones lineales con una incógnita, que se describe a continuación, surge como vía para reforzar las debilidades y disminuir las dificultades que presentan los estudiantes al tratar de resolver un problema de aplicación. En este caso se focaliza en aquellos problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales, considerando que estos son los primeros que analizan en los cursos iniciales de matemáticas en las universidades.

La propuesta va orientada para estudiantes del nivel superior y fue elaborada para los alumnos que cursan la asignatura de Matemática 1 (MM-110) en la Universidad Nacional Autónoma de Honduras en el Valle de Sula (UNAH-VS). Sin embargo la misma puede ser empleada en asignaturas posteriores, así como en niveles educativos anteriores, pues establece un proceso sistemático bien definido y flexible de acuerdo al grupo con el que se trabaja.

Desde una perspectiva general la propuesta considera el método planteado por George Polya (1945) para resolver problemas y aspectos de los modelos constructivistas y cognoscitivas, considerando sesiones grupales donde los miembros de cada grupo buscan analizar diferentes enunciados mediante una guía instruccional y asignaciones individuales donde cada estudiante pone en práctica lo aprendido. Destacando la parte instruccional que se enfoca a modelar

correctamente un enunciado, mediante un proceso que expone la claridad del modelo (ecuación) planteado pues busca la interpretación de cada término que se expresa en el modelo.

En cuanto a los problemas que se pretenden discutir en la propuesta se consideran cuatro familias de problemas enmarcadas de acuerdo a la categorización dada por Cifuentes y cols. (2012) donde establecen cuatro tipos de problemas:

1. Proporcionalidad simple
2. Función afín.
3. Proporcionalidad compuesta e igualdad de combinaciones afines. (Implican problemas de movimiento, mezclas, velocidad)
4. Función de funciones. (Problemas de sustitución y de edades) (97-107)

Lo que conlleva a variar los problemas a utilizar en caso se quiera aplicar la propuesta en más de una ocasión. Además, dicha categorización, ayuda a adaptar los problemas a diferentes contextos.

### **Objetivos de la propuesta**

1. Desarrollar habilidades para la comprensión e interpretación de los problemas aplicados.
2. Desarrollar habilidades para modelar una situación planteada en una ecuación lineal con una incógnita.

3. Reforzar las estrategias para resolver problemas mediante una formalidad y sistematización del proceso.
4. Fortalecer el análisis de la posible solución de un problema con base en las condiciones que plantea el enunciado del problema.

**Justificación:**

La propuesta metodológica para resolver problemas que se modelan mediante ecuaciones lineales con una incógnita busca proponer una serie de pasos que permita garantizar un abordaje correcto a lo que se plantea en cada problema y así lograr la solución correcta. Aspecto que, para los estudiantes, resulta ser beneficioso ya que sistematiza un proceso para analizar cada etapa del mismo mediante el cumplimiento de indicadores (instrucciones), evitando así un desvío involuntario en el razonamiento de los estudiantes producto de una gran cantidad de conocimientos adquiridos o la deficiencia de estos.

Por otro lado, para el docente, la propuesta establece una combinación de diferentes estrategias de enseñanza aprendizaje, donde se garantiza un constante análisis por el alumno, mientras el catedrático debe inducir y colaborar con que el análisis sea adecuado. La propuesta considera el uso de las NTIC's como medio para facilitar la comunicación e intercambio de información con los estudiantes, trabajo en equipo y sobre todo la formalización matemática de un enunciado, siendo esto último una base para la modelización.

De lo anterior se destaca el uso de la tecnología como mediadora para facilitar la información entre docentes y estudiantes. Pero puntualmente el enfoque

constructivista colaborativo, donde cada estudiante analiza el enunciado del problema, debate con su grupo lo que comprenden del mismo para ir cumpliendo con cada instrucción dada, siendo los principales actores de su aprendizaje. Lo que está en relación con el enfoque de educación superior y el modelo educativo de la UNAH, que plantea que el modelo educativo se fundamenta en un modelo constructivo, humanista crítico y reflexivo.

Es así como la propuesta busca disminuir la mala percepción y poca aceptación de los estudiantes a este tipo de problemas, haciendo notar que mediante un proceso bien estructurado se puede lograr la solución a cada problema y generar pautas para un correcto análisis con base en el método de Polya. Además potencia su conocimiento a la aplicación del mismo, mediante una formalidad para la generación de un modelo, dejando entrever la importancia de conceptualizar cada aspecto a considerar al momento de construir algún modelo matemático.

### **Fundamentación teórica**

En la educación matemática la resolución de problemas es una de las actividades fundamentales para el aprendizaje, pues conlleva poner en práctica conocimientos teóricos y la adaptación de estos a diferentes entornos. Por lo que “reconocer que resolver problemas es una actividad esencial en el desarrollo y aprendizaje de la matemáticas implica la necesidad de discutir las ideas principales alrededor de esta actividad” (Trigo, 2007: 12).

Estas ideas se concretizan en la educación mediante propuestas metodológicas que orienten y potencien los beneficios de la resolución de problemas para el aprendizaje de los estudiantes. En ese sentido diferentes autores plantearon modelos o métodos para resolver problemas, siendo uno de los principales el matemático húngaro George Polya (1945) que planteó un método heurístico para la resolución de problemas y en base a este otros matemáticos como ser Schoenfeld (1984), Gagné (1983), Mayer (1991), Montague (1988), Glass (1986), Stein (1984) propusieron otros métodos.

Polya (1945) construyó su método en cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva. La primera fase, radica en el análisis de la información que establece el enunciado del problema y la autoevaluación que la persona hace de su abordaje (Barroso & Rodríguez Ortiz, 2007: 260). De acuerdo a Boscan Mieles & Klever Montero (2012: 12), para Polya “entender un problema es apropiarse de él; concretarlo en tan pocas palabras que pueda ser reformulado de manera distinta sin modificar la idea.” Por lo que esta parte garantizaría un abordaje seguro a las siguientes fases del método.

La segunda fase, configurar un plan, es donde el estudiante determina una forma para abordar el problema, es aquí donde se inicia el proceso de construcción y producción de este. La tercera fase, es la ejecución de la planeación hecha en la etapa anterior, la cual debe ser cuidadosa y tener en cuenta que puede ser cíclica, en el sentido que si se encuentra un error se debe ir al inicio para reformular las ideas. Autores como Fuentes (2008: 49) consideran

que “hay que tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos y continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica”.

Por último la cuarta fase, que considera una mirada hacia el proceso realizado con el fin de analizar cada paso y garantizar que lo realizado es correcto. Tiene una gran importancia pues se confronta lo obtenido, realizado mediante el modelo del problema, con el contexto y su contraste con la realidad que se quería resolver.

Así los pasos planteados por Polya toma en cuenta la interpretación del enunciado, la planeación para el abordaje del problema, la ejecución del mismo y la revisión del proceso. Lo que es parte de la secuencia a considerar en la presente propuesta, enfatizando cada etapa y estableciendo indicadores según la recopilación de diferentes autores que permitan el cumplimiento de cada fase del método de Polya.

En la resolución de problemas se generan muchas dificultades, la mayoría relacionada con la traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico y la interpretación de lo que plantea el enunciado. En ese sentido se requiere plantear un proceso adecuado que ayude al individuo a poder descubrir la manera adecuada para determinar la solución. Muñoz y Ríos (2008: 3) exponen que *“las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes se agudizan en el tema de resolución de problemas cuando aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico”*. Aquí hay un proceso de construcción de una ecuación que debe reflejar fielmente lo que

establece el enunciado de cada problema. Por lo que se requiere de estrategias que logren cumplir con las fases que establece Polya en su método y lograr una construcción adecuada. Es así como la propuesta busca sistematizar el proceso para guiar al estudiante hacia un correcto abordaje de cada problema mediante conjeturas lógicas y análisis que ponen en práctica lo aprendido previamente.

### **Estrategias didácticas**

La propuesta considera como estrategias didácticas momentos de reflexión y análisis individuales y grupales, la verificación del análisis mediante preguntas orientadoras por parte del docente en cada momento, así como la evaluación y verificación de los logros a través de diferentes trabajos. Además la propuesta plantea alternar con actividades grupales e individuales para construir, reforzar y evaluar el aprendizaje del estudiante. En ese sentido se detalla a continuación cada actividad de acuerdo a la secuencia metodológica de la propuesta, destacando que el uso de un medio virtual para facilitar el contenido en tiempos bien definidos contribuye a enmarcar un proceso secuencial y sistemático, enfatizando en el aspecto puntual de la propuesta.

El modelo de Polya es la base del proceso secuencial de la propuesta, por lo que se describirán las actividades con base en las etapas que plantea Polya. Además para cada etapa se consideran asignaciones grupales e individuales, así como una retroalimentación de las etapas vistas anteriormente.

La evaluación de las actividades se realiza mediante el cumplimiento de los indicadores (instrucciones) en cada etapa, el resultado final y aspectos cualitativos dados por observaciones brindadas por el docente, con base en el no cumplimiento o error que se identifica en el proceder de los estudiantes al momento de desarrollar cada etapa.

### **Etapa 1: Comprensión del problema**

Para la primera actividad se comparte vía plataforma virtual las instrucciones y los problemas que se analizarán en forma grupal al día siguiente. Considerando dos problemas, uno de mezclas y otro de movimiento rectilíneo, ambos corresponden a la categoría de proporcionalidad compuesta, dada por Cifuentes y cols (2012). La elección de ellos fue dada por la dificultad que presentan para los estudiantes y la forma en que se trabaja en las sesiones grupales que establece la propuesta, pues al ser los primeros a analizar implicaría que durante todas las sesiones grupales se estarán abordando. Permitiendo así que tanto en las sesiones presenciales, como fuera de ellas, el estudiante pueda mejorar o verificar el análisis y lo desarrollado en cada problema.

#### Evaluación de actividades:

Para esta etapa los indicadores son: Representación pictográfica, identificación de incógnitas y explicación de lo que plantea el enunciado del problema. Se determinará el cumplimiento de estos y errores, en caso se encuentren errores identificar en que consistió el error.

### Actividad 1: Trabajo grupal

Tiempo: 50 minutos

Modalidad: Presencial en grupos de no más de 5 integrantes.

Descripción: La primera actividad grupal consiste en discutir en grupo dos problemas, los cuales previamente fueron compartidos por medio de la plataforma virtual del curso para que cada individuo los pudiera analizar por si solo y en la sesión presencial discutiera con su grupo su análisis y el de sus compañeros, llegaran a un consenso y presentaran la asignación. Durante el trabajo grupal el docente supervisa lo que discute y hace cada grupo, e interviene cuando el grupo lo solicite o cuando este considere pertinente. La intervención no considera indicar que algún análisis es incorrecto de forma explícita sino que mediante lo que expone cada miembro del grupo y ejemplos, o preguntas orientadoras hace que el grupo reflexione mejor lo que plantea y en caso haya un error, ellos puedan detectarlo mediante lo que discuten. Además la intervención del docente permite aclarar algún aspecto de la instrucción que los estudiantes no pudieran comprender.

### Trabajo en clase

**Instrucciones:** A continuación se presentan dos problemas, los cuales deberán discutir en grupo y presentar, en hojas aparte, un informe de lo realizado. Para ello lea detenidamente cada problema y efectúe lo siguiente:

- Explique con sus propias palabras lo que plantea el problema
- Identifique el o los datos que se quieren conocer.
- De ser posible represente el problema mediante un diagrama o dibujo.
- Identifique su incógnita y lo que representa.

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Bryan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo, de ida y vuelta, duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Bryan en su bicicleta?

### Asignación 1: Trabajo individual

Tiempo estimado: 60 minutos

Descripción: La asignación #1 está estructurada por cuatro problemas que cada estudiante deberá analizar con base en lo realizado en el trabajo grupal. En esta actividad el estudiante evaluará su aprendizaje, buscando cumplir con las indicaciones dadas y reflexionando acerca de si comprende o no lo que establece el enunciado. La misma deberá ser entregada al día siguiente. Son cuatro los problemas que deberán analizar donde de acuerdo a la categorización de problemas dada por Cifuentes y cols. (2012), el primero corresponde a la categoría de función de funciones, el segundo a la categoría de función simple, el tercero a la categoría de proporcionalidad compuesta y el cuarto a la de función afín.

## **Asignación #1: Trabajo individual**

**Instrucciones:** Lea detenidamente cada problema y realice lo siguiente:

- Explique con sus propias palabras lo que plantea el problema
  - Identifique el o los datos que se quieren conocer.
  - De ser posible represente el problema mediante un diagrama o dibujo.
  - Identifique su incógnita y lo que representa.
1. Una pareja desea cenar en un restaurante pero no quiere gastar más de L. 700. Si se agrega un impuesto de ventas de 12% a la cuenta más una propina de 10%, después de agregar el impuesto. ¿cuál es la cantidad máxima que pueden consumir?
  2. Un trabajador percibe L. 8,321 de salario después de restar deducciones las cuales corresponden a 21% del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?
  3. A un motociclista le toma 1 hora y media más en el día que en la noche viajar entre dos ciudades. En el día recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en la noche recorre un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.
  4. Un empresario está estableciendo un pequeño negocio de impresiones de carnet. En el cual tiene unos costos fijos de L. 7,105 mensuales por mantenimiento de equipo, tinta y energía eléctrica. Además por cada carnet gasta L. 9 en material de impresión. ¿Cuánto es la cantidad máxima de carnets a imprimir para que sus costos totales no sean más de L. 10,750?

### **Etapa 2 y 3: Formulación y ejecución de un plan**

La etapa 2 y 3 del método de Polya en la propuesta se considera abordarla en la misma sesión ya que la parte de ejecución de un plan conlleva a la resolución de una ecuación, conocimiento que es parte de los saberes previos a la propuesta. En esta sesión o fase de la propuesta es donde se busca inducir al estudiante a construir adecuadamente su modelo, analizando cada aspecto a

ejecutar. Por lo que las instrucciones se basan en buscar representar mediante lenguaje algebraico lo que plantea el enunciado, y hacerlo considerando una misma incógnita, esto mediante la relación que el enunciado establece de diferentes datos. Para culminar con resolver la ecuación, aspecto que genera muy pocos errores.

En esta fase se inicia con un trabajo grupal que, al igual que en la primera fase de la propuesta, se comparte lo que se va a realizar en clase un día antes para que cada estudiante pueda ir analizándolo de trabajando por si solo y en clase, con su grupo, consensuen el producto a entregar. Se presentan los mismos dos problemas de la clase anterior donde deberán cumplir con lo que establecen las instrucciones dadas y un tercer problema que corresponde a la categoría de función de funciones, en el cual deberán hacer lo que realizaron en la sesión anterior y lo que establece las instrucciones de la sesión actual. Además la asignación individual considera la misma metodología que lo desarrollado en clase, donde los estudiantes deberán trabajar con los cuatro problemas propuestos en asignación #1 para buscar cumplir con los indicadores de esta fase.

#### Evaluación de actividades:

Para esta etapa los indicadores son: Representación de datos en términos de la incógnita, establecer relaciones entre datos, construcción de la ecuación y resolución de la ecuación. Se evalúa el cumplimiento correcto de cada instrucción así como la revisión de las instrucciones de la sesión anterior. Se debe hacer observaciones en cuanto al proceder erróneo de los estudiantes en cada instrucción de acuerdo a lo que se plasma en el papel y lo que el docente observa

en los trabajos grupales. Se valora además la solución encontrada hasta este momento, si es correcta o no.

### Actividad 2: Trabajo grupal

Tiempo: 50 minutos

Modalidad: Presencial en grupos de no más 5 integrantes

Descripción: Se comparte mediante la plataforma virtual del curso lo que se va a realizar en la sesión presencial un día antes. El objetivo principal es construir una ecuación que modele adecuadamente lo que plantea el enunciado, para ello se trabaja con los dos problemas que abordaron en la sesión anterior y un tercer problema que deberán trabajarlo considerando la primera sesión y las instrucciones de la segunda sesión, es decir la etapa 1, 2 y 3 del método de Polya. Este último problema es propio de la categoría de función de funciones.

### Trabajo en clase

**Instrucciones:** Considerando lo elaborado en el trabajo grupal anterior, realice lo siguiente:

- Represente los datos por conocer en términos de la incógnita.
- Establezca relaciones entre los términos, mencione lo que representa cada expresión o término algebraico.
- Construya la ecuación que modela la situación planteada.
- Resuelva la ecuación.
- En el problema 3 realice los mismos aspectos que ya fueron hechos en los problemas 1 y 2 el día de ayer.

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg

menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Brayan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Brayan en su bicicleta?

**Problema 3:** Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?

### Asignación 2: Trabajo individual

Tiempo estimado: 60 minutos

Descripción: Considerando los cuatro problemas propuestos en la sesión anterior, donde los estudiantes debían cumplir con cuatro aspectos (indicadores) relacionados con la comprensión del problema se deberá buscar cumplir con las nuevas instrucciones dadas. Siguiendo así una secuencia para el abordaje de los problemas con base en el modelo de Polya. El trabajo individual lo deberán presentar al día siguiente de la sesión 2.

### Asignación #2: Trabajo individual

Instrucciones: Considerando lo elaborado en la Asignación #1, realice lo siguiente:

- Represente los datos por conocer en términos de la incógnita.
- Establezca relaciones entre los términos, es decir, lo que representa cada expresión algebraica en términos de la incógnita.
- Construya la ecuación que modela la situación planteada.
- Resuelva la ecuación.

#### Etapa 4: Visión retrospectiva

La etapa cuatro del método de Polya consiste en analizar lo hecho anteriormente y analizarlo de acuerdo a lo que plantea el enunciado y a la lógica empleada. En esta etapa entra en juego la verificación de parte del proceso donde el aspecto fundamental del mismo radica en el modelo (ecuación) construido. Para esta etapa se considera una sesión presencial para trabajar en grupo y una asignación que no solo consta de los problemas que se han venido trabajado en asignaciones previas, sino que se agregan cuatro problemas más con el fin de reforzar todo el proceso. Los aspectos a considerar en esta etapa de verificación de la solución son tres y van enfocados en la correcta construcción del modelo, el cumplimiento de las relaciones que se expone en el enunciado y de la solución encontrada.

#### Evaluación de actividades:

Para esta etapa los indicadores son: Justifica la construcción de la ecuación, comprueba la ecuación y verifica el cumplimiento de las relaciones. Se identifica el cumplimiento correcto de cada instrucción y se hacen observaciones de los errores. Además en caso identifican un error y se efectúa la corrección se evalúa el proceso corregido y la respuesta final. Se considera todas las instrucciones dadas anteriormente para evaluar el proceso mediante estas y no solo el resultado final.

### Actividad 3: Trabajo grupal

Tiempo: 50 minutos

Modalidad: Presencial en grupos de no más de 5 integrantes

Descripción: En esta sesión presencial se considera el análisis de las soluciones encontradas a los tres problemas trabajados anteriormente, y se añade un nuevo problema que corresponde a la familia de función afín, en el cual deberán aplicar todo el proceso discutido desde la sesión 1 hasta la sesión actual. Al igual que en las sesiones anteriores se comparte un día antes el trabajo por medio del medio virtual destinado para la clase y se en el aula los grupos se enfocan a discutir lo que plantea cada integrante para presentar la asignación. Es en esta etapa donde se deja entrever y se verifica el proceso, donde no es suficiente con que la solución satisfaga la ecuación planteada sino que es necesario justificar la construcción de la ecuación y verificar que se cumplan todas las relaciones que se establece en el enunciado de cada problema.

#### Trabajo en clase

Instrucciones: Considerando lo elaborado en los trabajos anteriores, realice lo siguiente

- Analice las respuestas obtenidas en los ejercicios anteriores y justifique la construcción de la ecuación, compruebe la solución dada en la ecuación y verifique que se cumplan las relaciones.
- En caso que identifique un error, muestre en que se equivocó y realice la corrección pertinente.
- Realice todo el proceso para resolver lo que se solicita en el problema 4 (Represente lo que se plantea mediante diagrama o dibujo, identifique datos desconocidos, reescriba el problema, represente en una variable los datos desconocidos, interprete lo que representa cada expresión

algebraica, construya la ecuación, resuelva la ecuación, analice la respuesta y justifique porque es adecuada)

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Brayan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Brayan en su bicicleta?

**Problema 3:** Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?

**Problema 4:** Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por \$2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de \$185 en la transacción completa. Encuentre el costo de cada automóvil.

### Asignación 3: Trabajo individual

Tiempo estimado: 90 minutos

Descripción: La asignación individual 3 es donde finaliza el abordaje completo de los cuatro problemas planteados desde la primera asignación, donde se debe realizar lo mismo que se desarrolló en clase para verificar la solución dada a cada problema. Además con el fin de poder reforzar y retroalimentar el proceso propuesto se añaden cuatro problemas más los cuales deberán ser abordados mediante la metodología planteada durante todas las sesiones grupales. Esta asignación se entregará dos días después de la sesión 3: Visión retrospectiva.

### **ASIGNACIÓN #3: Trabajo individual**

**Instrucciones:** Considerando lo elaborado en la asignación #2, realice lo siguiente

- Analice la respuesta obtenida en los ejercicios anteriores y justifique la construcción de la ecuación, compruebe la solución obtenida en la ecuación y verifique que se cumplan las relaciones.
- En caso de que identifique un error en la solución muestre en que se equivocó y realice la corrección pertinente.

En base a la metodología empleada en clase resuelva los siguientes problemas considerando lo siguiente: realice un diagrama o dibujo que represente su problema (si es posible), identifique la incógnita y represente en términos de la incógnita los datos. Construya la ecuación lineal correspondiente y determine lo que se le solicita en cada situación, justificando la construcción de la ecuación, comprobando la solución obtenida y el cumplimiento de las relaciones.

1. Un distribuidor de autos, en una barata de fin de año, reduce 15% la lista de precios de los modelos del año anterior. Si cierto modelo de cuatro puertas tiene un descuento de L. 160,000, ¿cuál era su precio de lista? ¿Cuánto se ahorra al comprar el modelo del año anterior?
2. El radiador de un automóvil contiene 10 cuartos de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y remplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?
3. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 millas por hora, o en una bicicleta a una velocidad de 12 millas por hora. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.
4. A un fabricante le cuesta \$2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60¢ por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90¢, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de \$1000.

**Cierre: clase magistral**

Tiempo: 50 minutos

Evaluación: Mediante preguntas abiertas o dirigidas, solicitud de ayuda en el proceso e identificación de errores planificados.

Descripción: Con el fin de mostrar a detalle el proceso desarrollado para buscar la solución de los problemas de aplicación el profesor realiza una clase magistral. Haciendo hincapié en cada etapa del proceso y permitiendo la interacción del estudiante con el fin de aclarar dudas surgidas durante el desarrollo de la última asignación. En esta sesión se refuerza mediante un ejemplo lo que se plantea en la propuesta para resolver problemas. La elección del problema se sugiere que sea de mezclas, ya que es en este tipo de problemas donde se genera mayor dificultad en los estudiantes.

Finalmente se cierra todo el proceso mediante una evaluación que permitirá cuantificar, de cierto modo, el aprendizaje obtenido por los estudiantes durante la propuesta. Si se quiere analizar la propuesta como tal se sugiere realizar una prueba diagnóstica para poder hacer comparaciones. En la evaluación se sugiere colocar un problema de cada tipo de acuerdo a la categorización de los problemas considerada en esta propuesta.

En resumen, el tiempo presencial (en clase) invertido para el desarrollo de la propuesta es 200 minutos y en caso de considerar hacer una prueba diagnóstica y la evaluación final son 310 minutos, el cual fue ajustado con base al programa de la asignatura de Matemática 1 (MM-110) de la UNAH-VS y los trabajos de autores como ser San José, et al. (2007), Boscan & Klever (2012), y Cifuentes, et. al. (2013).

Sesión	Actividad	Tiempo
1	Diagnóstico (Opcional)	50 minutos
2	Comprensión del problema	50 minutos
3	Elaboración y ejecución de un plan	50 minutos
4	Visión retrospectiva	50 minutos
5	Retroalimentación, clase magistral	50 minutos
6	Evaluación final (Opcional)	60 minutos

En caso se disponga de más tiempo se puede alargar el tiempo de los momentos presenciales de acuerdo al nivel educativo en que se aplique la propuesta. Además con el uso de la tecnología se recomienda elaborar la propuesta de manera que tenga un desarrollo totalmente virtual, con espacios para debates de problemas, y evaluaciones de cada parte del proceso lo cual ayudaría a disminuir los tiempos presenciales pero requiere de mayor control y cuidado en la elaboración de los materiales.

Para la evaluación de la prueba final se considera la respuesta y el cumplimiento del proceso, dando mayor importancia a la respuesta y siendo el cumplimiento aspecto para considerar una evaluación parcial del puntaje a cada ejercicio.

### **Consideraciones metodológicas**

El desarrollo de la propuesta toma como principal actor del aprendizaje al estudiante, el cual mediante las diferentes actividades y la guía del docente

refuerza y afirma el conocimiento. En ese sentido la metodología que se plantea en esta propuesta considera lo siguiente:

1. Docente: Es el encargado de guiar adecuadamente el desarrollo de lo que establece la propuesta y promover el análisis de cada parte del proceso en los estudiantes, motivar para que cada discente pueda ejecutar adecuadamente las instrucciones establecidas en cada actividad e intervenir para encausar las discusiones hacia la respuesta adecuada. Este brinda las consideraciones finales en cada etapa del proceso y afianza su utilidad para el estudiante.
2. Estudiante: Es el actor principal en la propuesta, pues es el encargado de construir su propio aprendizaje mediante la guía docente y el seguimiento de las instrucciones. Su rol radica en analizar, asimilar y ejecutar secuencialmente el proceso para lograr una solución adecuada a cada problema considerando el cumplimiento de la mayor parte de instrucciones dadas.
3. Tecnología: Es el medio por el cual se comparte la información en los tiempos estipulados, siendo así una facilitadora para el desarrollo de la propuesta.
4. Trabajos grupales: Permite el aprendizaje colaborativo donde se discute, se analiza y se llega a un consenso mediante las opiniones de cada miembro del equipo. Resulta ser ventajoso pues da mayor confianza a cada estudiante para lograr la meta establecida y refuerza las buenas relaciones.

5. Trabajos individuales: Son las asignaciones que permite que el estudiante sea evaluador de su aprendizaje, el cual con ayuda de su grupo y el docente puede aclarar inquietudes y así asimilar la que propone a propuesta para la construcción del modelo.
6. Modelización: La propuesta no solo se enfoca a buscar la solución, sino que restringe a que la misma sea encontrada en base a una ecuación (modelo) con una incógnita cuya solución sea lo necesario para brindar respuesta a lo que solicita el enunciado del problema. Es así como se considera una interpretación de cada término y expresión algebraica lograr una adecuada construcción de la ecuación.

## Bibliografía

- Alvarez de Zayas, Carlos. (2007). *La pedagogía como ciencia*. Monografía, Ciudad de la Habana.
- Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de problemas. En J. R. Loria (Ed.), *Seminario teórico, 1*, págs. 1-13. Costa Rica.
- Artigue, M. (Diciembre de 2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 5-28.
- Arya, J., & Lardner, R. (2009). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía* (Quinta ed.). México: Pearson Educación.
- Balderas, F. (1999). *Propuesta didáctica la aplicación de procedimientos heurísticos y situaciones problémicas en la resolución de problemas matemáticos I*. Maestría en la enseñanza de las Ciencias con especialidad en matemáticas. Universidad Autónoma de Nuevo Leon. Ciudad Universitaria.
- Barroso, J. J., & Rodriguez Ortiz, I. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 257-286*.
- Boscan Mielles, M. M., & Klever Montero, K. L. (JULIO-DICIEMBRE de 2012). METODOLOGIA BASADA EN EL METODO HEURISTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS. *ESCENARIOS, 10*(2), 7-19.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruíz, L. (Agosto de 2006). LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y EL PROBLEMA DE LA ARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR. UNA PROPUESTA DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 18*(002), 37-74.
- Canfux, V. (2000). *TENDENCIAS PEDAGÓGICAS EN LA REALIDAD EDUCATIVA ACTUAL*. Trija, Bolivia: Editorial Universitaria.
- Cárdenas, J. A. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria*.
- Cedeño Loor, F. O. (2017). *Importancia del método de resolución de problemas con ejemplo de la vida diaria en el aprendizaje de matemática en los estudiantes del nivel I de la Universidad Técnica de Manabí-Ecuador 2015*. Unidad de Posgrado. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- CEPES, C. d. (2000). *Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual*. (U. J. Saracho, Ed.) Tarija, Bolivia: Editorial Universitaria.

- Cerchiaro Ceballos, E., Paba Barbosa, C., & Sánchez Castellón, L. (Junio de 2011). Metacognición y comprensión lectora: una relación posible e intencional. *DUAZARY*, 8(1), 99-111.
- Cerezo, H. (2007). Corrientes pedagógicas contemporáneas. *Odiseo, revista electrónica de pedagogía*(7).
- Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *UNICIENCIA*, 28(2), 15-44.
- Cifuentes, A. P., Dimaté, L. E., Rincón, A. M., Velásquez, J. R., Villegas, M. P., & Flores, P. (2013). Ecuaciones lineales con una incógnita. En *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas* (págs. 85-152).
- Cifuentes, Á. P., Dimaté, L. E., Rincón, A. M., Velásquez, J. R., Villegas, M. P., & Flores, P. (2012). *Ecuaciones lineales con una incógnita*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Corral, R. (2000). *Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual*. Tarija: Editorial Universitaria.
- Cortés Méndez, M., & Galindo Patiño, N. (2007). *EL MODELO DE PÓLYA CENTRADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA INTERPRETACIÓN Y MANEJO DE LA INTEGRAL DEFINIDA*. BOGOTÁ: UNIVERSIDAD DE LA SALLE.
- Corvalán Vásquez, O. (2011). El Diseño Curricular para el Desarrollo de las Competencias: el eslabón perdido. *Revista Electrónica de Desarrollo de Competencias (REDEC)*, 2(2), 62-83.
- Dussel, I., & Quevedo, J. A. (2010). Educación y nuevas tecnologías: los desafíos pedagógicos ante el mundo digital. *VI Foro Latinoamericano de Educación*. Buenos Aires: Fundación Santillana.
- Fernández, M. L. (2013). *Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticos con un enfoque crítico*. Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.
- Godino, J. D. (2014). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad*. Bogotá.
- Gómez, G. G. (2014). *PROYECTO PROPUESTA DIDÁCTICA DE ENSEÑANZA EN EL AULA, ECUACIONES LINEALES-CUADRÁTICAS Y MODELOS*. BOGOTÁ, COLOMBIA: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.
- Guerrero, F. (2015). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. *Ciencias de la educación*, 26(42), 93-103.

- Guzman, M. D. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Popular.
- Hein, N., & Biembengut, M. S. (2006). *MODELAJE MATEMATICO COMO METODO DE INVESTIGACION EN CLASES DE MATEMATICAS*. Brasil.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION* (QUINTA ed.). MEXICO: Mc GRAW-HILL.
- Kraftchenko Beoto, O., & Hernandez Fernandez, H. (2000). *TENDENCIAS PEDAGOGICAS EN LA REALIDAD EDUCATIVA ACTUAL*. Tarija, Bolivia: Editorial Universitaria.
- Marte Espinal, R. (2018). Uso de las tecnologías en la educación. *Revista Atlante: Cuadernos de educación y desarrollo*. En línea.
- Martín, G. M., Martínez, R. M., Martín, M. M., Nieto, M. I., & Núñez, S. V. (2017). Acercamiento a las teorías de aprendizaje en la educación superior. *UNIANDES EPISTEME*, 4(1), 48-60.
- McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (Quinta ed.). Madrid: Pearson.
- MITE. (Octubre de 2014). *Monterey Institute*. Recuperado el 23 de Septiembre de 2015, de [https://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE\\_TEXT\\_RESOURCE/U06\\_L2\\_T2\\_text\\_final\\_es.html](https://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U06_L2_T2_text_final_es.html)
- Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M., & Perez, M. L. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. (Quinta ed.). Barcelona: Editorial Graó.
- Muñoz, M., & Rios, C. (2008). Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra. *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Colombia.
- Orrantía, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71).
- Peñalva Rosales, L., Ysunza Breña, M., & Fernández Ruvalcaba, M. (2008). LAS MATEMÁTICAS Y EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO LÓGICO. *CONGRESO EDUCATIVO INTERNACIONAL*, (pág. 17). México.
- Pochulu, M. D. (2005). ANALISIS Y CATEGORIZACION DE ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN ALUMNOS QUE INGRESAN A LA UNIVERSIDAD. (OEI, Ed.) *Revista Iberoamericana de Educacion*.
- Polya, G. (1989). *Cómo planter y resolver problemas*. México: Trillas.
- Ramirez Calderón, J. A. (27 de 08 de 2014). Autoridades de la UNAH interpelarán a 150 maestros por reprobación masiva de alumnos. *Presencia Universitaria*.

- Rodríguez, V. J. (2004). Evaluación de la metacognición y comprensión de la lectura. (U. C. Madrid, Ed.) *Fundación de neuropsicología clínica*.
- Rosa Fuentes, A., Corral, R., Alfonso, I., & Ojalvo, V. (2000). LA TECNOLOGIA EDUCATIVA. EL USO DE LAS NTIC EN LA EDUCACION. *Tendencias pedagógicas en la realidad educativa actual*, 19-42.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, C., & Solaz-Portolés, J. J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6(3), 538-561.
- Serrano González-Tejero, J. M., & Pons Parra, R. M. (Enero de 2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *REIDIE*, 13(1), 1-27.
- Serrano, M. P. (2006). *El uso de una plataforma virtual como recurso didáctico en la asignatura de filosofía*. Bellaterra, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Soler, E. (2006). *Constructivismo, innovación y enseñanza efectiva*. Equinoccio.
- Suárez, M. (2000). Las corrientes pedagógicas contemporáneas y sus implicaciones en las tareas del docente y en el desarrollo curricular. *Acción pedagógica*, 9, 42-51.
- Sullivan, M. (2005). *Precalculo* (cuarta ed.). Mexico: Pearson Educación.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2006). *ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALITICA* (Undecima ed.). Mexico: Thomson.
- Triana, I. M. (2003). *La resolución de problemas: un reto para la educación matemática contemporánea*. Dr. Israel Mazarío Triana.
- TRIGO, L. M. (2007). *LA RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS FUNDAMENTOS COGNITIVOS*. MEXICO: TRILLAS.
- UNAH. (ABRIL de 2009). REFORMA UNIVERSITARIA. *MODELO EDUCATIVO DE LA REFORMA UNIVERSITARIA(3)*. TEGUCIGALPA, HONDURAS.
- UNESCO. (2005). *UNESCO*. Recuperado el 13 de 03 de 2016, de <http://www.unesco.org/new/es/unesco/themes/education-for-sustainable-development/>
- UNESCO. (2006). ¿Por qué las matemáticas? *Congreso Internacional de Matemáticos*, (pág. 5). Madrid.
- Varela Nieto, M. P. (2002). *LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS: ASPECTOS DIDÁCTICOS Y COGNITIVOS*. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Winmates. (s.f.). *WINMATES*. Recuperado el 15 de SEPTIEMBRE de 2015, de <http://www.winmates.net/includes/polya1.php>

## **Anexos**

### **Anexo 1: Entrevista**

#### **Entrevista**

La entrevista, como técnica de recolección de datos, permite obtener las perspectivas del tema abordado por medio de una discusión dialogada con gente que ha tenido experiencia en ello.

En esta ocasión los entrevistados serán docentes de la UNAH-VS que brindan la clase de matemática I MM-110, con el objetivo de tener una visión de las dificultades que se presentan en los estudiantes al momento de resolver problemas.

#### **Guión de la entrevista**

##### **Datos generales:**

1. ¿Qué asignaturas ha impartido en su trayectoria docente?
2. ¿Cuántos años o periodos ha brindado la clase de matemática I (MM-110)?

##### **Preguntas a analizar**

3. En su experiencia como docente ¿Cuáles son las mayores dificultades que ha detectado en los estudiantes al momento de llevar el curso de Matemática I?
  - a) ¿A qué o a quién le atribuye estas dificultades?
  - b) ¿Cómo cree que podría mejorar esta situación?
  - c) ¿Qué plan de acción tomaría usted para disminuir estas dificultades?
4. En cuanto a la resolución de problemas ¿Qué tanta dificultad ha observado en sus estudiantes?
  - a) ¿A qué se deben estas dificultades?
  - b) ¿Cree que es necesario abordar la resolución de problemas en los estudiantes?  
¿Por qué?
  - c) ¿Cómo enseña o enseñaría a resolver problemas a los estudiantes?

## Anexo 2: Pretest

**Instrucciones:** Lea detenidamente cada problema, de ser posible, represente mediante un diagrama o dibujo lo que se le plantea, identifique la variable, construya la ecuación lineal correspondiente, determine lo que se le solicita en cada situación justificando la solución encontrada en base al problema. Seguidamente responda las preguntas que se plantean en relación a la prueba.

1. Juan compró un reloj a L. 2,300 con un descuento del 35%. Determine el precio original del reloj.
  2. Un comerciante ofrece 30% de descuento sobre el precio marcado de un artículo, y aun así obtiene una ganancia del 10%. Si al comerciante le cuesta L. 350 el artículo, ¿cuál debe ser el precio marcado?
  3. ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?
  4. Si la edad del padre es el triple de la de su hijo, la edad que tenía el padre hace cinco años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años ¿Cuál es la edad de ambos?
- 
- a) ¿Comprendió lo que se le planteaba en el enunciado de cada problema? (Responda sí o no)
  - b) ¿Cuántas veces leyó el enunciado de cada problema?
  - c) ¿Identificó los datos que se le proporcionaban? (Responda sí o no)
  - d) ¿Podría explicar el problema? (Responda sí o no)
  - e) ¿Analizó cada paso en el proceso que realizó para resolver los problemas? (Responda sí o no)
  - f) ¿Revisó si los resultados son acordes a lo que se pedía en cada problema? (Responda sí o no)
  - g) ¿Cuál fue su mayor dificultad al tratar de resolver los problemas?
  - h) ¿Qué cree usted que requiere para resolver problemas de este tipo?

### Anexo 3: Pauta de pretest

1. Juan compró un reloj a L. 2,300 con un descuento del 35%. Determine el precio original del reloj.

①

Precio original del reloj - Descuento 35%  $\Rightarrow$  Pago L. 2,300

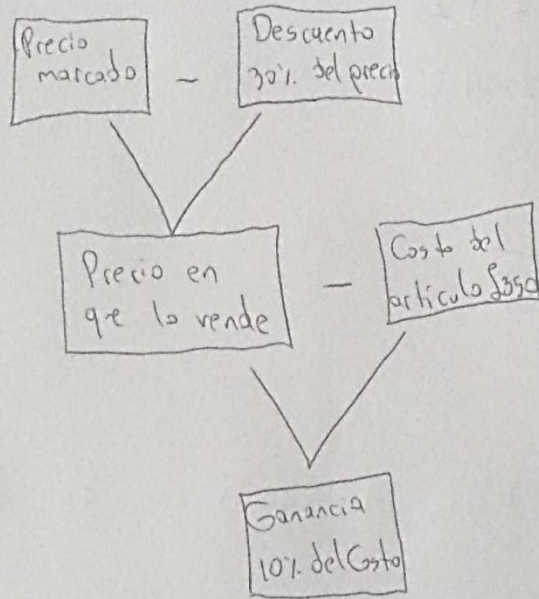
$X$ : Precio original del reloj  
 $0.35X$ : Descuento del 35% al precio original

$$X - 0.35X = 2,300$$
$$0.65X = 2,300$$
$$X = \frac{2,300}{0.65}$$
$$X = 3,538.46$$

R/ El precio original del reloj es L. 3,538.46 aproximadamente

2. Un comerciante ofrece 30% de descuento sobre el precio marcado de un artículo, y aún así obtiene una ganancia del 10%. Si al comerciante le cuesta L. 350 el artículo, ¿cuál debe ser el precio marcado?

2



$X$ : Precio marcado del artículo

$0.3x$ : Descuento del 30%

350: Costo del artículo

$0.1(350)$ : Ganancia

$$X - 0.3x - 350 = 0.1(350)$$

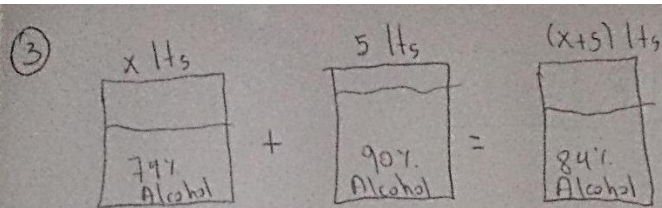
$$0.7x - 350 = 35$$

$$0.7x = 385$$

$$x = \frac{385}{0.7} = 550$$

R/El precio marcado debe ser \$550

3. ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se deben mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?



$x$ : Cantidad de litros del líquido con 74% de alcohol

$0.74x$ : Cantidad de alcohol en el primer líquido

5: Cantidad de litros del líquido con 90% de alcohol

$0.9(5)$ : Cantidad de alcohol en el segundo líquido

$x+5$ : Cantidad de litros en la mezcla total

$0.84(x+5)$ : Cantidad de alcohol en la mezcla total

$$0.74x + 0.9(5) = 0.84(x+5)$$

$$0.74x + 4.5 = 0.84x + 4.2$$

$$0.74x - 0.84x = 4.2 - 4.5$$

$$-0.1x = -0.3$$

$$x = \frac{-0.3}{-0.1}$$

$$x = 3$$

R/ Se deben mezclar 3 litros del líquido con 74% de alcohol

4. La edad del padre es el triple de la de su hijo, la edad que tenía el padre hace cinco años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años ¿Cuál es la edad de ambos?

(4)

Edad del  
Padre  
3 veces  
la del Hijo



Edad del  
Hijo

→ Edad actual

Hace 5 años

Dentro de 10 años

Edad del  
Padre  
2 veces  
edad Hijo  
en  
10 años



Edad del  
Hijo

→ Relación de  
edades

$X$ : Edad del Hijo

$X+10$ : Edad del Hijo dentro de 10 años

$3X$ : Edad del Padre

$(3X)-5$ : Edad del Padre hace 5 años

Ecuación: La edad del Padre hace cinco años era el doble de la edad del Hijo dentro de 10 años

$$2(x+10) = 3x - 5$$

$$2x + 20 = 3x - 5$$

$$2x - 3x = -5 - 20$$

$$-x = -25$$

$$x = 25$$

R/ La edad del Hijo es 25 años y la del Padre 75 años

## Anexo 4: Posttest

### Posttest

Instrucciones: Lea detenidamente cada problema, de ser posible, realice un diagrama o dibujo que represente su problema. Identifique la variable y represente en términos de la variable los datos, enmarcando lo que representa. Construya la ecuación lineal correspondiente y determine lo que se le solicita en cada situación, justificando su respuesta.

1. Un trabajador obtuvo 9% de aumento, lo cual representa L 1,800. ¿Cuál era su antiguo salario? ¿Cuál es su nuevo salario?
  2. El salario base de un trabajador es L. 100 por hora, pero recibe 50% más de esta cuota por cada hora que rebase las 40 horas por semana. Si el cheque de su semana es de L. 5,950. ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?
  3. En una compañía de vino se requiere producir 12,000 litros de jerez encabezando vino blanco, que tiene un contenido de alcohol de 12%, con brandy, el cual tiene un contenido de 36% por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol de 16%. Determine las cantidades de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado.
  4. En 5 años Bryan tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años; ¿cuántos años tiene?
- a) ¿Comprendió lo que se le planteaba en el enunciado de cada problema? (Responda sí o no)
  - b) ¿Cuántas veces leyó el enunciado de cada problema?
  - c) ¿Identificó los datos que se le proporcionaban? (Responda sí o no)
  - d) ¿Podría explicar el problema? (Responda sí o no)
  - e) ¿Analizó cada paso en el proceso que realizó para resolver los problemas? (Responda sí o no)
  - f) ¿Revisó si los resultados son acordes a lo que se pedía en cada problema? (Responda sí o no)
  - g) ¿Cuál fue su mayor dificultad al tratar de resolver los problemas?
  - h) ¿Qué cree usted que requiere para resolver problemas de este tipo?

## **Anexo 5: Propuesta**

La propuesta metodológica desarrollada va encaminada a lo establecido por Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas y Flores (2013) , donde mencionan que.

El trabajo con las ecuaciones lineales de primer grado contribuye al desarrollo de las competencias, pues el estudiante (a) desarrolla pensamiento matemático en la medida en que traduce desde el lenguaje natural al simbólico y formal; (b) maneja expresiones que contienen fórmulas y símbolos; (c) utiliza los diferentes tipos de representación de las ecuaciones de primer grado y las relaciona de acuerdo con el propósito; (d) decodifica e interpreta el lenguaje simbólico —debe traducir la realidad a una estructura matemática mediante un modelo matemático—; y (e) puede analizar, reflexionar y criticar un modelo y sus resultados. La competencia que tiene mayor relevancia para nuestro trabajo es utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones.

Además la propuesta se basa en estrategias metacognitivas, pues pretende analizar y a su vez desarrollar los conocimientos de los estudiantes en base a lo que se sabe acerca de las cosas (conocimiento declarativo), se sabe sobre cómo hacer las cosas (conocimiento procedimental) y el conocimiento del por qué y cuándo de los aspectos (conocimiento condicional). (Rodríguez, 2004)

Dicha propuesta se realiza en 4 días diferentes, en los cuales se toma 50 minutos por día para trabajar la propuesta de forma presencial y grupal, y se asignan dos horas para que los estudiantes trabajen en sus casas como asignaciones y presenten un trabajo individual de manera virtual por medio de la plataforma destinada para la clase.

### **Día 1:**

Tiempo presencial: 50 min

Tiempo no presencial: 2 horas

Desarrollo:

Para el primer día se habla las generalidades de la resolución de problemas y la metodología a emplear, enfatizando en el trabajo de George Polya y sus cuatro fases. Se presentan problemas con el fin de identificar la variable, reformular el problema y generar un diagrama, esto para indagar en la comprensión y realizar mejoras a la misma. Como actividad se deja una serie de problemas a presentar en los cuales considerarán lo hecho en clase.

Actividad	Tiempo
Generalidades de resolución de problemas Explicación de metodología a desarrollar Formación de grupos	10 min
Presentación de problema a analizar Instructivo de la actividad (Reformular el problema, identificación de los datos a conocer, identificación de la variable) Guía de dos problemas para cada grupo	5 min.
Tiempo para que cada grupo analice los problemas	25 min
Discusión de lo realizado	10 min

#### Guía #1: Comprensión del problema (trabajo grupal)

Instrucciones: Lea detenidamente cada problema y realice lo siguiente:

- Reformule el problema de acuerdo a su comprensión.
- Identifique el o los datos que se quieren conocer.
- De ser posible represente el problema mediante un diagrama o dibujo.
- Identifique su variable y lo que representa.

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Bryan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo, de ida y vuelta, duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Bryan en su bicicleta?

#### Día 2:

Tiempo presencial: 50 min

Tiempo no presencial: 2 horas

Desarrollo:

Con los problemas planteados se ejecuta el plan. Construyendo la ecuación lineal que modela la situación planteada. Primeramente expresando en términos de la variable todo

lo relacionado al problema, considerando su representación. Para formular dicha ecuación y resolverla. La actividad en casa consiste en realizar lo mismo con los problemas que se dejaron anteriormente.

Actividad	Tiempo
Retroalimentación de lo realizado en el día 1	10 min
Instructivo de la actividad (Representar los datos por conocer en términos de la variable, establecer relaciones entre los términos, construir la ecuación) Guía de dos problemas para cada grupo	30 min
Discusión de lo realizado por los equipos	10 min

Guía #2: Elaboración y ejecución del plan (trabajo grupal)

**Instrucciones:** Considerando lo elaborado en el trabajo grupal anterior, realice lo siguiente:

- Represente los datos por conocer en términos de la incógnita.
- Establezca relaciones entre los términos, mencione lo que representa cada expresión o término algebraico.
- Construya la ecuación que modela la situación planteada.
- Resuelva la ecuación.
- En el problema 3 realice los mismos aspectos que ya fueron hechos en los problemas 1 y 2 el día de ayer.

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Brayan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Brayan en su bicicleta?

**Problema 3:** Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?

**Día 3:**

Tiempo presencial: 50 min

Tiempo no presencial: 2 horas

Desarrollo:

Se discuten las soluciones encontradas y se encamina la sesión a analizar si la solución va de acorde a lo que nos solicita, si es posible el valor que se obtiene. A su vez se identifica dónde está el error, si en la ecuación formulada o en la comprensión del problema que se les planteo. Se les asignan dos problemas más para que desarrollen los cuatro pasos y a su vez reflexionen las respuestas que encontraron en los problemas de las asignaciones anteriores.

Actividad	Tiempo
Retroalimentación de lo realizado en el día 2	5 min
Instructivo de la actividad (Analizar la solución encontrada)	15 min
Guía de dos problemas más para cada grupo	30 min

**Guía #3: Visión retrospectiva (trabajo grupal)**

Instrucciones: Considerando lo elaborado en los trabajos anteriores, realice lo siguiente

- Analice las respuestas obtenidas en los ejercicios anteriores y justifique la construcción de la ecuación, compruebe la solución dada en la ecuación y verifique que se cumplan las relaciones.
- En caso que identifique un error, muestre en que se equivocó y realice la corrección pertinente.
- Realice todo el proceso para resolver lo que se solicita en el problema 4 (Represente lo que se plantea mediante diagrama o dibujo, identifique datos desconocidos, reescriba el problema, represente en una variable los datos desconocidos, interprete lo que representa cada expresión algebraica, construya la ecuación, resuelva la ecuación, analice la respuesta y justifique porque es adecuada)

**Problema 1:** Un agricultor mezcló un fertilizante un fertilizante que contiene 25% de nitrógeno con otro de 55% para hacer un fertilizante con 35% de nitrógeno. Si hay 40 kg

menos del fertilizante de 55% que del de 25%, ¿cuántos kilogramos hay en la mezcla total?

**Problema 2:** Brayan viajó en rapidito desde su casa a una universidad que queda a 7.4 km de distancia y regresó en su bicicleta. El rapidito viajó al triple de la velocidad de la bicicleta y el viaje completo duró 41 min. ¿a qué velocidad viajó Brayan en su bicicleta?

**Problema 3:** Brithany tiene 5 años más que Kimberly, y la edad de Tiffany es un año más que el doble de la edad de Kimberly. Si la suma de las tres edades es 66 años, ¿Cuál es la edad de cada una?

**Problema 4:** Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por \$2900. Vendió uno con una ganancia de 10% y otro con una pérdida de 5%, y aún obtuvo una ganancia de \$185 en la transacción completa. Encuentre el costo de cada automóvil.

#### **Día 4: Retroalimentación**

Desarrollo:

Se discute lo realizado en todo el proceso de desarrollo de la propuesta y se expone, mediante clase magistral, un ejemplo de resolución de ejercicio en base a la metodología planteada. En esta etapa se resaltan los errores y aciertos que se observaron con el fin de generar una mejora en el estudiante.

Se abordan preguntas grupales y se resuelve el ejercicio mediante un error para mostrar la importancia de una buena justificación (visión retrospectiva).

#### **Día 5:**

Tiempo presencial: 60 min.

Se efectúa una prueba (Postest) para recolectar los datos, la cual consta de 4 problemas que desarrollarán en una hora e identificarán cada paso propuesto.

## Anexo 6: Asignaciones

### Asignación #1

Instrucciones: Lea detenidamente cada problema y realice lo siguiente:

- Explique con sus propias palabras lo que plantea el problema
  - Identifique el o los datos que se quieren conocer.
  - De ser posible represente el problema mediante un diagrama o dibujo.
  - Identifique su incógnita y lo que representa.
1. Una pareja desea cenar en un restaurante pero no quiere gastar más de L. 700. Si se agrega un impuesto de ventas de 12% a la cuenta más una propina de 10%, después de agregar el impuesto. ¿cuál es la cantidad máxima que pueden consumir?
  2. Un trabajador percibe L. 8,321 de salario después de restar deducciones las cuales corresponden a 21% del sueldo bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?
  3. A un motociclista le toma 1 hora y media más en el día que en la noche viajar entre dos ciudades. En el día recorre un promedio de 40 millas por hora mientras que en la noche recorre un promedio de 55 millas por hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.
  4. Un empresario está estableciendo un pequeño negocio de impresiones de carnet. En el cual tiene unos costos fijos de L. 7,105 mensuales por mantenimiento de equipo, tinta y energía eléctrica. Además por cada carnet gasta L. 9 en material de impresión. ¿Cuánto es la cantidad máxima de carnets a imprimir para que sus costos totales no sean más de L. 10,750?

### Asignación #2

Instrucciones: Considerando lo elaborado en la guía #1, realice lo siguiente:

- Represente los datos por conocer en términos de la incógnita.
- Establezca relaciones entre los términos, es decir, lo que representa cada expresión algebraica en términos de la incógnita.

- Construya la ecuación que modela la situación planteada.
- Resuelva la ecuación.

### ASIGNACIÓN #3

Instrucciones: Considerando lo elaborado en la asignación #2, realice lo siguiente

- Analice la respuesta obtenida en los ejercicios anteriores y justifique la construcción de la ecuación, compruebe la solución obtenida en la ecuación y verifique que se cumplan las relaciones.
- En caso de que identifique un error en la solución muestre en que se equivocó y realice la corrección pertinente.

En base a la metodología empleada en clase resuelva los siguientes problemas considerando lo siguiente: realice un diagrama o dibujo que represente su problema (si es posible), identifique la variable y represente en términos de la variable los datos. Construya la ecuación lineal correspondiente y determine lo que se le solicita en cada situación, justificando su respuesta.

1. Un distribuidor de autos, en una barata de fin de año, reduce 15% la lista de precios de los modelos del año anterior. Si cierto modelo de cuatro puertas tiene un descuento de L. 160,000, ¿cuál era su precio de lista? ¿Cuánto se ahorra al comprar el modelo del año anterior?
2. El radiador de un automóvil contiene 10 cuartos de una mezcla de agua y 20% de anticongelante. ¿Qué cantidad de esta mezcla debe vaciarse y remplazarse por anticongelante puro para obtener una mezcla de 50% en el radiador?
3. Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 millas por hora, o en una bicicleta a una velocidad de 12 millas por hora. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.
4. A un fabricante le cuesta \$2000 comprar las herramientas para la manufactura de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de 60¢ por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en 90¢, encuentre cuántos artículos debe producir y vender para obtener una ganancia de \$1000.

## Anexo 7: Campus virtual

Curso: 1500-MATEMATICA

https://campusvirtual.unah.edu.hn/course/view.php?id=6475

Área personal / Mis cursos / RESPALDOS / I PAC 2017 / Facultad de Ciencias / MATEMATICAS I-2017 / MM110-1500-1-2017-122838

### Unidad III

**Ecuaciones**

Trabajos y Tareas

Trabajo de aplicaciones ←

Notas Unidad III

MM110-1500-1-2017-12

Es seguro | https://campusvirtual.unah.edu.hn/mod/folder/view.php?id=205205

Área personal / Mis cursos / RESPALDOS / I PAC 2017 / Facultad de Ciencias / MATEMATICAS I-2017 / MM110-1500-1-2017-122838 / Unidad III / Trabajo de aplicaciones

## 1500-MATEMATICA I (MM110-1500-1-2017-122838)

### Trabajo de aplicaciones

En esta carpeta encontrarán las presentaciones, trabajos en clase y trabajos individuales en torno a la temática de aplicaciones de ecuaciones lineales con una incógnita.

- Presentación #1.pdf
- Presentación #2.pdf
- Presentación #3.pdf
- Trabajo individual 1.pdf
- Trabajo individual 2.pdf
- Trabajo individual 3.pdf

Editar

## Anexo 8: Instrumentos para evaluación de la propuesta

### Docentes

A continuación se presenta una serie de aspectos con el fin que, de acuerdo a la propuesta planteada y su experiencia docente determine lo adecuado de cada uno de ellos para el abordaje metodológico del tema.

Marque con una x la casilla que considera para cada aspecto

	Aspecto	Muy adecuado	Adecuado	Poco adecuado	Inadecuado	Observación
1	Trabajo individual					
2	Trabajo grupal					
3	Prueba final					
4	Tiempo de la propuesta					
5	Etapa de comprensión del problema					
6	Etapa de formulación y ejecución del plan					
7	Etapa de visión retrospectiva					
8	Instrucciones dadas					
9	Desarrollo de la propuesta					
10	Resultados obtenidos de la propuesta					

**¿Qué recomendaciones podría dar para mejorar la propuesta?**

## Estudiantes

La encuesta a estudiantes se realizó por medio de survey monkey (<https://es.surveymonkey.com/r/J8FBLC9>), cuyas interrogantes fueron las siguientes:

1. ¿Cómo se sintió en el trabajo realizado en clase con su grupo?

Muy satisfecho <input type="radio"/>	Satisfecho <input type="radio"/>	Poco satisfecho <input type="radio"/>	Insatisfecho <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	---------------------------------------

2. ¿Cómo se sintió con los trabajos individuales?

Muy satisfecho <input type="radio"/>	Satisfecho <input type="radio"/>	Poco satisfecho <input type="radio"/>	Insatisfecho <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	---------------------------------------

3. El abordaje de la fase de comprensión del problema es adecuado

Muy de acuerdo <input type="radio"/>	De acuerdo <input type="radio"/>	Poco de acuerdo <input type="radio"/>	En desacuerdo <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	--

4. El abordaje para la etapa de formulación y resolución de la ecuación (plan) es adecuado

Muy de acuerdo <input type="radio"/>	De acuerdo <input type="radio"/>	Poco de acuerdo <input type="radio"/>	En desacuerdo <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	--

5. El abordaje para revisión de la solución en relación con los diferentes problemas planteados es adecuado

Muy de acuerdo <input type="radio"/>	De acuerdo <input type="radio"/>	Poco de acuerdo <input type="radio"/>	En desacuerdo <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	--

6. ¿Cómo se siente con el aprendizaje adquirido mediante el proceso de trabajos grupales, individuales y prueba final?

Muy satisfecho <input type="radio"/>	Satisfecho <input type="radio"/>	Poco satisfecho <input type="radio"/>	Insatisfecho <input type="radio"/>
---	-------------------------------------	--	---------------------------------------

7. ¿Había trabajado con esta metodología en algún tema del área de matemática anteriormente Si/No

8. ¿Qué aspectos considera adecuados en la metodología efectuada?

Trabajo grupal <input type="radio"/>	Proceso para resolver problemas <input type="radio"/>
Análisis en clase <input type="radio"/>	Ejercicios propuestos <input type="radio"/>

Trabajo individual en base a instrucciones <input type="radio"/>	Tiempo destinado para la propuesta <input type="radio"/>
Otra: _____	

9. ¿Qué aspectos considera no adecuados durante el desarrollo de la propuesta?

Trabajo grupal <input type="radio"/>	Proceso para resolver problemas <input type="radio"/>
Análisis en clase <input type="radio"/>	Ejercicios propuestos <input type="radio"/>
Trabajo individual en base a instrucciones <input type="radio"/>	Tiempo destinado para la propuesta <input type="radio"/>
Otra: _____	

10. En base a los resultados obtenidos ¿cómo calificaría la propuesta?

Excelente <input type="radio"/>	Muy buena <input type="radio"/>	Buena <input type="radio"/>	Mala <input type="radio"/>
------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------	-------------------------------