Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

"Comprensión del concepto de función lineal: Un estudio desde una perspectiva variacional"

Tesista

Glenda Sabina Espinal Sauceda

Asesor de Tesis

Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C., noviembre, 2019

“Comprensión del concepto de función lineal: Un estudio desde una perspectiva variacional”

Universidad Pedagógica Nacional
Francisco Morazán
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado
Dirección de Postgrado
Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

"Comprensión del concepto de función lineal: Un estudio desde una perspectiva variacional"

Tesis para obtener el título de
Máster en Matemática Educativa

Tesista
Glenda Sabina Espinal Sauceda

Asesor de Tesis
Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C., noviembre, 2019

AUTORIDADES

Ph.D. **HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA**
Rector

M.Sc. **CELFA IDALISIS BUESO FLORENTINO**
Vicerrectora Académica

M.Sc. **NAHUM ALFREDO VALLADARES CARRANZA**
Vicerrector Administrativo

Ph.D. **ROSARIO BUEZO VELÁSQUEZ**
Vicerrectora de Investigación y Postgrado

M.Sc. **JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA**
Vicerrector del CUED

M.Sc. **BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA**
Secretario General

Ph.D. **ESTELA ROSINDA ÁLVAREZ MARTÍNEZ**
Directora de Postgrado

Tegucigalpa, M.D.C., noviembre, 2019

Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán como requisito para optar al grado académico de Máster en Matemática Educativa

Tegucigalpa M.D.C., noviembre 2019.

Grado académico, nombres y apellidos completos
Presidente(a) Examinador(a)/Tribunal

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a)

Glenda Sabina Espinal Sauceda
Tesista

Dedicatoria

Dedico este proyecto:

A Dios por ser mi asesor por excelencia, pues toda sabiduría procede de él.

A mi madre Petrona Sabina Sauceda Sauceda por su apoyo incondicional, sus oraciones, sus consejos, paciencia y dedicación.

A mis hermanos, primos, sobrinos y amigos por animarme y alentarme.

Agradecimiento

Especialmente, quiero expresar mi gratitud a Dios por darme la sabiduría y dirección para culminar con éxito una meta más.

A mi mamá, por creer siempre en mí, por brindarme su amor, ternura, atenciones y apoyo incondicional en cada etapa de mi vida.

A mis hermanos, primos, sobrinos y amigos por sus palabras de aliento y por estar siempre presentes.

A mis estudiantes por su colaboración al formar parte de este proyecto.

A mi Asesor Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia por su amistad y todo su apoyo, orientaciones y por compartir sus conocimientos, los que han hecho posible realizar con éxito este trabajo de investigación.

Índice General

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de gráficos

Introducción

La sociedad actual demanda continuamente mejoras en la educación, de ahí el interés de muchos países por lograr avances significativos en el desempeño de sus estudiantes y el que hayan surgido investigaciones y proyectos de los que se han obtenido importantes hallazgos que permiten hacer ajustes en sus sistemas educativos. Los progresos en cada área de estudio son cada vez más urgentes y, en especial, en el área de las matemáticas; dentro de esta área, el estudio del concepto de función ha sido de gran importancia e interés desde la época antigua, y aun hoy en día por su gran aplicabilidad en la vida cotidiana. Así, diversos autores como Hitt, Cantoral, Ruíz, entre otros, a lo largo de los años han centrado sus investigaciones en la enseñanza y aprendizaje de esta temática.

Aun cuando el estudio de funciones de manera formal, se inicia desde los primeros años de secundaria, investigaciones como las de Hitt (1998a, 2003); Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003); Zúniga (2009), Amaya y Medina (2013); Gómez, Hernández y Chaucanés (2015); Amaya, Pino y Medina (2016); Prada, Hernández y Ramírez (2016), muestran que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de este concepto. Razón por la cual se llega a obtener bajos rendimientos y limitaciones en estudios posteriores ligados a este concepto. Así, pues, el interés de esta investigación es ofrecer un abordaje alternativo para la construcción y comprensión del concepto de función, específicamente el de función lineal que inicia en noveno grado, según lo propuesto en el Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica (DCNB). Esta investigación pretende que a través del análisis de fenómenos que implican la variación y cambio se desarrolle el pensamiento variacional, y con el uso de este pensamiento y la articulación de los registros de representación semiótica se logre la comprensión del concepto de función lineal.

El desarrollo de este tipo de pensamiento lleva a los estudiantes a analizar, formular, probar, validar y argumentar, lo que le permite concebir los nuevos conocimientos de manera reflexiva. Se indagó sobre los procesos de comprensión, el empleo de estrategias, desarrollo de habilidades, dificultades emergentes y el uso de los diversos registros de la función como son el verbal, algebraico, tabular y gráfico empleados por los estudiantes de noveno grado del Instituto Lempira, municipio de Maraita, Francisco Morazán. Este estudio fue cualitativo de carácter descriptivo-interpretativo.

Además, cabe mencionar que esta investigación está en concordancia con la línea de investigación: Estudios Disciplinares de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) en el área de Ciencias Naturales y Tecnológicas. Esta línea busca impulsar la investigación, el desarrollo e innovación nacional. Además, es responsable tanto de dirigir como de promover el desarrollo científico en todos los campos disciplinares (UPNFM, 2017:14).

Para tener un panorama del desarrollo de este estudio, se ha estructurado de la manera siguiente: en el primer capítulo se enuncia el planteamiento del problema, objetivo general y los objetivos específicos, las preguntas de investigación y la justificación.

En el segundo capítulo se presenta el fundamento teórico que da soporte a esta investigación. Dentro de este marco se expone un breve recorrido del concepto de función a la luz de la historia, distinguiéndose tres momentos: época antigua, edad media y período moderno; algunas definiciones del concepto de función lineal; se presentan dos de las perspectivas en las que ha sido estudiado el pensamiento variacional y los registros de representación semiótica que incluye las tareas de tratamiento y conversión, todo ello, como elementos que se articulan para la comprensión del concepto de función lineal; además, se presenta las consideraciones teóricas del Enfoque

Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), el que se utilizó como una herramienta de análisis de las prácticas matemáticas realizadas.

En el tercer capítulo se presenta la metodología que se siguió para el desarrollo de esta investigación, como el enfoque, el tipo de estudio, el tipo de diseño, las categorías de análisis, la población y la muestra, las técnicas de recolección de datos, la descripción de la prueba diagnóstica, las secuencias didácticas, prueba final, así como las etapas en que se abordaron cada una de estas.

En el cuarto capítulo se muestra el análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica, las secuencias didácticas desarrolladas en el estudio y la prueba final. Este análisis se desarrolló en concordancia con el marco teórico presentado, los objetivos y preguntas de investigación y las consideraciones expuestas en el apartado metodológico.

Finalmente, en el quinto capítulo se detallan las conclusiones obtenidas del estudio realizado, además, de las recomendaciones dirigidas entre ellas a la comunidad de educadores en el área de matemáticas, Secretaría de Educación, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, programa de Postgrado en Matemática Educativa, entre otros.

Capítulo 1

Construcción del objeto de estudio

1.1 Planteamiento del problema

La educación juega un papel trascendental en el avance de cualquier sociedad. Así lo apunta Ban Ki-Moon en un informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2014), quien afirma que "La educación es un derecho fundamental y la base del progreso de cualquier país". Por ello, las mejoras en la calidad educativa son cada vez más urgentes y necesarias, principalmente en el área de las matemáticas en donde se han presentado a lo largo de los años grandes dificultades en su estudio. Como resultado de la preocupación por lograr avances significativos en sus sistemas educativos, organizaciones de distintos países a nivel mundial se han interesado en mejorar el rendimiento de sus estudiantes en esta área.

Con este fin han surgido estudios de los que se desprenden importantes hallazgos que permiten hacer ajustes que contribuyan al mejoramiento de la calidad educativa. Entre estos proyectos internacionales de evaluación de aprendizajes están: el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, (por sus siglas en inglés TIMSS), el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos, (por sus siglas en inglés PISA), el Primer, Segundo y Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo PERCE, SERCE y TERCE, respectivamente, en los que la UNESCO en sus informes regionales da a conocer los resultados del desempeño de los estudiantes en América Latina y el Caribe.

Particularmente, Honduras ha participado en el PERCE 1997 y TERCE 2013, de este último en el Informe Aportes para la Enseñanza de la Matemática publicado por la UNESCO, se muestran los porcentajes obtenidos por los estudiantes de cada país participante comparados con la media regional. La tabla 1 muestra el rendimiento obtenido por los estudiantes hondureños de tercer y sexto grado en dominios en matemáticas evaluado en el TERCE 2013.

Tabla 1: *Rendimiento en dominios en matemáticas de estudiantes hondureños de tercer y sexto grado del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo TERCE*

Dominios en matemática	**Porcentaje de estudiantes de Tercer grado que contestó correctamente**	**Lugar ocupado en comparación con la media regional (entre los 14 países participantes)**
Números	35%	Duodécimo lugar
Geometría	49%	Undécimo lugar
Medición	37%	Décimo lugar
Estadística	46%	Duodécimo lugar
Variación	55%	Undécimo lugar
Dominio en matemática	**Porcentaje de estudiantes de Sexto grado que contestó correctamente**	**Lugar ocupado en comparación con la media regional (entre los 14 países participantes)**
Números	31%	Décimo lugar
Geometría	36%	Undécimo lugar
Medición	35%	Duodécimo lugar
Estadística	34%	Decimotercer lugar
Variación	34%	Decimotercer lugar

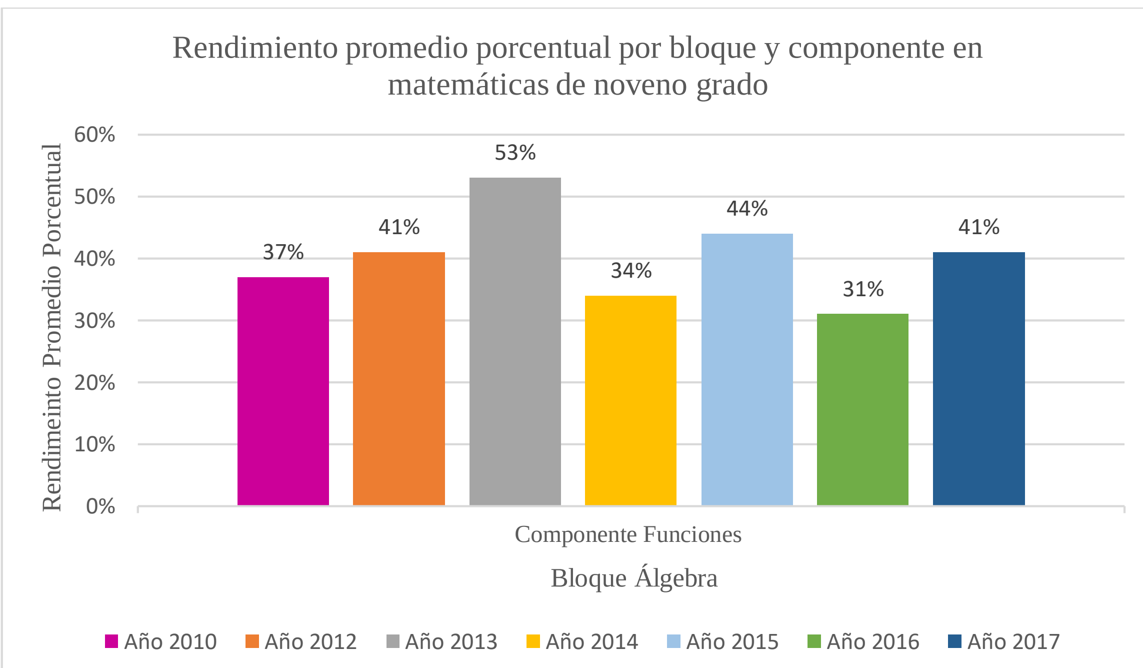
Elaboración propia
A partir de Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N. y Abarzúa, A. (2016).

En comparación con los porcentajes de la media regional entre los 14 países participantes, Honduras esta entre los países que alcanzaron los rendimientos más bajos

También participó en el TIMSS, 2011. El propósito de TIMSS es medir los logros de aprendizaje de los estudiantes al finalizar 4° y 8° Básico, sin embargo en Honduras fue aplicada a estudiantes de sexto y noveno grado. Según el informe Resultados TIMSS 2011, presentado por la Agencia de Calidad de la Educación del Gobierno de Chile, los puntajes promedios obtenidos fueron de 432 y 338 respectivamente, puntajes considerados estadísticamente más bajos que el centro de escala TIMSS (ACE, 2012: 32,40). Además, en uno de los últimos informes de rendimiento académico presentados por la Secretaría de Educación de Honduras (SE, 2016c) se destacan entre los resultados de los estudiantes de la muestra nacional del Tercer Ciclo en Matemáticas, que están en los niveles de aprendizaje de "Debe Mejorar" e "Insatisfactorio". Un 41% de los estudiantes de séptimo grado y un 40% de los estudiantes de noveno grado están en el nivel "Insatisfactorio" (SE, 2016c:28).

Respecto al rendimiento promedio porcentual, el Gráfico 1 muestra los porcentajes de rendimiento académico alcanzados por los estudiantes de noveno grado, particularmente en el bloque correspondiente a Álgebra, en el componente de funciones en los años de 2010 a 2017.

Gráfico 1: *Rendimiento promedio porcentual por bloque y componente en matemáticas de noveno grado*



Elaboración propia
Fuente: SE (2010-2017) Informes de rendimiento académico

Los datos reflejan que el rendimiento en esta componente es considerablemente bajo en cada año. En relación a lo anteriormente expuesto, cabe señalar que investigaciones como las de

Hitt (1998a); Hitt (2003); Zúniga (2009); Ospina (2013); Gómez et al. (2015), Carlson et al. (2003), Amaya y Medina (2013); Amaya et al. (2016), Prada et al. (2016), muestran las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión del concepto de función, entre las que mencionan: dificultades de interpretación, conversión de un registro a otro, identificación y uso de los elementos de las funciones.

Ante el panorama de deficiencia en el rendimiento relativo al tema de función como se mostró en los planteamientos anteriores, resulta necesario preguntarse si las actividades matemáticas que se están implementando promueven la comprensión de los conceptos matemáticos en estudio. Sobre la base de las consideraciones anteriores, y de acuerdo con algunos autores, quienes refieren que en el estudio de funciones se propicia el análisis de variación y cambio que se dan en las variables involucradas en el comportamiento de fenómenos de la vida cotidiana (Caballero y Cantoral, 2013b:1199), además Cabrera (2009) señala que trabajos desarrollados bajo la línea del pensamiento y lenguaje variacional "muestran la factibilidad de abordar el estudio de la variación y el desarrollo de las estrategias variacionales, como medios adecuados y favorecedores para la construcción y apropiación de conceptos matemáticos tales como las funciones" (Cabrera, 2009:43) en este sentido, se puede afirmar que; desarrollar un pensamiento variacional en los estudiantes representa una manera de favorecer la comprensión del concepto de función.

De modo similar, otros autores mencionan que "el pensamiento variacional es la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas" (Castiblanco y Moreno, 2004:17). De acuerdo con estos autores, el pensamiento variacional aplicado al estudio de las funciones permite que el estudiante haga uso del análisis y el pensamiento crítico para entender y explicar fenómenos de cambio. En este orden de ideas, otros autores sugieren que:

> Un acercamiento variacional al estudio de la función de primer grado, que pretenda identificar a la razón constante entre los cambios de la variable dependiente con respecto a los cambios de la variable independiente como la característica principal de estas funciones, y que busque poner al estudiante en actividad matemática a partir de las numerosas situaciones que se presentan en la vida cotidiana y en las ciencias, puede favorecer la comprensión, la construcción de conocimiento matemático funcional y el desarrollo del pensamiento (Vrancken, Engler, Leyendecker y Müller , 2017 :126).

En efecto, situar al estudiante en escenarios donde se hace uso del razonamiento y el análisis permite que este alcance un aprendizaje reflexivo. En consecuencia, se sugiere que “el estudio del pensamiento variacional en la escuela debe surgir a partir de tareas sobre la noción de cambio, variación y procesos de modelación, buscando desarrollos por comprensión y no como un estudio formal de conceptos” (Ospina, 2013:119). Por consiguiente, es oportuno reflexionar sobre las formas de como propiciar en el aula conocimiento significativo para los estudiantes en lo que respecta al estudio de funciones. Sobre el asunto, se añade la opinión de otros autores:

> Resulta fundamental la identificación de variables, el entendimiento de cómo se cuantifican y cómo se dan las relaciones entre ellas, de cómo cambian y se relacionan también sus cambios, así como de sus variaciones y significados de éstas en la situación. (…) la escuela debe proveer de conocimientos funcionales, esto es, de herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático. (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014b:22)

Por lo tanto, según la bibliografía revisada, la presente investigación sugiere un abordaje alternativo, que pretende a través del análisis del cambio y la variación de diversas situaciones y la puesta en escenario del uso del pensamiento variacional, lograr la comprensión del concepto de función, particularmente el de función lineal. De manera que cabría preguntarse: ¿Cómo se logra la comprensión del concepto de función lineal desde el pensamiento variacional?

1.2 Objetivos

La investigación se realizó con estudiantes de noveno grado del Instituto Lempira, en la Jornada Nocturna, en la Aldea Lizapa, municipio de Maraita, departamento de Francisco Morazán.

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar los procesos de comprensión del concepto de función lineal en estudiantes de noveno grado a través del desarrollo del pensamiento variacional en situaciones de la vida cotidiana.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Explorar los conocimientos previos que tienen los estudiantes para el logro de la comprensión del concepto de función lineal.
2. Implementar secuencias didácticas orientadas a la comprensión del concepto de función lineal mediante el pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación.
3. Analizar el nivel de comprensión del concepto de función lineal, logrado mediante el desarrollo del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación.
4. Caracterizar el uso del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación para la comprensión del concepto de función lineal en los estudiantes de noveno grado.

1.3 Preguntas de Investigación

1. ¿Qué conocimientos previos tienen los estudiantes para el logro de la comprensión del concepto de función lineal?
2. ¿Qué tipo de secuencias didácticas promueven el desarrollo del pensamiento variacional y articulan los registros de representación semiótica para la comprensión del concepto de función lineal?
3. ¿Cuál es el nivel de comprensión del concepto de función lineal logrado mediante el desarrollo del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación?
4. ¿Qué elementos muestran los desarrollos estudiantiles respecto al uso del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación para la comprensión del concepto de función lineal?

1.4 Justificación

El estudio del concepto de función ha sido un tema de gran importancia a lo largo de la historia. Actualmente autores de diversos países como México, Colombia, Estados Unidos, Brasil, España, Argentina, entre otros, han centrado sus investigaciones sobre este concepto y cómo es comprendido. Se puede ver cómo este concepto interviene como una actividad inherente al diario vivir y aparece en múltiples situaciones de la vida cotidiana, así por ejemplo el salario de un obrero está en función de sus horas trabajadas, el consumo de gasolina de un carro que viaja a una velocidad constante, está en función de los kilómetros recorridos, el llenado de un recipiente con un líquido que fluye con un volumen constante, está en función del tiempo transcurrido. Por sus cuantiosas aplicaciones en la vida cotidiana, su estudio es un asunto de gran relevancia.

Díaz (2013) señala que, “en el aspecto curricular el concepto de función es como una hebra que atraviesa desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios, en donde con frecuencia se utiliza para modelar procesos físicos, químicos, sociales, y de ingeniería” (Díaz ,2013:14). A este respecto, en el contexto nacional, el estudio del concepto de función se inicia en noveno grado, aunque cabe señalar que el DCNB hace referencia a este concepto como ecuaciones lineales en dos variables, propuesta en sus tres formas: $y = mx + b,\ y - y_1 = m(x - x_1),\ ax + by = c$ (SE, 2003:437).

Sin embargo, aun cuando el concepto de función es visto desde la secundaria, investigaciones señalan las deficiencias que tienen los estudiantes en la comprensión de este concepto al ingresar a la universidad (Zúniga, 2009:14). Como consecuencia de los planteamientos expuestos, diversos autores señalan que al tener concepciones deficientes de conceptos como el de función, limitarán el desarrollo de nuevos conocimientos ligados a este. De este modo “una mala concepción de este concepto podría redundar en un bajo rendimiento en el aprendizaje del cálculo” (Gómez et al., 2015:278). Además, Hitt (2003) enfatiza que “la gran cantidad de tópicos que están íntimamente relacionados en cálculo, y el manejo pobre de algunos de sus subconceptos, obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del cálculo, como son, el concepto de función” (Hitt ,2003:1).

Atendiendo a las consideraciones anteriores, se estima pertinente el abordaje alternativo de esta temática. De modo que, con esta investigación, se pretende que a través del análisis de fenómenos que implican el cambio y variación se desarrolle el pensamiento variacional y que con el uso de este pensamiento los estudiantes logren construir y comprender el concepto de función lineal. A este respecto, el Comité Nacional de Profesores de Matemáticas (por sus siglas en inglés, NCTM) argumenta que “comprender el cambio es fundamental para comprender las funciones” (NCTM, 2003:42). Asimismo, Sierpinska (como se citó en Ruiz, 1994:93) señala que, para la comprensión de la noción de función, los estudiantes deberían ser capaces de identificar no solo aquello que cambia sino también cómo cambia. Dentro de este marco Vrancken et al. (2017) afirman que:

> Resulta necesario ampliar el análisis realizado en los niveles escolares previos, que permita a los estudiantes la comprensión de las funciones desde una perspectiva variacional, a fin de proporcionar una base significativa para el estudio del cálculo. De este modo podrán aplicar el conocimiento escolar a la resolución de problemas, esto es, un uso funcional del conocimiento matemático. (Vrancken et al., 2017:124)

En torno a los planteamientos anteriores, en el contexto internacional y de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en sus Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas MEN (2006) el pensamiento variacional "cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (MEN,2006:66). Además, en PISA (como se citó en Cabrera y Cantoral, 2010:862) se señala que los problemas deben ser cercanos a la realidad del estudiante, que puedan ser vividos o susceptibles de ser vividos por él. Esto contribuye a que los estudiantes conciban los nuevos conocimientos de manera significativa.

En la prueba de matemáticas TERCE 2013, que se muestra en el Informe Aportes para la Enseñanza de la Matemática publicado por la UNESCO en Flotts et al. (2016) se considera el dominio de la variación, que implica los siguientes aprendizajes:

- Identificación de variables y la interpretación de situaciones en las que se distinguen las mismas. Descripción de fenómenos de cambio y dependencia, que considera la resolución de problemas y la valoración de la pertinencia del proceso seguido.

- Noción de función, uso de conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad y a la variación inversa en contextos aritméticos y geométricos en la resolución de problemas.
- Uso pertinente de las diversas representaciones de relaciones matemáticas y sus variaciones. Justificación de procedimientos y validación de soluciones (Flotts et al., 2016:12).

Se puede observar como el pensamiento variacional juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento. En este sentido, ser matemáticamente competente se evidencia en el pensamiento lógico y matemático; el segundo incluye, entre otros, al pensamiento variacional (MEN, 2006). Coherente con lo anterior "el pensamiento variacional se orienta a desarrollar habilidades de orden superior (…) bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor" (Mendoza, 2016:18). Este autor también destaca que el pensamiento variacional es como un eslabón de articulación con los otros pensamientos matemáticos, de ahí la importancia de desarrollar este tipo de pensamiento.

Por otra parte, en el contexto nacional, en las Programaciones educativas nacionales en matemáticas para la educación media de Honduras (SE, 2011b) se proponen los Estándares que los estudiantes de noveno grado deben alcanzar, en particular referente al concepto de función lineal, entre los que se mencionan: identifican, interpretan y grafican funciones lineales, resuelven problemas de la vida cotidiana utilizando las funciones lineales. Y acerca de los contenidos conceptuales y actitudinales se mencionan: definición de función lineal, razón de cambio, gráfica de funciones lineales, pendiente, solucionan problemas de aplicación de la función lineal con datos experimentales (SE, 2011b:15).

En relación a lo planteado, se puede apreciar el papel que juegan los registros de representación de las funciones. A este respecto, se indica que

> La actividad de conectar las diferentes representaciones de un concepto, no es considerada por muchos profesores como tarea fundamental en la construcción del conocimiento matemático y, en lo particular, las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación al concepto de función (Hitt, 2003:2).

Debido a esto, es fundamental en la comprensión de un concepto matemático la coordinación entre los diferentes registros disponibles de dicho objeto (Duval, 2004b). Sin embargo, en el desarrollo de conceptos "generalmente tanto los estudiantes como algunos profesores se restringen a una manipulación algebraica relativa al concepto, que produce una limitación en su comprensión" (Hitt, 2003:2). En consecuencia, bajo estas ideas cabe agregar que:

> Sería deseable que el estudio de las funciones en la escuela se abordara desde todos los registros de representación de la función, proponiendo transformaciones entre tantos registros como sea posible y dentro del registro en que se esté trabajando. Por lo que se debería iniciar este tipo de trabajo en la escuela desde los grados inferiores hasta lograr la iniciación al cálculo, donde el uso de tales tratamientos y conversiones entre registros se vuelva cotidiano. (Amaya y Medina, 2013:136-137)

Lo expuesto, representa un motivo más para centrar el interés en proveer a los estudiantes de las herramientas con las que logren comprender el concepto de función lineal a través del análisis de situaciones de variación y cambio para desarrollar el pensamiento variacional y la articulación de los diversos registros de representación semiótica de la función como son el verbal, algebraico, tabular y gráfico.

Capítulo 2

Marco Teórico

Se presenta en este capítulo el fundamento teórico considerado para esta investigación. Así pues, se expone un breve recorrido histórico del concepto de función, distinguiéndose tres momentos: la época antigua, edad media y período moderno; algunas definiciones del concepto de función y función lineal. Acerca del pensamiento variacional se muestran dos de las perspectivas en las que ha sido estudiado y los registros de representación semiótica que incluyen las tareas de tratamiento y conversión, todo ello como elementos que se articulan para la comprensión de este concepto en estudio.

2.1 Un breve recorrido de concepto de función a la luz de la historia

Las definiciones de conceptos matemáticos que hoy conocemos han pasado por ciertas etapas a través de la historia. Refiriéndonos en particular al concepto de función, "es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años" (Ruiz, 1994:147). Acerca de los orígenes de este concepto se hace referencia a los trabajos de Ruiz (1994), Sastre Vázquez, Rey y Boubée (2008), Posada y Villa (2006), Castiblanco y Moreno (2004). Estos autores convergen en la postura de Youschkevitch quien distingue al menos tres períodos de la evolución del concepto de función: la época antigua, edad media y período moderno.

2.1.1 Época Antigua

La noción de función parece tener sus primeras manifestaciones con el desarrollo del concepto de número. Ya los cavernícolas habían dejado huellas de actividades que involucraban la noción de conteo. En virtud de que el conteo implica hacer una correspondencia entre un conjunto de objetos y a la vez de una secuencia de números para contar, se deduce que ellos habían desarrollado ciertas ideas que implicaban este concepto (Sastre et al., 2008:142). En ésta época se destacan aportaciones de los babilonios y los griegos. Refiriéndonos a los babilonios (2000 a.C- 600 a.C.) se han encontrado cientos de tablillas de arcilla que contienen información en la que se muestran indicios de la noción de función (Ruiz, 1994:149), este es el caso de las tablas numéricas babilónicas, en las que se mostraban:

> el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la de la suma de n términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos, o las que muestran la utilización de reglas de tres, simples y compuestas. (Sastre et al., 2008:142)

También la noción de función se encontraba reflejada en las tablillas astronómicas, pues estas contenían análisis de problemas de variación como la luminosidad de la luna en iguales intervalos de tiempo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol. (Sastre et al., 2008:143).

Otra civilización que se destaca en esta época es la griega. Ellos concebían las ideas de cambio y cantidad variable, así la noción de función existía en el pensamiento griego a través de las nociones de cambio y la relación entre las magnitudes variables. Sin embargo cabe mencionar que los filósofos de esa época consideraban estas ideas como externo a las matemáticas. Ellos concebían a los objetos matemáticos y las relaciones como estáticos y esa concepción fue la que impidió que se desarrollara el concepto de función (Ruiz, 1994:3). Por tal razón, aunque los griegos "trataron con problemas que tenían implícita la noción de función, no fueron capaces de reconocerla y, menos aún, de simbolizarla" (Sastre et al., 2008:143).

Sin embargo, en esta época la noción de función no fue concebida de manera clara ya que según René de Cotret (como se citó en Ruiz, 1994:152) las nociones que tuvieron una mayor influencia negativa en la evolución del concepto de función emergieron en la matemática desde el tiempo de Pitágoras y fueron la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la fuerte disociación existente, en el pensamiento griego, entre número y magnitud. Así pues, en la época antigua "aunque se llevan a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo, no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función" (Ruiz, 1994:149).

2.1.2 La edad Media

En esta época se destacan los árabes, sin embargo, no hay indicios que reflejen que los árabes tuviesen un avance sobre el concepto de función. Durante la Edad Media se estudiaron diversos fenómenos naturales sujetos al cambio como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Para ese período, la evolución de la noción de función estuvo vinculada al estudio del cambio, particularmente del movimiento. Una función se definía, ya sea por una descripción verbal, o mediante un gráfico, pero aún no se hacía uso de fórmulas.

Nicolás Oresme (1323 - 1382), inicia el estudio del cambio con el uso de la representación gráfico-geométrica como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas; él trataba de explicar mediante los gráficos, la naturaleza cualitativa y cuantitativa de los cambios, pues él consideraba el cambio físico con figuras geométricas y en una de sus obras llamada Tractatus de latitudinibus formarum, las funciones aparecen dibujadas por primera vez. En la obra se hace referencia como longitud y latitud a lo que hoy conocemos como abscisa y ordenada (Castiblanco y Moreno, 2004; Sastre et al., 2008).

2.1.3 El Período Moderno

En este período se destacan aportes como los de Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibniz, Dalambert, Euler, Bernoulli, Fourier, Dirichlet, Cantor, Hilbert entre otros. Acerca de Galileo (1564 -1642) se menciona que él incorporó lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, además incorporó el lenguaje de la Teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional. Galileo mostró que estaba tratando con variables y funciones.

Sobre Descartes (1596 - 1650) se dice que buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al Álgebra por medio de la Geometría. Fue revolucionario al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. (…) Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica y el primero en aclarar que una ecuación en x e y es una manera de mostrar la dependencia entre cantidades variables, así los valores de una de esas variables pueden ser calculados a partir de los correspondientes valores en la otra variable. De esta manera Descartes mostró en sus trabajos de geometría que tenía claro los conceptos de variable y función (Sastre et al., 2008:145-146).

Destacables matemáticos como Newton y Leibniz contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto de función. Newton hizo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en ese período, llegando a convertirse en el método fundamental para el estudio de las funciones. Por otra parte, se señala que Leibniz fue el primer matemático en utilizar la palabra función en sus manuscritos en 1673. Para el siglo XIX con los trabajos de Jean Bernoulli, Leonard Euler, Lagrange, Fourirer y Dirichlet se consolida la noción de función como representación de procesos de variación y cambio. Bernoulli en 1718 presenta la primera definición del concepto de función como una expresión analítica, cuya notación no perduró y más tarde Euler presenta la notación de función como $f(x)$, notación que es usada hasta nuestros días (Castiblanco y Moreno, 2004:7). Fourier contribuyó a la evolución del concepto de función al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio (Sastre et al., 2008:149).

2.1.4 Definiciones del concepto de función

Según señala René de Cotret (como se citó en Ruiz, 1994:95) la evolución histórica de la noción del concepto de función muestra que la idea de variable dependiente es la base del concepto de función. Para comenzar la enseñanza de este concepto es importante conservar la idea de dependencia entre cantidades, lo que requiere a su vez de la noción de variable, así el concepto de dependencia permitiría a los estudiantes acceder a estas nociones de manera muy cercana de como estuvieron presentes en el origen histórico de este concepto. Sobre la relación de dependencia entre variables Zúniga (2009) describe esta relación así:

> En cada situación los cambios en la variable independiente provocan cambio en la variable dependiente, de tal forma que por cada valor de la variable independiente se obtiene (se puede calcular) solo un valor de la variable dependiente. Por esa razón afirmamos que la variable dependiente está en función de (depende) la variable independiente (Zuniga, 2009:33).

De manera que los dos tipos de variables involucradas en el concepto de función pueden definirse como:

- **Variable independiente:** aquella que asume valores y cambia de un valor a otro sin depender de la otra variable.

- **Variable dependiente:** es aquella que también cambia pero los cambios de un valor a otro dependen de los cambios que se producen en la otra variable (Zuniga, 2009:33).

En los trabajos de Hitt y Torres (como se citó en Planchart, 2002:30) se presentan diferentes definiciones de función las que se describen a continuación:

- **En términos de variables:** cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.
- **En término de conjunto de pares ordenados:** una función es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares tienen el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función.
- **En término de regla de correspondencia:** una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asignan a cada valor de x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única f(x) de B.

De las definiciones anteriores, Hitt (como se citó en Planchart 2002:31) expuso que es importante desarrollar la idea intuitiva de variación para la adquisición del concepto de función. Por esta razón, se considera que la definición en términos de variable independiente y dependiente resulta ser la más adecuada para el nivel medio. Esta definición a la que se refiere está vinculada a problemas de contexto real. Se señala que la definición en términos de correspondencia sería adecuada para ser utilizada en el nivel superior y la definición conjuntista sería más bien para estudiantes de la carrera de matemáticas.

De acuerdo con Planchart (2002) "es fundamental escoger la definición de función de acuerdo a los objetivos, niveles e intereses que tenga el estudiantes y lo que propongan los programas y los profesores en el estudio de la matemática en general" (Planchart, 2002:31). De manera que, según el interés de esta investigación el concepto de función que se utilizará será el referente al de función lineal, desarrollando la idea intuitiva de variación como lo sugiere Hitt (como se citó en Planchart 2002:31).

2.1.5 La enseñanza de la función lineal en la educación básica

En el contexto internacional, de acuerdo con NCTM (2003), la enseñanza de las funciones está propuesto dentro del estándar de álgebra, que indica que este estándar

> se centra en las relaciones entre cantidades -incluyendo las funciones-, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio (…) Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; analizar el cambio en contextos diversos (NCTM, 2003:39).

Entre las expectativas propuestas para la etapa 9-12 (esto es el High School) referidas a funciones se menciona que los estudiantes deberían generalizar patrones usando funciones; comprender relaciones y funciones utilizando varias formas de representarlas y pasar con flexibilidad de unas a otras; analizar funciones de una variable para investigar tasas de cambios, puntos de corte de los ejes; aproximar e interpretar tasas de cambio a partir de datos gráficos y numéricos (NCTM, 2003:300). Atendiendo a estas consideraciones, se señala que debido a que la noción de cambio generalmente no es comprendida a profundidad incluso por estudiantes universitarios, debería ser una tarea prioritaria desarrollar la noción de cambio desde los primeros niveles, lo que le permitirá a los estudiantes crear una base sólida para entender el cálculo (NCTM, 2003:42).

Particularmente, acerca de las funciones lineales se menciona que en el nivel 9 (noveno grado), los estudiantes "tendrán que representar funciones lineales con tablas, gráficas, reglas verbales y simbólicas y trabajar con estas representaciones e interpretarlas" (NCTM, 2003:301). Ahora bien, en el contexto nacional la enseñanza de la temática de funciones inicia en noveno grado, con la función de primer grado. Sin embargo, el DCNB no hace referencia al concepto de función de primer grado o función lineal como tal, sino como ecuaciones lineales en dos variables x y y.

Según lo propuesto en el DCNB, dentro de las expectativas de logro correspondientes a esta temática es que al finalizar noveno grado los alumnos reconocen ecuaciones lineales en dos variables en sus tres formas: $y = mx + b$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, $ax + by = c$, grafican ecuaciones lineales en dos variables en el sistema de coordenadas cartesianas (SE, 2003:437). Además, se hace referencia a los contenidos conceptuales y actitudinales, entre los que se indican sistema de coordenadas cartesianas, gráfica de ecuaciones lineales, geometría de la línea recta: Intersección con los ejes, pendiente, forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal $y = mx + b$, forma punto-pendiente de una ecuación lineal: $y - y_1 = m(x - x_1)$ (SE, 2003:468).

Asimismo, se destaca que la Guía del docente (libro proporcionado por la Secretaría de Educación de Honduras) indica que, aunque en el DCNB no se dice nada del concepto de función se ha considerado iniciar la unidad correspondiente a ecuaciones lineales en dos variables como una función lineal, ya que es indispensable considerar la expresión $ax + by = c$, como la relación entre dos variables x y y, cuando a y b son diferentes de 0. Así cuando a y b son diferentes de 0, la ecuación anterior se convierte en $y = mx + b$, $(m \neq 0)$ que representa una función de primer grado o lineal, es decir una función y de x cuyo grado en x es uno y donde a cada valor de x le corresponde un valor de y (SE, 2016b:44).

Ahora bien, dentro del bloque Álgebra en el componente de funciones, los estándares propuestos son:

- Interpretan los efectos del cambio de pendiente y de los interceptos de una función lineal.
- Determinan la ecuación de una recta (dados dos puntos, un punto y la pendiente, un punto y la ecuación de una recta paralela o perpendicular).
- Resuelven problemas de la vida cotidiana usando las funciones lineales.
- Usan la calculadora y/o computadora para representar gráficamente funciones lineales.
- Identifican, interpretan y grafican funciones lineales.
- Determinan las variables dependientes e independientes en situaciones de la vida cotidiana (SE, 2011a:28-30).

Respecto a la función lineal y afín, el libro de texto facilitado por la Secretaría de Educación no hace distinción entre ambos conceptos, abordando esta noción de la siguiente manera: "y es una función de primer grado de x cuando el valor de y está definido por una expresión de primer grado de x. $\boldsymbol{y = ax + b}$" (SE, 2016b:35). En ese mismo sentido y de acuerdo a las consideraciones propuestas por Posada y Villa (2006), quienes sostienen que "es importante explorar la idea de que la función lineal desde un punto de vista variacional no requiere de la diferenciación entre lineales y afines como objetos matemáticos diferentes; ya que estas son variacionalmente equivalentes" (Posada y Villa, 2006:179). Así pues, de acuerdo con estos autores "es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional" (Posada y Villa: 2006:93).

De modo que, atendiendo a las consideraciones anteriores, según estos autores, se permitirá "unificar la noción de función lineal y afín y concebir a la función lineal como un modelo matemático de un conjunto de situaciones con una misma característica (razón de cambio constante)" (Posada y Villa, 2006:93). Entendiendo la razón de cambio como un cociente de diferencias. Estos investigadores también proponen una interpretación de la función lineal, en la que destacan que, "se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante" (Posada y Villa, 2006: 96).

El estudio de las funciones inicia en noveno grado, con la función de primer grado. Sin embargo, cabe mencionar que la Secretaría de Educación en ejecución del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática PROMETAM Fase III mediante Acuerdo No. 0985-SE-2018 señala que

> Se revisó y analizó los programas curriculares en el área de Matemática desde el séptimo grado de la Educación básica hasta undécimo grado de la Educación Media, y como resultado de ello se obtuvo la adecuación de los elementos básicos del currículo como son: las expectativas de logro, las competencias, la metodología de enseñanza, los contenidos, las actividades, los recursos didácticos y la evaluación. (Acuerdo No. 0985, 2018:2)

En el marco de estas adecuaciones, el contenido que corresponde al estudio de la funciones de primer grado desarrollados en noveno grado se abordaran en octavo grado a partir del año 2020. (Acuerdo No. 0985, 2018:7,17)

2.1.6 Vinculación curricular de la función lineal en los libros de texto de Tercer Ciclo

Acerca de la relación de los contenidos que vinculan la temática de funciones propuesta en los libros de texto, en séptimo grado se aborda la lección de **Variables y expresiones**, la que incluye los siguientes contenidos: expresiones algebraicas, expresión de cantidades con variables, valor numérico; **Ecuaciones de primer grado en una variable** que incluye: igualdades numéricas, ecuaciones de primer grado, propiedades de la igualdad, solución de ecuaciones de primer grado, resolución de problemas con ecuaciones de primer grado; **Razones y proporciones** que incluye:

proporcionalidad directa, constante de proporcionalidad, resolver problemas utilizando la proporcionalidad directa, gráfica de proporcionalidad directa SE(2016a). Estos contenidos representan el enlace para el estudio de funciones propuesto en el libro de texto de noveno grado, como **ecuaciones de primer grado en dos variables** entre los que se incluyen los contenidos: función de primer grado, razón de cambio, sistema de coordenadas cartesianas, gráfica de una función de primer grado, gráfica de una función de primer grado utilizando la ordenada al origen y otros puntos, ecuación de la recta (SE, 2016b: 52,110).

2.2 Pensamiento Variacional

Las concepciones que tuvo el concepto de función desde sus inicios hace referencia a que "la idea más primitiva de función estaba contenida en las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables" (Ruiz, 1994:198). De ahí la importancia del estudio de la variación y el cambio. En ese orden de ideas, el pensamiento variacional es conceptualizado a través de distintas perspectivas, las que se detallan a continuación.

2.2.1 Perspectiva socioepistemológica

Investigadores de esta perspectiva como Cantoral, Reyes y Montiel (2014a), refieren que la socioepistemología tiene como aporte fundamental la construcción social del conocimiento matemático y las prácticas sociales como la base de este (Cantoral et al., 2014a: 98). Respecto a la noción de práctica social, esta es referida "como un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento" (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004:418). De modo similar, esta noción también "se refiere a la actividad del ser humano sobre el medio en el que se desenvuelve" (Camacho, 2006:133). Así pues, se considera la práctica social como normativa de la actividad humana, como las generadoras de conocimiento.

Además Cantoral (2004) señala que la socioespistemología o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, centra su interés en aquellas prácticas de naturaleza social que le den sentido y significado al saber matemático, dándose paso del conocimiento al saber (Cantoral, 2004:6). En este sentido, no basta solo transmitir un conocimiento, sino en otorgarle un significado y uso para que sea adquirido por el estudiante de manera reflexiva. Como resultado, hace que se despierte el interés en los estudiantes por el estudio de los objetos matemáticos al vincular ese estudio con su realidad, pues conciben que ese nuevo conocimiento les es útil.

De acuerdo con Cantoral y Farfán (1998:3) la perspectiva socioepistemológica es la base para la construcción de un programa de investigación en curso, al que le llaman el pensamiento y lenguaje variacional, que busca tender puentes entre la investigación y la realidad del aula. Estos autores señalan que se entenderá por pensamiento y el lenguaje variacional "como una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permita tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos" (Cantoral y Farfán, 1998:4). Esto permite que haya un espacio de reflexión y acción para mejorar las prácticas educativas. De allí pues, el docente se convierte en un investigador dentro del aula de clases, capaz de diseñar espacios que favorezcan la construcción de conocimientos que se convierten en aprendizajes significativos.

A este respecto, "propiciar el estudio de la variación representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados" (Caballero y Cantoral,2013a:1586). Esto es, propiciar situaciones de aprendizaje en los que se requiere ir más allá de solo llevar a cabo procesos memorísticos y algorítmicos. Estos autores también indican que pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar),

> se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación (…) por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios. (Caballero y Cantoral, 2013b:1197,1198)

Dentro de este marco, Caballero (2012) señala que "la idea base de esta línea es el estudio del cambio y variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo" (Caballero,2012:10).

Como se ha expuesto, el cambio y la variación juegan un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Ahora bien, sobre las nociones de cambio y variación, según lo señalan algunos autores,

> la noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. (Cantoral, Molina y Sánchez ,2005:464)

Siguiendo esta línea, en trabajos como los de Salinas (como se citó en Caballero y Cantoral, 2013b) y Caballero (2012) se propone una caracterización de los elementos que promueven el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional los cuales se describen a continuación.

2.2.2 Elementos del pensamiento y lenguaje variacional

Entre los elementos que propone Caballero (2012) están: las estrategias variacionales, argumentos variacionales y las situaciones variacionales. Entre estos tres elementos, Caballero afirma que son "las estrategias variacionales las generadoras del Pylvar, pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos” (Caballero, 2012:39). Dentro de estas estrategias variacionales están las propuestas por Salinas (como se citó en Caballero y Cantoral, 2013b:1199) la comparación, la seriación, la estimación y la predicción. Siguiendo el trabajo de estos autores, los elementos del pensamiento y lenguaje variacional se resumen y describen así:

Situación variacional (SV) es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio. No basta saber que algo está cambiando, es necesario conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, analizando cuánto y cómo cambia sus variables. Por otra parte, se considera que una situación no es variacional si se puede resolver empleando un proceso algorítmico que lleve a una respuesta sin la necesidad de analizar y cuantificar los cambios en las variables. Este tipo de situaciones se pueden presentar tanto en un escenario puramente matemático, como en un contexto relacionado con otros campos científicos o cotidianos.

Argumentos Variacionales (AV) son argumentos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación. De manera que “una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando” (Cantoral et al., 2005:464). Estos argumentos son los que permiten dar explicación a las SV expresando un entendimiento de los procesos de variación involucrados en dicha situación.

Estrategia Variacional (EV) consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una SV, y que permite la generación de los AV que dan explicación a la situación.

Como se había mencionado antes, dentro de estas estrategias Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) propone:

Comparación está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados. Algunos de los términos utilizados que caracterizan el uso de esta estrategia son: "es más alto que", "es más corto que", "está por encima de", "es más pequeño (grande) que", etc.

Seriación está relacionada con la Comparación, en el sentido que está asociado con la acción de analizar estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos. A diferencia de la estrategia de Comparación, la Seriación consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos. La seriación como estrategia variacional, puede ser usada para hallar una relación funcional dada una tabla de valores, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras.

Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos. Por ejemplo, dada una sucesión de números, se pregunta por el número que corresponde a una posición posterior, e incluso una anterior. A diferencia de la Seriación, la Predicción no busca encontrar en si una relación, sino que se postula un nuevo estado usualmente a mediano o largo plazo, siendo este estado local, en el sentido de que corresponde a un momento o valor determinado. No obstante, hallar esa relación mediante la estrategia de Seriación o Comparación puede ser una forma de encontrar ese nuevo estado, por lo que pueden llegar a ser parte de la Predicción.

Estimación es partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global, a diferencia de la Predicción en donde los estados propuestos son locales. Por ejemplo, en la práctica se usa la estimación en el análisis de las temperaturas y en el análisis del crecimiento de poblaciones, entre otras cosas, para saber si crecerán o disminuirán, en tanto que la Predicción puede servir para decir hasta qué punto crecerá, o saber algún valor específico de la temperatura o población dentro de algún tiempo.

2.2.3 Perspectiva propuesta por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

En Colombia, el estudio de procesos de variación está sugerido por los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas en el que se proponen cinco tipos de pensamientos: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. De este último el MEN (2006) señala que:

> Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006:66)

Dentro de este marco, otra referencia teórica dentro de esta perspectiva es la que presenta Vasco (2002) quien señala que el pensamiento variacional puede describirse como "una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen" (Vasco, 2002:63).

Acerca del razonamiento covariacional, este se puede definir como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003:124). En este sentido, es necesario plantear escenarios en donde los estudiantes puedan analizar este tipo de situaciones y puedan desarrollar la habilidad de razonar que cantidades varían, cómo y cuánto varía una cantidad en tanto que se analiza al mismo tiempo cómo y cuánto varía la otra.

Retomando los planteamientos de Vasco (2002), este señala que el pensamiento variacional implica la modelación, la que esquematiza en momentos, entre los que menciona:

- Momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece
- Momento de creación de un modelo mental
- Momento de echar a andar el modelo
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- Momento de revisión del modelo. (Vasco, 2002:64)

Por su parte, Posada y Villa (2006) consideraron en su trabajo de investigación, la modelación de fenómenos de variación y cambio para la consolidación de la noción de función, y respecto al concepto de función lineal, los autores destacan que desde la perspectiva variacional, la razón de cambio constante es una característica principal que permite determinar este concepto. Además, estos autores añaden que para enseñar este concepto a través de una perspectiva variacional se tienen que tomar en cuenta ciertos aspectos como:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio constante.
- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- La compresión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.

- La identificación de la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de variados fenómenos.
- La identificación de las características de la función lineal desde los diferentes registros de representación (Posada y Villa, 2006:173).

Autores como Posada y Obando (2006) proponen en una serie de Didáctica de las Matemáticas un esquema del desarrollo del pensamiento variacional que se ilustra en la figura 1

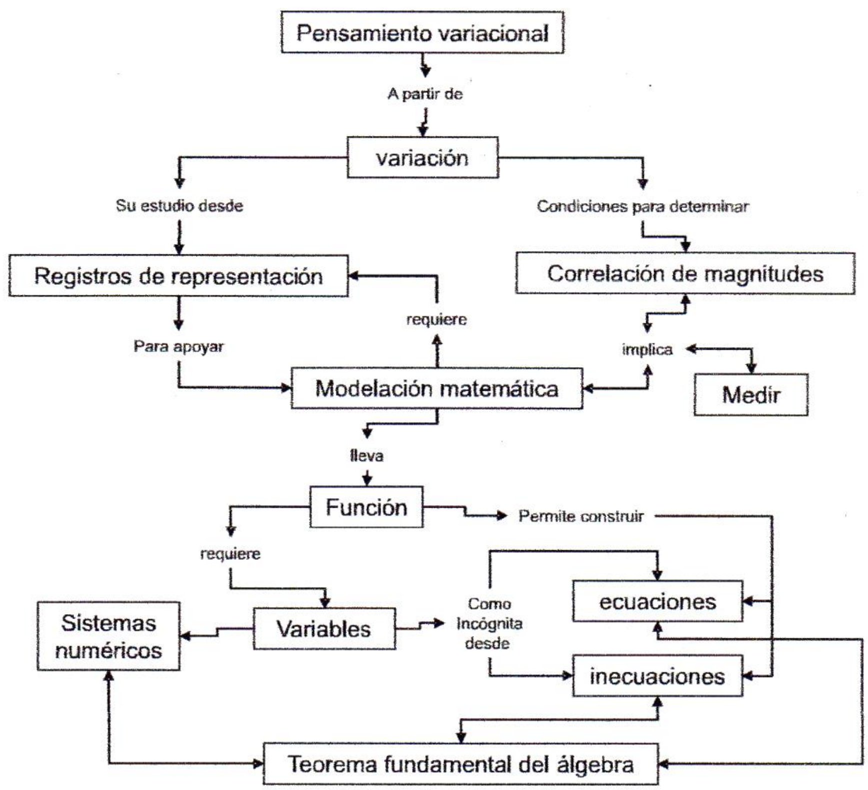


Figura 1: Propuesta de desarrollo del pensamiento variacional
Tomado de: Posada y Obando, 2006:18

Acerca del pensamiento variacional y la función, en el esquema propuesto por estos autores, se observa que el estudio de la variación marca el inicio para desarrollar el pensamiento variacional, ya que a partir de allí se determinan la correlación entre las magnitudes que intervienen en los fenómenos estudiados, lo que implica la modelación matemática, la que a su vez se apoya en el uso de registros de representación, los que además son requeridos en el estudio de la variación, todo ello articulado, permite el estudio de la función, la que requiere de variables (como incógnitas) y permiten la construcción de ecuaciones e inecuaciones.

2.3 Visualización

La visualización juega un papel imprescindible en el aprendizaje de las matemáticas. Según algunos autores, "se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido, se trata de un proceso mental demasiado útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico" (Cantoral y Montiel ,2001:14). Por su parte, Zimmermann & Cunningham (como se citó en Hitt, 1998b:29) mencionan que la visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento.

Además, cabe señalar que con el desarrollo de habilidades, como el de visualización en la resolución de problemas, se vincula el estudio de las representaciones de los objetos matemáticos (Hitt, 1998b:25). De ahí el papel fundamental de las representaciones semióticas, pues, "la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro (…) tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas" (Hitt, 1998b:23). Es decir, las representaciones intervienen como una manera de exteriorizar lo que se piensa y aprende.

2.4 Teoría de las representaciones semióticas

2.4.1 Noción de representación

Según Duval (2004b), la noción de representación es indispensable para el estudio de fenómenos relativos al conocimiento (Duval, 2004b:25). Del mismo modo, Piaget (como se citó en Duval, 2004b:25) recurrió a la noción de representación como “la evocación de los objetos ausentes”. Es decir, una representación es el medio que permite hacer visible aquellos objetos matemáticos que se desean construir. Sin embargo, cabe señalar que “lo que la representación hace presente del objeto no depende del objeto sino del sistema que produce la representación” (Duval, 2004a:45).

Por otra parte, el autor enfatiza en la importancia de distinguir un objeto de su representación, ya que sin esta distinción no se podría lograr la comprensión en matemáticas. Así, por ejemplo, los objetos matemáticos como los números, las funciones, las rectas no deben confundirse con sus representaciones, es decir, con las escrituras decimales o fraccionarias, símbolos, gráficos, ya que un objeto matemático puede verse a través de distintas representaciones.

> Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, solo cuando se cumplen dos condiciones: que se dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso… y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. (Duval, 2004b:31)

Además, este autor indica que cuando esas dos condiciones no se logran, la representación y el objeto representado se confunden, lo que impide el reconocimiento de dos representaciones distintas de un mismo objeto. De modo que se debe dar prioridad a las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica.

2.4.2 Representaciones semióticas

Las representaciones semióticas son el medio por el cual un individuo a través del uso de signos como un enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, entre otras, puede exteriorizar sus representaciones mentales con el fin de hacerlas visibles a otros. Las representaciones semióticas permiten tener una variedad de representaciones de un mismo objeto, y estas no solo son necesarias para fines de comunicación, sino que cumplen una función importante para el desarrollo de la actividad matemática misma (Duval, 2004b:14,15). Sobre el uso necesario que tienen las representaciones semióticas, Duval sostiene que "no hay otro medio de acceso a los objetos matemáticos que las representaciones semióticas" (Duval, 2004a:26). De manera similar, otro autor señala que "objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a esos objetos" (Hitt, 2001:168).

Dentro de este enfoque es de suma importancia que se consideren de manera prioritaria las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica. Esto es, pues, según este autor, de lo que trata esencialmente la actividad intelectual: en transformar representaciones semióticas en nuevas representaciones. La noción de representación semiótica reconoce la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro, descrito como cambio de forma o en palabras más precisas como el cambio de la forma en que un conocimiento está representado.

2.4.3 Transformaciones tipo tratamiento y conversión

Según Raymond Duval hay dos grandes tipos de transformación de una representación semiótica. En Duval (2004a) se distinguen dos tipos de transformaciones: los tratamientos y las conversiones.

Tratamiento: "Transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. Es una transformación estrictamente interna a un registro" (Duval, 2004a:44).

Conversión: Transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto en otro registro. “La conversión es pues una transformación externa relativa al registro de la representación de partida” (Duval, 2004b:46). Sin embargo, la representación del objeto en el registro de llegada no tendrá el mismo contenido que su representación en el registro de partida, esto dependerá de la naturaleza misma del registro en que el objeto es representado (Duval, 2004a:45).

De manera general, se le llama tratamiento a la transformación de una representación de un objeto cuando no hay un cambio de registro y si hay cambio de registro se le llama conversión. De lo planteado anteriormente, algunos autores interpretan que el “tratamiento se logra al decodificar la información de un registro y recodificarla en el mismo registro, mientras que en una conversión la información decodificada se recodifica en otro registro” (Amaya et al, 2016:117,118).

A continuación en la figura 2, se presenta un ejemplo para ilustrar estos dos tipos de transformaciones.

TRANSFORMACIÓN

De una representación semiótica en otra

Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad.

¿Qué edad tienen?

CONVERSIÓN

Cambiando el sistema semiótico (el registro) **usando sin cambiar los objetos indicados**

$x + (x + 3) = 23$

TRATAMIENTO

Manteniendo el mismo sistema semiótico

$x + (x + 3) = 23$

$2x + 3 = 23$

Figura 2: Ejemplo de transformación tipo tratamiento y tipo conversión
Tomado de: Duval, 2006:146

En el lado izquierdo, el ejemplo muestra que hubo un cambio de registro al hacer un tránsito del lenguaje verbal al leguaje algebraico. Es decir, se dio la transformación tipo conversión, y al lado derecho se muestra una secuencia de varias transformaciones tipo tratamiento porque se operó usando el mismo registro. Sobre el asunto, se destaca “que el cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación” (Duval, 2004b: 62). De ahí, que se debe enfatizar en ambas tareas tanto de tratamiento como de conversión, sin embargo, es a través de las tareas de conversión (el tránsito de una representación de un objeto en diferentes registros) con que podrá tener acceso a la compresión de los contenidos conceptuales.

De acuerdo a este autor, la conversión tiene dos características que constituyen operaciones cognitivas mucho más complejas que las trasformaciones de tipo tratamiento. Una de esas características es que la actividad de conversión está **orientada**, lo que significa que ha de precisarse cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada. La otra característica es que la conversión puede ser **congruente o no congruente.** Lo que significa que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en el otro. Debe señalarse que Duval explica que estos fenómenos de no congruencia son de tipo semiótico y no necesariamente de tipo conceptual, ya que la conversión puede ser en un sentido congruente y la conversión inversa puede ser no congruente.

Esto se explica en el sentido de que, para producir la representación de partida, las posibilidades que se utilizaron son totalmente diferentes a las que se deben utilizar para producir la representación de llegada. En un estudio realizado por Raymond Duval se muestra que las tasas de éxito varían considerablemente entre las tareas de conversión e inversión del sentido de la conversión de las representaciones. En este estudio, se evidencia que dado un objeto representado en un registro tabular como registro de partida y transferirlo al registro gráfico como registro de llegada (T→G) la tasa de éxito fue alto, sin embargo, la inversión del sentido de la conversión (G→T), dio como resultado una tasa de éxito considerablemente baja. Entre otros planteamientos se pidió la transferencia:

- del registro tabular al simbólico (T→S) y la inversión de la conversión (S→T),
- del registro gráfico al simbólico (G→S) y la inversión de la conversión (S→ G)

Lo mismo sucedió al presentar ese mismo objeto en otros registros, las tasas de éxitos fueron altas en las primeras tareas, no obstante, al pedir su transferencia con la inversión de la conversión en otros registros las tasas resultaron muy bajas (Duval, 2004a: 45-47).

De estos dos tipos de transformaciones, se indica que

> la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. No solo el cambio de registro ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en que se trabaja; también, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales. (Duval, 2004b:49)

Aunque las tareas de conversión requieren de un tiempo y proceso para ser adquiridas, estas no deben dejarse de lado, sino más bien de sumergirse en la búsqueda de estrategias para potenciarlas dentro de los ambientes educativos.

Como complemento a los planteamientos anteriores, se añade que “la habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación sino que surge de su desarrollo” (Duval, 2006:158). Además, este autor indica que el fin para la enseñanza de las matemáticas no está en elegir el mejor sistema de representación, sino que los estudiantes logren hacer relaciones con las diversas formas de representar los contenidos matemáticos. Otros autores también sugieren que "es absolutamente necesario contar con actividades de conversión en por lo menos dos registros de representación para que las representaciones en juego, por ser complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión" (Hitt, 2001:175).

Respecto a la construcción de conceptos matemáticos, D'Amore (2009) plantea que esta construcción está vinculada con la habilidad de manejar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos:

"1) de representarlos en un registro dado,

2) de tratar tales representaciones al interior de un mismo registro,

3) de convertir tales representaciones de un dado registro a otro" (D´Amore, 2009:158).

2.4.4 Registros de representación de las funciones

Autores como Posada y Obando (2006) mencionan que el estudio de conceptos que involucran la variación, al estar integrados a los diferentes sistemas de representación como gráficas, tablas, expresiones verbales, expresiones simbólicas, permite la comprensión de estos. De manera que el aprendizaje se hace significativo ya que se exige además de manifestar actitudes de observación y registro, involucrar procesos de tratamiento, coordinación y conversión (Posada y Obando, 2006:16). De manera similar Hitt (2001) señala que "en el caso de la construcción del concepto de función entran en juego el registro de representación de la lengua natural, el de las expresiones algebraicas, tabulares, gráficas y figurales" (Hitt, 2001:175).

Por otra parte, sobre la relación del uso de los registros de representación y el pensamiento variacional, Mendoza (2016) señala que "pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, poder interpretarlas y tener la capacidad de analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación, si se modifica una condición particular" (Mendoza, 2016:60).

De acuerdo a estas consideraciones y a las referidas por el NCTM, el concepto de función puede representarse en diferentes registros, los que se describen a continuación:

Registro natural o verbal: "En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo" (Rey, Boubée, Vazquez y Cañibano, 2009:158).

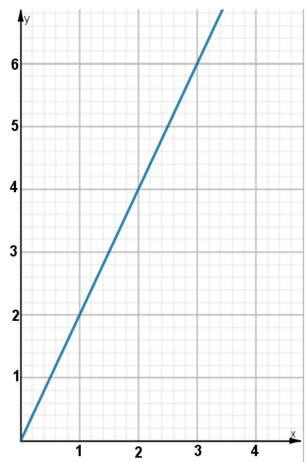
Registro algebraico: "En este registro, una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x perteneciente al dominio de la función" (Rey et al., 2009:159). Este registro, además, "Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa" (Macías, 2014:31).

Registro tabular: "En este registro, una función se representa con una tabla de valores que pone en juego la relación de correspondencia" (Rey et al., 2009:158). Además, el uso de este registro constituye una herramienta con la cual el estudiante puede lograr la comprensión de variable al descubrir que esta puede tener un número infinito de valores de reemplazo, a la vez que le ayuda a la escritura de expresiones algebraicas para describir la variación o el cambio (Castiblanco y Moreno, 2004:15).

Registro gráfico: "El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función" (Macías, 2014:31). Además, según autores señalan que "las gráficas cartesianas (…) hacen posible el estudio dinámico de la variación" (Castiblanco y Moreno, 2004:15).

De este modo, en la Tabla 2, se presenta una situación problemática cuya solución es la función lineal ilustrada en sus distintos registros.

Tabla 2*: Registros de representación de la función*

<table>
<tr><th>Registro en lenguaje verbal</th><th>Registro Tabular</th><th>Registro Gráfico</th><th>Registro Algebraico</th></tr>
<tr>
<td>Se quiere llenar una pila con agua. Se echa agua de modo que el nivel de la superficie del agua aumenta 2 cm por minuto. Si la pila estaba vacía cuándo se empezó a echar el agua. ¿Qué expresión representa esta situación? ¿Cuántos cm mide la altura de la superficie del agua después de 1, 2,3…8 minutos?</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
<td>$y = 2x$</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

Entre estos registros de representación de las funciones, resulta oportuno subrayar lo señalado por Hitt (2001), en el que hace referencia que la enseñanza del concepto de función se ha limitado al tránsito de una expresión algebraica o tabla a una representación gráfica y que se ha descuidado el tránsito o paso de la representación gráfica a una expresión algebraica, considerándose esta como una de las tareas más difíciles, pero a la vez una de las más necesarias en cuanto a la construcción del concepto de función (Hitt, 2001:169).

2.5 Comprensión de conceptos

Como se ha planteado anteriormente, este estudio está enfocado en el desarrollo del pensamiento variacional para la comprensión del concepto de función lineal, sin embargo, la articulación de los registros de representación semiótica a este estudio, constituye un enlace fundamental para conocer los procesos de comprensión de este concepto. Así pues, la comprensión de conceptos, desde la teoría de las representaciones semióticas expuesta principalmente por Raymond Duval, (como se citó en Hitt, 1998b) plantea que la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Por ello, Duval considera que las tareas de conversión representan ser fundamentales para la comprensión de conceptos.

En esta misma línea, Hitt (1998a), en un artículo llamado “Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function” (Dificultades en la articulación de diferentes representaciones relativas al concepto de función) hace referencia de cinco niveles de comprensión de un concepto, los cuales se describen en la tabla 3. Para efectos de esta investigación, se usarán estos niveles para analizar el nivel de comprensión del concepto de función lineal a través del desarrollo del pensamiento variacional.

Tabla 3: *Niveles de comprensión*

Nivel de Comprensión	**Indicadores**
Nivel 1	Ideas imprecisas sobre un concepto (mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto).
Nivel 2	Identificación de diferentes representaciones de un concepto.
Nivel 3	Transformación con preservación de significado de un sistema de representación a otro.
Nivel 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
Nivel 5	Articulación coherente de diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

Fuente: Traducción propia a partir de Hitt 1998a

Respecto al nivel 3, “cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas” (Duval y Sáenz, 2016:158). Esto quiere decir que el objeto representado sigue siendo el mismo. Acerca del nivel 4 y 5, que hace referencia a las transformaciones tipo conversión, Duval (2006) enfatiza que “la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión” (Duval, 2006:149). Sin embargo, esta es una de las tareas más difíciles para los estudiantes. Por su parte, Hitt (1995), señala que “un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si éste puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones” (Hitt, 1995:64). Es decir, que el estudiante sea capaz de recurrir al concepto en estudio desde cualquier registro.

Así pues, se hace hincapié en que,

> la comprensión matemática comienza cuando comienza la coordinación de registros. El reconocimiento de los mismos objetos matemáticos a través de representaciones provenientes de dos registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino el resultado de una coordinación global de registro. Los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de registros de representación. La coordinación de registros de representación semiótica proporciona algo así como una extensión de la capacidad mental. (Duval y Sáenz, 2016: 89)

Lo anterior, explica como el nivel 5 representa ser el más alto dentro de estos niveles, ya que, al hacer articulaciones coherentes entre los diversos registros de representación para la solución de problemas, indica que el estudiante ha comprendido el objeto en estudio.

2.6 Enfoque Ontosemiótico como herramienta de análisis

En este apartado se presentan los elementos teóricos que describen el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), este enfoque se utilizó como una herramienta para el análisis de los resultados presentados en el capítulo 4. Para conocer un poco sobre este enfoque, se señalan los siguientes aspectos principales.

2.6.1 Enfoque Ontosemiótico

De acuerdo con Godino, Font y Wilhelmi (2008) "la Didáctica de las Matemáticas debe asumir la responsabilidad de elaborar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (Godino et al., 2008:26). Por tanto esta disciplina incluye asuntos que son abordados por otras disciplinas, como la epistemología, psicología, pedagogía, sociología.

De ahí que en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) se sigue un modelo epistemológico sobre las matemáticas, fundamentado en presupuestos antropológicos/ socioculturales y apoyado en diversos modelos como: modelos de cognición matemática sobre bases semióticas, instruccional sobre bases socio-constructivistas y modelos sistémico-ecológicos, todos ellos relacionados entre sí y que tienen lugar en la actividad de estudio y comunicación matemática. Así se plantean herramientas conceptuales adoptadas o elaboradas por el EOS y que configuran además los modelo (epistemológico, cognitivo, instruccional, sistémico-ecológico) y que están siendo aplicadas en programas de formación de profesores de matemáticas al considerarlas útiles para la reflexión y análisis del diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente (Godino et al., 2008:26).

El EOS se define como un "sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Dicho enfoque se apoya en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas" (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017:93). Este enfoque dirigido por el Dr. Juan D. Godino, de la Universidad de Granada, surgió desde los años 1980 y es actualmente aplicado para investigar los procesos didácticos en diversos temas de matemáticas (Torres, 2011:54). En el EOS se plantean cinco niveles o tipos de análisis aplicados a un proceso de estudio matemático, estos son:

1. Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes).
2. Procesos matemáticos y conflictos semióticos.
3. Configuraciones y trayectorias didácticas.
4. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.
5. Idoneidad didáctica del proceso de estudio (Godino, Font y Wilhelmi, 2008: 29,30).

Para efectos de esta investigación se consideró el primer nivel de análisis didáctico. Según los autores antes mencionados, este primer nivel de análisis es aplicado particularmente a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio en los que se pretende estudiar prácticas matemáticas planificadas y realizadas, permitiendo descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, describiendo para cada uno de ellos las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal (Godino, Font y Wilhelmi, 2008:29).

Por otra parte, se considera como práctica matemática “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994:8). Asimismo, “en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual” (Godino, Batanero y Font, 2012:54). Además, en este primer nivel de análisis didáctico del EOS se proponen objetos y procedimientos primarios representados en la figura 3.

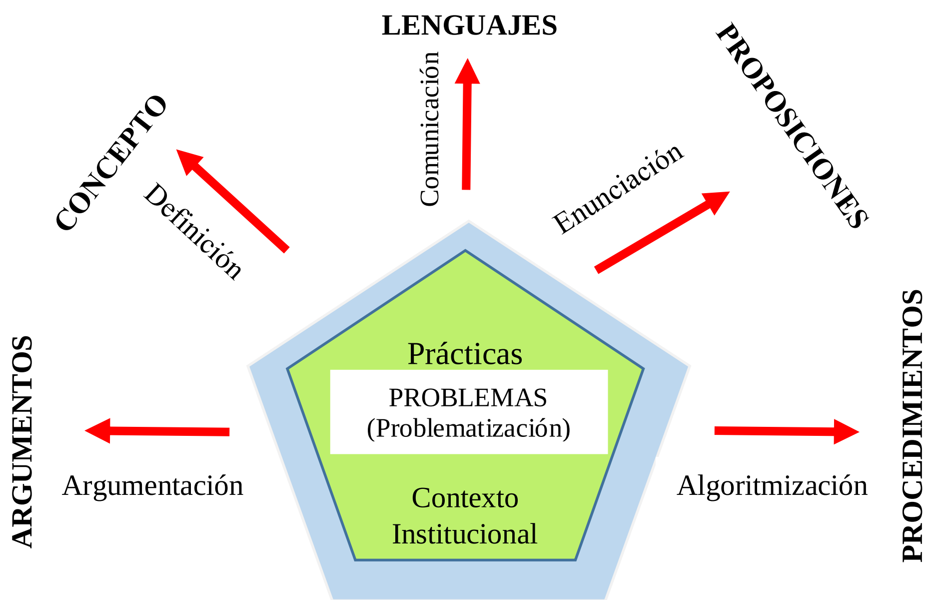


Figura 3: Objetos y procesos primarios
Tomado de: Godino, Font y Wilhelmi, 2008:31

Cada objeto matemático primario que interviene en las prácticas se describe como:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones: recta, punto, número, media, función).
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo). (Godino, Batanero y Font, 2012:55)

La articulación de estos objetos se ilustra en la figura 4.

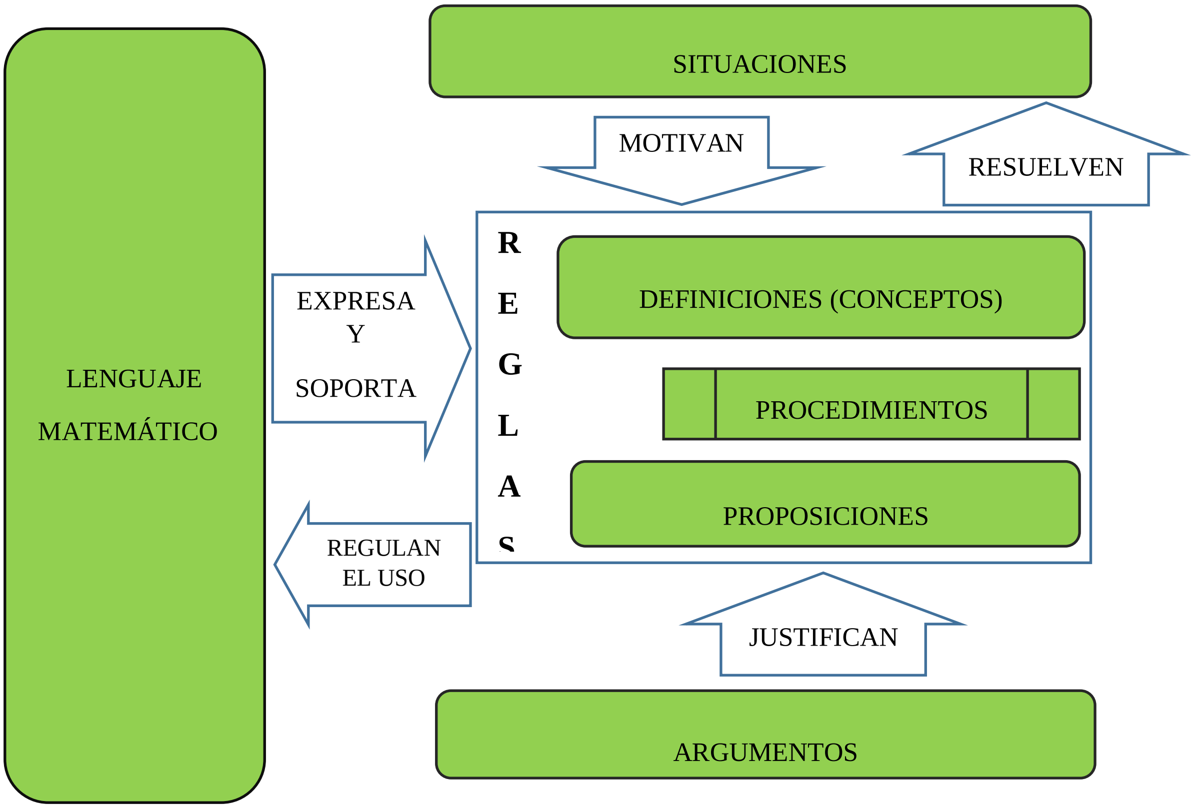


Figura 4: Componentes y relaciones en una configuración epistémica.
Tomado de: Font y Godino, 2006:6

Autores como Cabezas y Mendoza (2016) en su trabajo "Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial", plantearon etapas para el análisis de las prácticas realizadas, identificando estos objetos y procesos primarios propuestos por el EOS. Así pues, para describir el desarrollo de las prácticas realizadas en este estudio, se consideró el orden propuesto por estos autores. La descripción de estas etapas se muestra en la tabla 4.

Tabla 4: *Etapas de análisis didáctico del EOS*

Etapas	**Indicador de la etapa**
Etapa 1	Se responde a las preguntas básicas.
Etapa 2	Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo.
Etapa 3	Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.
Etapa 4	Situaciones problema emergentes.

Etapa 5a	Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.
Etapa 5b	Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.
Etapa 6	Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

Fuente: Elaboración propia a partir de Cabezas y Mendoza (2016).

El análisis detallado de los datos que se recolectaron de la prueba diagnóstica, las secuencias didácticas y la prueba final se presentan en el capítulo 4.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

En este capítulo se abordan los aspectos metodológicos en los cuales se fundamentó este estudio, entre ellos el enfoque, el tipo de estudio y el tipo de diseño, las categorías de análisis, la población y muestra, las técnicas de recolección de datos y su análisis respectivo.

3.1 Enfoque

La presente investigación se enmarca en un enfoque cualitativo ya que resulta adecuado cuando se está interesado en el "significado de las experiencias y los valores humanos, el punto de vista interno e individual de las personas y el ambiente natural en que ocurre el fenómeno estudiado, así como cuando buscamos una perspectiva cercana de los participantes" (Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2014:364).

El interés de este estudio es caracterizar los procesos de como los estudiantes logran comprender el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, articulando sus distintas representaciones en sus registros verbal, algebraica, tabular y gráfica consideradas en las actividades propuestas; asimismo se busca profundizar en las experiencias de los participantes sus opiniones, significados, comportamientos, formas de pensar y actuar.

3.2 Tipo de estudio

La investigación será de tipo interpretativo, "pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen" (Hernández, et al., 2014:9).

Puesto que el interés de este estudio es caracterizar los procesos de como los estudiantes logran comprender el concepto de función lineal, desde una perspectiva variacional. Se persigue dar sentido a los fenómenos estudiados respecto a los significados otorgados por los participantes a través del análisis de sus producciones en las sesiones de estudio propias de la temática a abordar.

3.3 Tipo de diseño

Este trabajo tendrá un diseño de tipo fenomenológico, ya que "su propósito principal es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias" (Hernández et al., 2014:493). Además que se busca describir, significar, entender y comprender las experiencias de cada participante, y, a la vez, aquellas que son comunes entre ellos respecto a un fenómeno.

3.4 Categorías de análisis

Dado que esta investigación se enmarca en el enfoque cualitativo, se describen las categorías siguientes: uso del pensamiento variacional en el concepto de función lineal y comprensión del concepto de función lineal, mismas que se detallan en la tabla 5.

Tabla 5*: Matriz de categorías de análisis*

Categoría	Definición Conceptual	Definición Operacional	Indicadores
Uso del pensamiento variacional en el concepto de función lineal.	**Pensamiento variacional:** es una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen (Vasco, 2002:63).	**1. Identificación de los elementos que varían y los que permanecen fijos en una función lineal.**	Los estudiantes son capaces de identificar los elementos que varían y los que permanecen fijos en las situaciones planteadas.
		2. Identificar la variable dependiente (¿Qué cambia y cuánto?) y **la variable independiente** Respecto a qué cambia y cuánto.	Los estudiantes identifican la variable dependiente e independiente en cada una de las situaciones planteadas.

		3. Modelación de una situación funcional. -Echar a andar el modelo, comparar los resultados con el proceso modelado y la revisión del modelo.	Los estudiantes son capaces de modelar situaciones funcionales, al plantear expresiones algebraicas correspondientes a fenómenos planteados.
Comprensión del concepto de función lineal.	**Comprensión:** La comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada, en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Por eso, la comprensión matemática requiere una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar Duval (1993, 2006).	**4. Representación en un sistema determinado:** Son el medio por el cual un individuo a través del uso de signos como un enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico… puede exteriorizar sus representaciones mentales, con el fin de hacerlas visibles a otros.	En cada función lineal planteada, los estudiantes son capaces de identificar sus registros de representación semiótica y sus elementos.
		5. Tratamiento de un registro de representación: Transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.	Los estudiantes son capaces de transformar una representación dentro de un mismo registro donde ha sido formulada.
		6. La conversión de una representación: Transformación de un registro de representación (registro de partida) en un registro de representación distinto (registro de llegada).	Los estudiantes son capaces de transformar una representación de un registro, en otro registro distinto del que ha sido formulada.

Fuente: Elaboración propia

3.5 Población y muestra

Este estudio se llevó a cabo en el Instituto Gubernamental Lempira ubicado en el municipio de Maraita, departamento de Francisco Morazán. El instituto es nocturno y cuenta con ocho secciones entre el nivel del tercer ciclo y Bachillerato Técnico Profesional en Contaduría y Finanzas, con una matrícula de aproximadamente 160 estudiantes. Las unidades de análisis fueron los estudiantes de noveno grado ya que en este grado se inicia el estudio de las funciones lineales y tal contenido representa una base fundamental para cursos posteriores. La muestra fueron los 12 estudiantes con los que cuenta esta sección única.

3.6 Técnicas de recolección de datos

De manera general, para la recolección de datos bajo el enfoque cualitativo se emplearon:

Sesiones en profundidad o Grupos de enfoque: ya que se llevó a cabo un proceso de intervención pedagógica. Esta técnica permitió durante las sesiones solicitar opiniones, hacer preguntas, discutir casos, intercambiar puntos de vista y administrar cuestionarios que se aplicaron en diversos momentos (el primero como una prueba diagnóstica en el que se incluyen los conocimientos previos al estudio de la temática de interés, durante y al final del proceso de la investigación). Con la intervención e interacción entre el grupo se permitió la validación de las respuestas de los mismos.

Observación: esta técnica sirvió para describir como fue el desenvolvimiento de los participantes en el desarrollo de la investigación, para comprender sus procesos de construcción de nuevos conocimientos e identificar sus habilidades, uso de estrategias y dificultades en el proceso. Se hicieron grabaciones en video para realizar el análisis de las observaciones.

Con este estudio se intenta aportar elementos para lograr una aproximación a la comprensión del concepto de función lineal a través del desarrollo del pensamiento variacional. Para ello se diseñó un conjunto de actividades que propiciaron el estudio de la variación y el cambio, elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional, así como tareas de tratamiento y conversión propuestas por Duval. Las actividades se desarrollaron en tres etapas las cuales se describen a continuación:

3.6.1 Etapa diagnóstica

En esta primera etapa se persiguió explorar los conocimientos previos de los estudiantes para el logro de la comprensión del concepto de función lineal con el fin de utilizar y relacionar dichos saberes para la construcción de nuevos conceptos y significados, por lo que en esta etapa la recolección de datos se inició con la aplicación de un cuestionario tipo prueba diagnóstico (Ver anexo uno). La prueba diagnóstica estuvo conformada por seis ítems, los cuales se describen con mayor detalle más adelante (ver tabla seis).

3.6.2 Etapa de ejecución

En esta fase se llevó a cabo un proceso de intervención pedagógica durante seis semanas a razón de cinco horas semanales. En esta intervención pedagógica se aplicó un conjunto de ocho secuencias didácticas de aprendizaje diseñadas con el fin de desarrollar el pensamiento variacional por medio del estudio del cambio y variación, para construir, a partir de ello, el concepto de función lineal. Se buscó a la vez la articulación de los diversos registros de representación del concepto de función a través de las tareas de tratamiento y conversión. En el diseño de las actividades se presentaron situaciones de la vida cotidiana con tareas y preguntas orientadas para propiciar el estudio de la variación y el cambio e involucrando las tareas de tratramiento y conversión en los diversos registros de representación de la función lineal (ver anexos del dos al nueve). La descripción de cada secuencia didáctica se presenta más adelante.

- La dinámica de trabajo en el aula se llevó a cabo de la siguiente manera:

En las sesiones de estudio, las secuencias de aprendizaje iniciaban con la presentación de situaciones problemáticas que propiciaban tareas de tratamiento y conversión dándose prioridad al desarrollo de estas últimas. En cada sesión se les entregaba a los estudiantes hojas de trabajo con diversas actividades para desarrollarlas de manera individual o en equipos y luego discutir y analizar de manera grupal.

En esta etapa las fotografías, la grabación en audio y video permitieron registrar el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la construcción y comprensión del concepto de función lineal.

- El papel del profesor consistió en orientar, propiciar un ambiente de discusión y análisis, uso estrategias, explicaciones de procedimientos usados para resolver las situaciones planteadas e intervenir con la formalización de los conocimientos nuevos que los estudiantes iban construyendo.

3.6.3 Evaluación final

En esta última etapa, se presentó un nuevo conjunto de tareas de naturaleza variacional para identificar las estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de las situaciones propuestas. Además, identificar el nivel de comprensión del concepto de función lineal por medio del pensamiento variacional y el manejo de sus representaciones en sus diferentes registros. El cuestionario contenía cuatro ítems: dos problemas que involucraban tareas de tratamiento y conversión asociadas al concepto de función lineal (el segundo problema se presentó como desafío); un tercer ítem en el que se presentó una gráfica y se solicitó crear una tabla que registrara las coordenadas de sus puntos, y un cuarto ítem en el que se presentó otra gráfica y se solicitó su expresión algebraica correspondiente.

3.7 Prueba diagnóstica, secuencias didácticas de aprendizaje y prueba final

En este apartado se presentan los instrumentos que se utilizaron para el desarrollo de la investigación. Se muestran los objetivos de cada instrumento y su descripción correspondiente. Cabe mencionar que las actividades propuestas en los instrumentos estuvieron compuestas por ítems, que a su vez en algunos casos estaban subdivididos por incisos, así las descripciones se harán por ítem y por ítem e inciso.

Los instrumentos como la prueba diagnóstica, las ocho secuencias didácticas y la prueba final fueron validadas a criterio de juicio de un grupo de expertos. De acuerdo con Hernández et al. (2014) “la validez, en términos generales, se refiere al grado en que un instrumento mide realmente la variable que pretende medir” (Hernández et al., 2014:200). Estos mismos autores también indican que la validez de expertos se refiere al “grado en que un instrumento realmente mide la variable de interés, de acuerdo con expertos en el tema” (Hernández, et al., 2014:204).

Así, de acuerdo a los planteamientos anteriores la validación de los instrumentos fue realizada por maestros de matemáticas a nivel medio y superior con un promedio de 22 años de experiencia. El grupo estuvo conformado por: Ph. D. Carlos Cabezas Manríquez (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile), Ph. D. Marvin Roberto Mendoza (Universidad Nacional Autónoma de Honduras y Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras), Ph. D. Luis Armando Ramos Palacios (Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras), Lic. Elmer Nahamán Gómez Hernández (Instituto Técnico Alejandro Flores (El Paraíso, Honduras) y el Lic. Pablo Avilés (Instituto Técnico Vocacional Pedro Nufio (Danlí, Honduras) y por un grupo de estudiantes con el fin de hacer mejoras en la redacción de los ítems. De acuerdo a sus reacciones en el desarrollo las actividades propuestas se mejoró la redacción de algunos ítems para facilitar su comprensión.

3.7.1 Prueba diagnóstica

3.7.1.1 Objetivo general

Explorar los conocimientos previos que tienen los estudiantes para el logro de la comprensión del concepto de función lineal.

3.7.1.2 Descripción general

La prueba está formada por 6 ítems. Cada ítem está orientado para explorar los conocimientos previos pertinentes que tienen los estudiantes para el estudio del concepto de función lineal, con el fin de utilizar y relacionar dichos saberes para la construcción de nuevos conceptos y significados.

El ítem 1 contiene cuatro incisos en los que se solicita traducir de lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, el ítem 2 contiene tres incisos y se solicita traducir de lenguaje algebraico al lenguaje cotidiano.

El ítem 3 está compuesto por dos incisos y se pide el planteamiento y la resolución de una ecuación lineal que corresponde a cada situación presentada, además de que se compruebe su respuesta, lo que involucra aplicar las concepciones de valor numérico.

En el ítem 4 se incluyen cinco incisos en los que se demanda de los estudiantes la capacidad de establecer relaciones de correspondencia en cada situación de la columna A con las de la columna B, y cinco incisos donde se justifique las relaciones establecidas. En el ítem 5 se presentan dos tablas en las que se busca que los estudiantes identifiquen cuál de las dos tablas representa la relación de cantidades directamente proporcionales, y, finalmente, con el ítem 6 se pide resolver el problema presentado haciendo uso de las nociones de constante de proporcionalidad.

Los ítems 1, 3, 4 y 6 están presentados en un contexto de situación problema real con un registro de lenguaje natural; el ítem 2 está presentado en un contexto de situación problema real en un registro algebraico, y el ítem 5 está dado en un contexto matemático en un registro tabular.

3.7.1.3 Objetivo y descripción por ítem

Tabla 6*: Objetivo y descripción por ítem de prueba diagnóstica*

Ítems	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Determinar la expresión algebraica de cada expresión escrita en lenguaje cotidiano o natural.	Se presentan cuatro incisos escritos en lenguaje cotidiano y se solicita que se determine la expresión algebraica correspondiente a cada inciso.
Ítem #2	Determinar la expresión en lenguaje verbal o natural de cada expresión escrita en lenguaje algebraico.	Se presentan tres incisos escritos en lenguaje algebraico y se solicita que se determine la expresión en lenguaje cotidiano correspondiente a cada inciso.
Ítem #3	Plantear las ecuaciones lineales correspondientes a cada situación presentada, resolverlas y comprobarlas para dar respuesta al problema.	Se presentan dos problemas en los que se pide el planteamiento y resolución de una ecuación lineal que represente la situación, además que se compruebe su respuesta, lo que involucra aplicar las concepciones de valor numérico.
Ítem #4	Establecer las relaciones de correspondencia en cada situación planteada.	Se presentan cinco incisos en los que se demanda que los estudiantes sean capaces de establecer relaciones de correspondencia en cada situación de la **COLUMNA A** con las de la **COLUMNA B**, y cinco incisos donde se pide justificar las relaciones establecidas.
Ítem #5	Identificar la relación de cantidades directamente proporcionales dadas dos tablas.	Se presentan dos tablas en las que se busca que los estudiantes puedan identificar cuál de las dos tablas representa la relación de cantidades directamente proporcionales, lo que implica que el estudiante pueda reconocer que en la tabla A las cantidades correspondientes a las variables x e y son ambas crecientes. Además, implica que el estudiante reconozca que el cociente de las magnitudes es constante concluyendo así que la

		tabla A es la que representa la relación de cantidades directamente proporcionales.
Ítem #6	Resolver el problema presentado haciendo uso de las nociones de constante de proporcionalidad.	Se presenta un problema cuya demanda es que los estudiantes sean capaces de identificar que la situación planteada representa una relación de correspondencia de magnitudes directamente proporcionales, identificar las magnitudes que intervienen en la situación, determinar la constante de proporcionalidad ($k = \frac{y}{x}$) con los valores conocidos y encontrar la solución del problema (el valor desconocido) al multiplicar la constante con el valor conocido correspondiente a la magnitud en cuestión $y = kx$.

Fuente: Elaboración propia

3.7.2 Secuencias didácticas de aprendizaje #1

3.7.2.1 Objetivo general

Analizar diversos fenómenos de cambio y variación orientados a desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes para la construcción del concepto de función lineal.

3.7.2.2 Descripción general

El instrumento consta de tres problemas dados en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real, todos ellos orientados al desarrollo del pensamiento variacional para la construcción del concepto de función lineal. Con esta actividad se da lugar a la transformación tipo conversión, es decir el paso del registro verbal al algebraico. Cada problema consta de varios incisos con los que se pretende que el estudiante logre:

a) Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en cada situación de variación y cambio, planteadas en registro natural o verbal.
b) Identificar cuales cantidades varían y cuales permanecen fijas (constantes).

c) Establecer la relación de dependencia entre las cantidades que intervienen en las situaciones planteadas.
d) Identificar la variable dependiente / variable independiente.
e) Encontrar un modelo o expresión matemática que represente cada fenómeno planteado.
f) Predecir estados futuros con el uso de modelos o expresiones algebraicas que representan cada fenómeno planteado.
g) Uso del modelo planteado para encontrar valores en momentos o condiciones.

Con el análisis y discusión de cada problema se pretende que los estudiantes vayan adquiriendo un conocimiento más reflexivo, que les lleve a pensar variacionalmente. Las discusiones con todo el grupo ayudan para orientar las ideas y respuestas que vayan surgiendo, de manera que en conjunto se construya el concepto de función lineal al establecer que las relaciones de dependencia entre las magnitudes reconocidas en los problemas planteados representan un tipo de función, llamada función lineal, para posteriormente formalizarlo como su forma $y = mx + b$ o $y = mx$ (magnitudes directas) como un caso especial de la función lineal (SE, 2016b).

3.7.2.3 Objetivo y descripción por ítem e inciso

Tabla 7: *Objetivo y descripción por problema e inciso de la secuencia de aprendizaje #1*

Ítem e Incisos	**Objetivo**	**Descripción**
Ítem #1	Pasar del registro verbal o natural al registro algebraico.	Se presenta un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. El modelo que representa este problema tiene la forma $y = mx$ (magnitudes directas).
Inciso a)	Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación planteada.	En el inciso a) se pregunta: ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?

Inciso b)	Determinar que después de 1 minuto la superficie del agua alcanza 2cm.	En el inciso b) se pregunta ¿Cuántos cm mide la altura del agua después de 1 minuto?
Inciso c)	Determinar que después de 1 minuto y medio la superficie del agua alcanza 3cm.	En el inciso c) se plantea que determinen después de un minuto y medio cuánto se habrá llenado la pila.
Inciso d)	Determinar que después de 2 minutos la superficie del agua alcanza 4 cm.	En el inciso d) se pide que determine cuanto se habrá llenado la pila después de 2 minutos.
Inciso e)	Completar la tabla con los datos proporcionados.	En el inciso e) se solicita completar una tabla que contiene los minutos y los centímetros que alcanza la superficie del agua hasta llegar a 8 minutos.
Inciso f)	Predecir la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos.	En el inciso f) se solicita que prediga cuál sería la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos.
Inciso g)	Establecer la relación que hay entre la altura de la superficie del agua y el tiempo.	En el inciso g) se pide que establezca qué relación hay entre la altura de la superficie del agua y el tiempo.
Inciso h)	Determinar si la altura de la superficie del agua depende del tiempo o el tiempo depende de la altura de la superficie del agua.	En el inciso h) se pregunta si la altura de la superficie del agua depende del tiempo o el tiempo depende de la altura de la superficie del agua.
Inciso i)	Determinar qué cantidad depende de la otra.	En el inciso i) se pide que determine qué cantidad depende de la otra. (Llame $\boldsymbol{y}$ a la variable dependiente. Representa: ¿Por qué o a consecuencia de qué cambia?)
Inciso j)	Determinar qué cantidad es independiente.	En el inciso j) se pide que determine qué cantidad es independiente. (Llame $\boldsymbol{x}$ a la variable independiente. Representa: cambia sin depender de otra variable ¿respecto a qué cambia?).
Inciso k)	Exprese con un modelo la altura de la superficie del agua en términos del tiempo.	En el inciso k) se pide que exprese con un modelo la altura de la superficie del agua en términos del tiempo.

Inciso l)	Usar el modelo planteado para verificar la predicción que hiciste en el inciso f.	En el inciso l) se pide que use el modelo para verificar la predicción de cuál sería la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos.
Inciso m)	Usar el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.	En el inciso m) se pide que use el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.
Ítem #2	Pasar del registro verbal o natural al registro algebraico.	Se presenta un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. El modelo que representa este problema tiene la forma $y = mx + b$.
Inciso a)	Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación planteada.	En el inciso **a**) se pregunta: ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?
Inciso b)	Determinar la ganancia de Raquel de acuerdo al número de baleadas vendidas cada noche.	En el inciso b) se pregunta cuánto ganará Raquel si cada día en la noche vende: el lunes 5 baleadas, el martes 10 baleadas, el miércoles 15 baleadas, el jueves 20 baleadas, el viernes 25 baleadas.
Inciso c)	Identificar que la cantidad que permanece fija o constante es el pago de L.80.	En el inciso c) se pregunta qué cantidad permanece fija (constante) y que justifique el porqué.
Inciso d)	Identificar que la cantidad que varía es la cantidad de baleadas que vende.	En el inciso d) se pregunta qué cantidad varía y que justifique el porqué.
Inciso e)	Predecir que Raquel ganaría L. 154.	En el inciso e) se pide que prediga cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.
Inciso f)	Establecer la relación que hay entre lo que gana Raquel diariamente y las baleadas vendidas.	En el inciso f) se pregunta qué relación hay entre lo que gana Raquel diariamente y las baleadas vendidas.
Inciso g)	Determinar qué cantidad depende de la otra.	En el inciso g) se pregunta qué cantidad depende de la otra. Variable dependiente: y= ______.

Inciso h)	Determinar qué cantidad es independiente.	En el inciso h) se pregunta qué cantidad es independiente. Variable independiente: x= ______.
Inciso i)	Expresar con un modelo el salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas.	En el inciso i) se pide al estudiante que exprese un modelo del salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas.
Inciso j)	Usar el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.	En el inciso j) se pide al estudiante que use el modelo para verificar la predicción de cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.
Inciso k)	Usar el modelo para determinar de cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.	En el inciso k) se pide al estudiante que use el modelo para determinar cuánto ganaría Raquel si vende 51 baleadas.
Ítem #3	Pasar del registro verbal o natural al registro algebraico.	Se presenta un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. El modelo que representa este problema tiene la forma $y = mx$ (magnitudes directas) un caso especial de la función lineal.
Inciso a)	Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación planteada.	En el inciso **a**) se pregunta: ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?
Inciso b)	Determinar la ganancia de Roberto de acuerdo a las libras de arroz vendidas.	En el inciso **b)** se pregunta cuánto ganará Roberto si vende: 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 4 o $4\frac{1}{2}$ libras de arroz.
Inciso c)	Identificar que la cantidad que varía es la cantidad de libras de arroz que vende Roberto.	En el inciso c) se pregunta qué cantidad varía y que justifique el porqué
Inciso d)	Predecir que Roberto ganaría L.175.5	En el inciso d) se pide que prediga cuánto ganaría Roberto si vendiera $19\frac{1}{2}$ libras de arroz.
Inciso e)	Establecer la relación que hay entre lo que gana Roberto y la cantidad de libras de arroz vendidas.	En el inciso e) se pregunta qué relación hay entre las cantidades que intervienen en la situación.

Inciso f)	Determinar qué cantidad depende de la otra.	En el inciso f) se pregunta qué cantidad depende de la otra. Variable dependiente: y= ____.
Inciso g)	Determinar qué cantidad es independiente.	En el inciso g) se pregunta qué cantidad es independiente. Variable independiente: x= ____.
Inciso h)	Expresar con un modelo el salario diario de Roberto en términos de la cantidad de libras de arroz vendidas	En el inciso i) se pide al estudiante que exprese un modelo de lo que ganaría Roberto respecto a la cantidad de libras de arroz vendidas.
Inciso i)	Usar el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Roberto si vendiera $19\frac{1}{2}$ libras de arroz.	En el inciso j) se pide al estudiante que use el modelo para verificar la predicción de cuánto ganaría Roberto si vendiera $19\frac{1}{2}$ libras de arroz.
Inciso j)	Usar el modelo para determinar de cuánto ganaría Roberto si vendiera 47 libras de arroz.	En el inciso j) se pide al estudiante que use el modelo para determinar cuánto ganaría Roberto si vendiera 47 libras de arroz.

Fuente: Elaboración propia

3.7.3 Secuencias didácticas de aprendizaje #2

3.7.3.1 Objetivo general

Identificar que la razón $\frac{(cambio\ de\ \ y)}{(cambio\ de\ x)}$ constante caracteriza a la función lineal o de primer grado.

3.7.3.2 Descripción general

El instrumento consta de 2 actividades. La primera contiene una tabla que registra los datos de la altura que alcanza la superficie del agua de una pila que aumenta 2 cm por minuto. Se le pide al estudiante que determinen las diferencias entre intervalos para identificar que las razones de cambio son constantes. La segunda actividad contiene 3 tablas en las que se les pide a los estudiantes que determinen las diferencias entre intervalos en cada tabla para identificar qué tabla tiene razones de cambio constantes y que por ello corresponde a puntos de una función lineal. Se pretende que el estudiante logre:

a) Identificar la razón $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$ al determinar los intervalos de variación, analizando la forma en cómo se dan los cambios.

b) Identificar que la razón de cambio constante caracteriza a la función lineal o de primer grado.

c) Identificar la relación entre la razón de cambio constante y la pendiente de recta.

Con la primera actividad los estudiantes trabajarán en grupos de 3, y con la segunda actividad trabajarán individualmente. Se intenta que los estudiantes vayan desarrollando un pensamiento variacional al establecer relaciones de cambios en y como cambios en x, identificando y cuantificando esos cambios. Las discusiones con todo el grupo ayudarán para orientar las ideas y respuestas que vayan surgiendo de manera que juntos construyan y comprendan la noción de pendiente para posteriormente formalizarlo como su forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3.7.3.3 Objetivo y descripción por ítem e inciso

Tabla 8: *Objetivo y descripción por ítem e inciso de la secuencia de aprendizaje #2*

Ítem e Incisos	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Determinar la razón $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$ a través de calcular las diferencias entre intervalos correspondientes a altura trascurrido cada minuto.	Se presenta una tabla que registra los datos de la altura que alcanza la superficie del agua de una pila que aumenta 2 cm por minuto. Se pide encontrar la razón $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ altura})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ tiempo})} = \frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$ correspondiente a cada altura, trascurrido cada minuto.
Ítem #2	Determinar las diferencias entre intervalos en cada tabla e identificar que tabla tiene razones de cambio constantes y que por ello corresponde a puntos de una función lineal.	En el Ítem 2 se presentan tres tablas en las que se pide determinar cuál de las tablas corresponde a puntos de una función lineal.

Fuente: Elaboración propia

3.7.4 Secuencias didácticas de aprendizaje #3

3.7.4.1 Objetivo general

Encontrar la pendiente a través del análisis de cambios y la expresión matemática que modela cada situación planteada.

3.7.4.2 Descripción general

El instrumento consta de un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. La actividad contiene una serie de preguntas orientadas al desarrollo del pensamiento variacional. Lo anterior permitirá completar una tabla, luego encontrar la pendiente a través del análisis de cambios y la expresión matemática que modela la tabla de datos que se presenta en la situación. Se pretende que el estudiante logre:

a) Encontrar la pendiente de una recta que pasa dos puntos y encontrar la ecuación de una recta con la forma punto-pendiente.

b) Encontrar una expresión algebraica que modelan los datos registrados en tablas.

3.7.4.3 Objetivo y descripción por ítem e inciso

Tabla 9*: Objetivo y descripción por ítem e inciso de la secuencia de aprendizaje #3*

Ítem e inciso	Objetivo	Descripción
	Pasar del registro tabular al algebraico.	Se presenta un problema escrito en lenguaje cotidiano y se solicita que se complete una tabla.
Inciso a)	Identificar que no necesita trabajar horas extras o trabajar cero horas extras.	En el inciso a) se pregunta que para recibir L. 6,800 de sueldo, ¿cuántas horas extras debe trabajar Julia?
Inciso b)	Determinar que el cambio de salario mensual por trabajar 3 horas extra equivale a L.240.	En el inciso b) se pregunta, ¿cuánto es el cambio de salario mensual al trabajar 3 horas extra respecto a no trabajar horas extras?

Inciso c)	Determinar que el cambio de salario mensual por hora extra trabajada equivale a L.80.	En el inciso c) se pregunta, ¿cuánto representa ese cambio de salario mensual por hora extra trabajada?
Inciso d)	Identificar que L.80 representa el pago por hora extra trabajada.	En el inciso d) se pregunta qué representa ese valor.
Inciso e)	Determinar que por trabajar 6 horas extra recibirá de salario mensual L. 7,280.	En el inciso e) se pregunta, ¿cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 6 horas extra?
Inciso f)	Determinar que por trabajar 7 horas extra recibirá de salario mensual L. 7,360.	En el inciso f) se pregunta, ¿cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 7 horas extra?
Inciso g)	Determinar que el cambio de salario mensual al ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040 es L.160.	En el inciso g) se pregunta, ¿cuánto es el cambio de salario mensual al ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040?
Inciso h)	Determinar que ese cambio de salario mensual representa 2 horas extras.	En el inciso h) se pregunta, ¿cuántas horas extras representa ese cambio?
Inciso i)	Determinar que para ganar L. 7,200 de sueldo mensual se necesita trabajar 5 horas extra.	En el inciso i) se pregunta, ¿cuántas horas extra representa ganar L.7200 de sueldo?
Inciso j)	Determinar que el cambio de salario mensual al ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras es L.160.	En el inciso j) se pregunta, ¿cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?
Inciso k)	Determinar que ese cambio de salario mensual representa 2 horas extras.	En el inciso k) se pregunta, ¿cuántas horas extras representa ese cambio?
Inciso l)	Determinar que para ganar L.7,520 de sueldo mensual se necesita trabajar 9 horas extra.	En el inciso l) se pegunta, ¿cuántas horas extra representa ganar L.7, 520 de sueldo?
Inciso m)	Determinar que el cambio de salario mensual al ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras es L. 240.	En el inciso m) se pregunta, ¿cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?

Inciso n)	Determinar que ese cambio de salario mensual representa 3 horas extra.	En el inciso n) se pregunta, ¿cuántas horas extras representa ese cambio?
Inciso o)	Determinar que para ganar L. 7,600 de sueldo mensual necesita trabajar 10 horas extra.	En el inciso o) se pregunta, ¿cuántas horas extra representa ganar L.7600 de sueldo?
Inciso p)	Encontrar la pendiente utilizando los datos registrados en la tabla y que equivale a 80.	En el inciso p) se solicita que encuentre la pendiente con los datos registrados en la tabla.
Inciso q)	Encontrar la expresión matemática que modela el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas.	En el inciso q) se pide que encuentre la expresión matemática que modela el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas.

Fuente: Elaboración propia

3.7.5 Secuencias didácticas de aprendizaje #4

3.7.5.1 Objetivo general

Graficar funciones lineales o de primer grado mediante datos registrados en tablas.

3.7.5.2 Descripción general

El instrumento consta de una actividad que contiene dos incisos, en cada uno se presenta una tabla con datos de situaciones de la vida cotidiana. Se pide a los estudiantes que grafiquen esos datos en el plano cartesiano, lo que implica identificar las variables y ubicarlas en los ejes correspondientes. Estas actividades permitirán que el estudiante identifique que la gráfica de una función lineal o de primer grado es una recta.

3.7.5.3 Objetivo y descripción por ítem e inciso

Tabla 10: *Objetivo y descripción por ítem e inciso de la secuencia de aprendizaje #4*

Ítem/ Inciso	Objetivo	Descripción
	Identificar que la gráfica de una función lineal o de primer grado es una recta al graficar datos de situaciones de la vida cotidiana registrados en tablas.	Se presentan dos incisos, cada uno contiene una tabla que registran datos de situaciones de la vida cotidiana, se solicita a los estudiantes que grafiquen esos datos en el plano cartesiano.

	Pasar del registro tabular al gráfico.	
Inciso a)	Graficar los puntos que contiene la tabla y unir los puntos graficados para formar una recta.	En el inciso a) se presenta una tabla que contiene los datos de la temperatura Celsius en relación a la temperatura Fahrenheit y se pide a los estudiantes que grafique esos datos.
Inciso b)	Graficar los puntos que contiene la tabla y unir los puntos graficados para formar una recta.	En el inciso b) se presenta una tabla que contiene el valor por semana de la entrada a un circo, se pide a los estudiantes que grafique esos datos.

Fuente: Elaboración propia

3.7.6 Secuencias didácticas de aprendizaje #5

3.7.6.1 Objetivo general

Crear tablas a partir de gráficas de funciones lineales o de primer grado.

3.7.6.2 Descripción general

La actividad consiste en que dada una gráfica, el estudiante pueda crear una tabla en la que registre los puntos que corresponden a dicha gráfica.

3.7.6.3 Objetivo y descripción por ítem e inciso

Tabla 11: *Objetivo y descripción por ítem e inciso de la secuencia de aprendizaje #5*

Ítem	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Construir una tabla que contenga los puntos que corresponden a cada gráfica. Pasar del registro grafico al tabular.	Se presentan un ítem que contiene dos incisos. En cada uno se presenta la gráfica de una función lineal, se pide al estudiante crear una tabla en la que registre los puntos que corresponden a cada gráfica.

Fuente: Elaboración propia

3.7.7 Secuencias didácticas de aprendizaje #6

3.7.7.1 Objetivo general

Identificar la ordenada al origen en funciones lineales o de primer grado e interpretar la pendiente como la razón de $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.

3.7.7.2 Descripción general

El instrumento consta de una tabla que contiene una serie de expresiones algebraicas que representan funciones lineales con ítems orientados para identificar la ordenada al origen y la interpretación de la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ para graficar una función lineal o de primer grado.

3.7.7.3 Objetivo y descripción por ítem

Tabla 12: *Objetivo y descripción por ítem de la secuencia de aprendizaje #6*

Ítems	Objetivo	Descripción
		Se presenta una tabla que contiene cuatro expresiones algebraicas con cuatro ítems orientados para identificar la ordenada al origen e interpretar la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.
Ítem #1	Identificar la ordenada al origen (formada por el par cero y el valor de b (0,b)).	En el ítem #1 se pide al estudiante identificar la ordenada al origen de cada expresión algebraica.
Ítem #2	Identificar que la pendiente es el coeficiente de x.	En el ítem #2 se pide al estudiante que identifique la pendiente en cada expresión algebraica.
Ítem #3	Escribir la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.	En el ítem #3 se pide al estudiante que escriba la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.
Ítem #4	Interpretar la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.	En el inciso #4 se pide al estudiante que interprete la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.

Fuente: Elaboración propia

3.7.8 Secuencias didácticas de aprendizaje #7

3.7.8.1 Objetivo general

Graficar funciones lineales o de primer grado utilizando la ordenada al origen y con la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.

3.7.8.2 Descripción general

En esta actividad se le solicita al estudiante que grafique en un plano cartesiano las funciones lineales presentadas en la tabla de la actividad anterior haciendo uso de la ordenada al origen y utilizando la interpretación de la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$. Con esta actividad se pretende que el estudiante logre:

- Identificar que la gráfica será creciente (inclinada hacia la derecha-arriba) si la pendiente es positiva y será decreciente (inclinada hacia la izquierda-abajo) si la pendiente es negativa.

3.7.8.3 Objetivo y descripción por ítem

Tabla 13: *Objetivo y descripción por ítem de la secuencia de aprendizaje #7*

Ítem	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Graficar funciones lineales o de primer grado. Pasar del registro algebraico al gráfico.	Se solicita al estudiante que grafique cada una de las funciones lineales de la tabla de la actividad anterior, utilizando la ordenada al origen y la interpretación de la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$, indicando si es creciente o decreciente.

Fuente: Elaboración propia

3.7.9 Secuencias didácticas de aprendizaje #8

3.7.9.1 Objetivo general

Encontrar las expresiones matemáticas que modelan las gráficas.

3.7.9.2 Descripción general

En esta actividad se presentan distintas gráficas de funciones lineales y a través de identificar la ordenada al origen y la pendiente como análisis de cambios en y, y también cambios en x, los estudiantes logren escribir la expresión matemática que modela cada gráfica.

3.7.9.3 Objetivo y descripción por ítem

Tabla 14*: Objetivo y descripción por ítem de secuencia de aprendizaje #8*

Ítem	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Determinar la expresión algebraica que representa cada función lineal graficada. Pasar del registro gráfico al algebraico.	Se presentan cuatro gráficas en las que se le solicita al estudiante que identifique la ordenada al origen, el $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$, la pendiente y finalmente que escriba la expresión algebraica que representa la función lineal graficada.

Fuente: Elaboración propia

3.7.10 Prueba final

3.7.10.1 Objetivo general

Analizar el nivel de comprensión del concepto de función lineal logrado mediante el pensamiento variacional.

3.7.10.2 Descripción general

Con la prueba final se pretendía conocer el nivel de comprensión logrado por los estudiantes sobre el concepto de función lineal, mediante el pensamiento variacional después de las intervenciones pedagógicas llevadas a cabo como secuencias didácticas. La prueba final se llevó a cabo en dos momentos. En el primer momento se presentó un problema con ítems orientados a identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación; identificar cuál cantidad varía y cuál permanece fija (constante); establecer la relación de dependencia entre las cantidades que intervienen en la situación planteada; predecir estados futuros con el uso del modelo o expresión algebraica que representan el fenómeno planteado; identificar la variable dependiente e independiente, encontrar un modelo o expresión matemática que represente la situación planteada, y, finalmente, usar el modelo planteado para encontrar valores en momentos o condiciones particulares.

En un segundo momento se presentó como desafío resolver otro problema que refería a identificar las magnitudes involucradas en la situación; establecer la relación de dependencia entre ellas; identificar pares ordenados provistos en el planteamiento del problema; encontrar la pendiente; interpretar el concepto de pendiente según las situación planteada, encontrar la expresión algebraica (aquí se da lugar a la transformación tipo conversión, paso del registro verbal al algebraico), y, finalmente, la gráfica de la función lineal correspondiente al problema (aquí se da lugar a la transformación tipo conversión, paso del registro algebraico al gráfico).

Así, en los ítems 1) y 2) se presentaron problemas dados en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. En el ítem **3)** se le pide al estudiante que cree una tabla con los puntos que representa la gráfica de una función lineal. Con este ítem se da lugar a la transformación tipo conversión del registro gráfico al tabular.

En el ítem **4)** se le pide al estudiante que escriba la expresión algebraica que corresponde a la gráfica de función lineal presentada. Con este ítem se da lugar a la transformación tipo conversión del registro gráfico al algebraico.

3.7.10.3 Objetivo y descripción por ítem

Tabla 15: *Objetivo y descripción por ítem de prueba final*

Ítem/Incisos	Objetivo	Descripción
Ítem #1	Determinar la expresión algebraica de cada expresión escrita en lenguaje cotidiano o natural. Pasar del registro verbal o natural al registro algebraico.	Se presenta un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. El modelo que representa este problema tiene la forma $y = mx + b$.

Inciso a)	Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	En el inciso **a**) se pregunta ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?
Inciso b)	Determinar cuánto ganaría Elena de acuerdo al número de rosas vendidas por día.	En el inciso **b)** se pregunta: ¿Cuánto ganará Elena cada día si vende? El lunes 1 rosa, el martes 2 rosas, el miércoles 3 rosas, el jueves 4 rosas, el viernes 5 rosas, el sábado 6 rosas.
Inciso c)	Identificar que la cantidad que permanece fija o constante es el pago de L.135.	En el inciso c) se pregunta qué cantidad permanece fija (constante) y que justifique el porqué.
Inciso d)	Identificar que la cantidad que varía es la cantidad de rosas que vende.	En el inciso d) se pregunta qué cantidad varía y que justifique el porqué.
Inciso e)	Predecir que Elena ganaría L. 222.	En el inciso e) se pide que prediga cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.
Inciso f)	Establecer la relación que hay entre lo que gana Elena diariamente y las rosas vendidas.	En el inciso f) se pregunta qué relación hay entre lo que gana Elena diariamente y las rosas vendidas.
Inciso g)	Determinar qué cantidad depende de la otra.	En el inciso g) se pregunta qué cantidad depende de la otra. Variable dependiente: y= ______.
Inciso h)	Determinar qué cantidad es independiente.	En el inciso h) se pregunta qué cantidad es independiente. Variable independiente: x= ______.
Inciso i)	Expresar con un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas.	En el inciso i) se pide al estudiante que exprese un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas.
Inciso j)	Usar el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.	En el inciso j) se pide al estudiante que use el modelo para verificar la predicción de cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.

Inciso k)	Usar el modelo para determinar de cuánto recibió de pago Elena si vendió 71 rosas.	En el inciso k) se pide al estudiante que use el modelo para determinar cuánto recibió de pago Elena si vendió 71 rosas.
Ítem #2	Determinar la expresión en lenguaje cotidiano o natural de cada expresión escrita en lenguaje algebraico.	Se presenta un problema dado en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. El modelo que representa este problema tiene la forma $y = mx + b$.
Inciso a)	Identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	En el inciso a) se pide que el estudiante identifique las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación planteada.
Inciso b)	Determinar la relación que hay entre el diámetro y la edad del roble.	En el inciso b) se pregunta qué relación hay entre el diámetro y la edad del roble.
Inciso c)	Determinar que la edad en años del roble depende del diámetro.	En el inciso c) se pide al estudiante que determine si el diámetro depende de la edad en años del roble o la edad en años del roble depende del diámetro.
Inciso d)	Identificar que la variable dependiente es la edad del roble y la variable independiente es el diámetro.	En el inciso d) se pregunta qué cantidad depende de la otra y que cantidad es independiente. • Variable dependiente: y • Variable independiente: x
Inciso e)	Identificar los pares ordenados que intervienen en la situación.	En el inciso e) se pide al estudiante que identifique qué pares ordenados intervienen en la situación.
Inciso f)	Determinar la pendiente.	En el inciso f) se pide al estudiante que determine la pendiente.
Inciso g)	Determinar la expresión matemática que modela la situación planteada.	En el inciso g) se pide al estudiante que determine una expresión matemática que represente o modele la situación planteada.

Inciso h)	Explicar el significado de la pendiente en el contexto del problema.	En el inciso h) se pide al estudiante que explique el significado de la pendiente en el contexto del problema.
Inciso i)	Usar el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.	En el inciso i) se pide al estudiante que use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.
Inciso j)	Graficar la función lineal correspondiente al problema planteado.	En el inciso j) se le pide al estudiante que grafique la expresión algebraica planteada en el problema presentado.
Ítem #3	Crear una tabla que registre los puntos que corresponden a cada gráfica. Pasar del registro grafico al tabular.	En el ítem 3**)** se le pide al estudiante que cree una tabla con los puntos que representa la gráfica de una función lineal.
Ítem #4	Determinar la expresión algebraica que representa cada función lineal graficada. Pasar del registro gráfico al algebraico.	En el ítem **4)** se le pide al estudiante que escriba la expresión algebraica que corresponde a la gráfica de función lineal presentada.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 15 se presenta un resumen de los registros de representación semiótica utilizados en las ocho secuencias didácticas y en la prueba final. De acuerdo con Duval, la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. Por eso, la comprensión matemática requiere una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar, Duval (1993, 2006).

Tabla 16: *Resumen de los registros de representación semiótica utilizados en cada secuencia didáctica y prueba final.*

Secuencia didáctica de aprendizaje	Registro de partida	Registro de llegada
Secuencia didáctica de aprendizaje #1	Verbal	Algebraico
Secuencia didáctica de aprendizaje #3	Tabular	Algebraico
Secuencia didáctica de aprendizaje #4	Tabular	Gráfico
Secuencia didáctica de aprendizaje #5	Gráfico	Tabular
Secuencia didáctica de aprendizaje #7	Algebraico	Gráfico
Secuencia didáctica de aprendizaje #8	Gráfico	Algebraico
Prueba final situación #1	Verbal	Algebraico
Prueba final situación #2	Verbal	Algebraico
	Algebraico	Gráfico
Prueba final situación #3	Gráfico	Tabular
Prueba final situación #4	Gráfico	Algebraico

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 4

Resultados y Análisis de datos

En este apartado se describe de manera detallada el análisis de los instrumentos aplicados durante la investigación. Así, para el análisis de resultados se hace referencia a dos fuentes principales: las consideraciones teóricas del EOS y rúbricas de evaluación. Para tal propósito, en un primer apartado se presentan los datos de acuerdo a los objetos y procesos matemáticos primarios del primer nivel de análisis didáctico propuesto por el EOS que se presentó en la sección 2.6 del capítulo 2 y en un segundo apartado las rúbricas de evaluación de cada secuencia y los resultados de las mismas.

4.2 Análisis de los datos de acuerdo al primer nivel de análisis propuesto por el Enfoque Ontosemiótico

En el análisis de resultados correspondientes a cada secuencia didáctica de aprendizaje se empleará la codificación SD y el número correspondiente de cada secuencia. Para hacer referencia a un problema se indicará con la letra P y el número correspondiente a este, para referirnos a algún estudiante o grupo de estudiantes se utilizará la letra E y G respectivamente, junto con un número asignado para cada uno.

4.2.1 Análisis de prueba diagnóstica

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Se presentan seis ítems en diversos registros: el ítem 1 contiene cuatro incisos en los que se solicita traducir de lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico; el ítem 2 contiene tres incisos y se solicita traducir de lenguaje algebraico al lenguaje cotidiano; el ítem 3 está compuesto por dos incisos y se pide el planteamiento y la resolución de una ecuación lineal que corresponde a cada situación presentada, además de que se compruebe su respuesta, esto involucra aplicar las concepciones de valor numérico; en el ítem 4 se presentan dos incisos, en el primero se presentan dos columnas con cinco proposiciones en cada una, se demanda de los estudiantes la capacidad de establecer relaciones de correspondencia en cada situación planteada en ambas columnas, en el segundo inciso se presentan cinco líneas en blanco donde se pide que justifique las relaciones establecidas en el inciso anterior; en el ítem 5 se presentan dos tablas, se busca que los estudiantes identifiquen cuál de las dos tablas representa la relación de cantidades directamente proporcionales, y, finalmente, con el ítem 6 se pide resolver el problema presentado haciendo uso de las nociones de constante de proporcionalidad.

Los ítems 1, 3, 4 y 6 están presentados en un contexto de situación problema real con un registro de lenguaje natural; el ítem 2 está presentado en un registro algebraico, y el ítem 5 está dado en un contexto matemático en un registro tabular.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Del Ítem 1: Escriba una expresión algebraica que represente cada expresión escrita en lenguaje cotidiano o natural.

Inciso a) El doble de un número aumentado en cinco unidades.

- E2 $2k+5$

Inciso b) La mitad de un número disminuido en diez unidades:

- E5 $1/2c-10$

Inciso c) La edad de José dentro de siete años.

- E9 $C+7$

Inciso d) La tercera parte de un número.

- E4 $\frac{1}{3}G$

Del Ítem 2: Escriba una expresión algebraica que represente cada expresión escrita en lenguaje cotidiano o natural.

Inciso a) $\frac{1}{5}y$

- E4 La Quinta parte de un numero

Inciso b) $z + 14$

- E10 un numero aumentado en Catorce Unidades

Inciso c) $3x - 5$

- E2 El triple de un número disminuido en Cinco Unidades

Del Ítem 3: Resuelva los siguientes problemas, compruebe su respuesta.

Inciso a)

- E2 El doble de un número aumentado en 15 unidades es 75. ¿Cuál es el número?

$2K + 15 = 75$

$2K = 75 - 15$

$K = \frac{60}{2}$

$K = \underline{\underline{30}}$

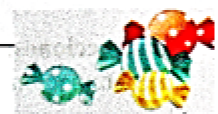
R/El número es 30.

- E8 El doble de un número aumentado en 15 unidades es 75. ¿Cuál es el número? es 30.

$2n+15=75$	$2n+15=75$
$2n=75-15$	$2(30)+15=75$
$2n=60$	$60+15=75$
$n=\frac{60}{2}$ $n=30$	$75=75$

Inciso b)

- E4 Se van a repartir confites a varios niños. Si se le dan 6 confites a cada uno sobran 8 y si se le dan 8 confites a cada uno faltan 6. ¿Cuántos niños hay?



$6y+8=8y-6$ R// Hay 7 niños.

$6y-8y=-8-6$

$-2y=-14$

$y=\frac{14}{2}$

$y=7$

- E8 Se van a repartir confites a varios niños. Si se le dan 6 confites a cada uno sobran 8 y si se le dan 8 confites a cada uno faltan 6. ¿Cuántos niños hay?

$6x+8=8x-6$	$6(7)+8=8(7)-6$
$6x-8x=-6-8$	$42+8=56-6$
$-2x=-14$	$50=50$
$x=-14$	
$x=\frac{-14}{2}$	
$x=7$	

Hay 7 niños

Del Ítem 4: En cada situación de la columna A, determine la relación correspondiente con cada expresión de la columna B.

Inciso a) Escriba en el espacio en blanco de la columna A la letra correspondiente de la columna b.

- E8

COLUMNA A	COLUMNA B
1. e El llenado de un recipiente	a) Los kilómetros recorridos
2. b Salario de un obrero	b) Horas trabajadas
3. a El consumo de gasolina	c) Número de artículos comprados
4. c Gasto total	d) El peso agregado
5. d El estiramiento de un resorte	e) Tiempo transcurrido

Inciso b) justificación de la relación de correspondencia determinada en el inciso a.

E1 Porque por el tiempo que paso Se llena el recipiente.

E2 El recipiente se va a llenar, según el tiempo trascurrido.

E4 un resipiente Se yena atraves del tiempo transcurrido

E5 Entre más tiempo Pasa más se llena el recipiente.

E7 Al llenar un recipiente se necesita transcurrir cierta medida de tiempo

E8 Cuondo uno abre una llave entre mas tiempo la tiene Auerto ma se llena.

E1 Porque por lo Oras trabajadas te pagan Un salario.

E2 El Salario de una persona es por las horas trabajadas

E4 aun obrero Selepago segun las horas de trabajo Diario

E5 Entre más horas trabaja más dinero ganara

E4 El gasto es segun los objetos comprados

E5 Entre más articulo compra más dinero ganastara.

E9 El Gasto total depende delo mucho que ha comprado.

E1 Qué entre mas tiempo que recorre el auto mas gasolina gasta

E7 se consume la gasolina más rapido dependiendo dela distancia que se transcurre

E11 El consumo de gasolina es por los Kilometros recorridos.

E5 Entre más Kilometros corre más gasolina gasta.

E1 Qué por mas artefactos Comprados mas dinero invierte.

E1 Un resorte se estira dependiendo el peso sobre el.

E3 Por el Peso que va Poniendo se Estirara el Resorte.

E2 El estiramiento de un resorte es por el peso que le agrege.

E5 Entre más Peso tiene más estiramiento tiene el resorte.

E8 un Resorté se estira Segun el pěso Agragado.

E11 El estiramiento es por el peso.

E12 EntremAs peso MAS se ALArgA el Resorte

Del Ítem 5: Indique cuál de las tablas representa la relación de cantidades directamente proporcionales.

E2

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

R/ Porqué es la que va aumentando las dos.
- La (x) va aumentando de 1 en 1.
- La (y) porque va aumentando de 5 en 5

E4

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

tabla A.

Porque los numeros aumentan tanto en la fila "x" como tambien aumentan en la fila "y"

E5

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Porque en la tabla A
La x va aumentando
tambien y va aumentando

E7

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Tabla A: La fila x va aumentando un número, la Y aumenta 5 veces más que la fila x

E8

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Porque tanto x como y
Van creciendo.

E11

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

La tabla A
Los numeros de x Van subiendo
de 1 en 1
Los numeros de y van subiendo
de 5 en 5

Del Ítem 6: Si Carlos compró 15 libros y gastó L.1, 200.00 ¿Cuánto gastará César si compra 80 libros al mismo precio que los compró Carlos?

- E7 1200 ÷ 15 = 80 cada libro

  80 x 80 = 6,400 Lps.

- E8

	x Libra	y Gasto
Carlos	15	1,200
Cesar	80	6,400

$K = \frac{x}{y}$ $K = \frac{15}{1{,}200} = 80$

$y = K(x) = (80)(80)) = 6{,}400$

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Expresión algebraica, expresión, lenguaje cotidiano o natural, doble, número, aumentado, mitad, disminuido, unidades, edad, dentro, años, tercera parte, distintos, problema, compruebe, evidencia, proceso, repartir, confites, varios, niños, sobran, cada uno, faltan, cuantos, hay, relación, llenado, recipiente, salario, obrero, consumo, gasolina, gasto total, estiramiento, resorte, kilómetro, recorrido, horas trabajadas, artículos, comprados, peso, agregado, tiempo, cantidades directamente proporcionales, tabla, compró, gastará, libros.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Quinta parte, triple, abre, llave, entre, mas, abierto, tiene, transcurre, según, estira, creciendo, pasa, llena, pagan, gasta, artefactos, invierte, sobre, dependiendo, a través, según, obtener, subiendo, veces, alarga, agregado, estiramiento, poniendo, corre, fila.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron exclusivamente a lo solicitado en las consignas de los seis ítems.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

El recipiente se va a llenar según el tiempo transcurrido.

Un recipiente se llena a través del tiempo trascurrido.

Entre más tiempo pasa, más se llena el recipiente.

Cuando uno abre una llave, entre más tiempo la tiene abierta más se llena.

El salario de una persona es por las horas trabajadas.

A un obrero se le paga según las horas de trabajo diario.

Entre más horas trabaja, más dinero ganará.

El gasto es según los objetos comprados.

Entre más artículos compra, más dinero gastará.

El gasto total depende de lo mucho que ha comprado.

El consumo de gasolina es por los kilómetros recorridos.

Entre más kilómetros corre más gasolina gasta.

Un resorte se estira dependiendo el peso sobre él.

El estiramiento de un resorte es por el peso que le agregue.

Por el peso que se va poniendo se estirará el resorte

Entre más peso tiene, más estiramiento tiene el resorte.

Un resorte se estira según el peso agregado.

El estiramiento es por el peso.

Entre más peso, más se alarga el resorte.

La (x) va a aumentando de 1 en 1, la (y) va aumentando de 5 en 5.

Tabla A: La fila x va aumentando un número, la y aumenta cinco veces más que la fila x.

En la tabla A los números de x van subiendo de 1 en 1, los números de y van subiendo de 5 en 5.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Porque por el tiempo que pasa se llena el recipiente.

Porque por las horas trabajadas le pagan un salario.

Que entre más tiempo que recorre el auto más gasolina gasta.

Que por más artefactos comprados más dinero invierte.

Tabla A, porque es la que va aumentando las dos. La (x) va a aumentando de 1 en 1, la (y) va aumentando de 5 en 5.

Tabla A, porque los números aumentan tanto en la fila "x" como también aumentan en la fija "y".

Porque en la Tabla A la "x" va aumentando, también "y" va aumentando.

Tabla A, porque tanto "x" como "y" van creciendo.

La tabla A: porque las dos magnitudes van aumentando.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se involucran en el problema tales como: expresión algebraica, ecuación lineal.

Emergentes: Los estudiantes en sus respuestas tienden a aproximarse a las nociones de:

- Magnitudes directamente proporcionales: los estudiantes muestran esas nociones cuando expresan que entre más tiempo pasa, más se llena el recipiente; entre más horas trabaja, más dinero ganará; entre más artículos compra, más dinero gastará; entre más kilómetros corre, más gasolina gasta; entre más peso, más se alarga el resorte.
- Dependencia de variables: algunos estudiantes aluden a esta noción cuando mencionan que el gasto total depende de lo mucho que ha comprado; un resorte se estira dependiendo el peso sobre él.

4.2.2 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #1

Se presenta una breve descripción de la dinámica de estudio desarrollada en la secuencia didáctica de aprendizaje #1 cuyo propósito fue introducir el concepto de función lineal.

Se presentaron en la pizarra problemas en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real, mismos que se les entregó a los estudiantes en una hoja de trabajo para que anotaran sus ideas y aportaciones individuales y grupales. Estas actividades se desarrollaron en dos momentos. En el primer momento se discutieron y se analizaron de manera individual y grupal los incisos propuestos, sin embargo, en los tres últimos incisos se hacía referencia al planteamiento y uso de una expresión algebraica que modelaba la situación presentada. Ello representó cierta dificultad para la mayoría de los estudiantes, pues no conocían hasta entonces la forma de una función lineal en su representación algebraica $y = mx$ para el primer y tercer problema e $y = mx + b$ para el segundo problema.

Así pues, en ese primer momento se permitió que los estudiantes plantearan un modelo sin relacionarlo a algún tipo de formalidad matemática. Luego, en un segundo momento se retomaron los mismos problemas con el objetivo de formalizar el concepto de función lineal a través de la construcción colaborativa y motivar de esta manera la participación de los estudiantes. Se solicitó a los estudiantes que plantearan el modelo de cada problema de acuerdo a la definición dada: "una función lineal o de primer grado se expresa como: $y = mx + b$ y cuando $b = 0$ su forma $y = mx$ (proporcionalidad directa) representa un caso especial de la función lineal" (SE, 2016b).

Con cada una de las situaciones planteadas se pretendía que los estudiantes reconocieran las magnitudes que intervenían en cada situación y que a su vez las identificaran como variable dependiente e independiente y establecieran relaciones entre ellas, a partir de ello, plantear un modelo matemático correspondiente a cada problema. Los problemas contenían un número de incisos orientados a desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes a través del análisis del cambio y la variación. Lo anterior tenía como propósito la construcción del concepto de función lineal. De manera general, con esta secuencia, se da lugar a la transformación tipo conversión, es decir, transitar del registro verbal al registro algebraico del concepto de función lineal.

A continuación se presenta el análisis por etapas de los problemas que correspondieron a la secuencia didáctica de aprendizaje #1.

4.2.2.1 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #1 (SD1P1)

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

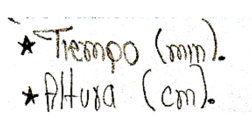
¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Problema #1 (P1): La situación planteada trata del llenado de un tanque cilíndrico. El tanque está vacío y se empieza a llenar de modo que la superficie del agua aumenta 2 cm de altura por minuto. El problema está compuesto por 13 incisos.

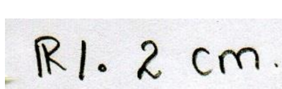
Con el P1 los estudiantes pueden relacionar que el llenado del tanque dependerá del paso del tiempo; descubrir que la superficie del agua aumentará el doble del tiempo; predecir estados futuros de la altura que alcanzará la superficie del agua después de un tiempo específico, y, finalmente, construir un modelo que represente la altura en términos del tiempo. Este problema se desarrolló con todo el grupo con las aportaciones individuales de los estudiantes.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Inciso a) ¿Qué cantidades intervienen en la situación?

- E9 

Inciso b) ¿cuántos cm mide la altura de la superficie del agua después de 1 minuto?

- E2 

Inciso c) Después de un minuto y medio, ¿cuánto se habrá llenado?

- E7

son 3 cm Porque si por un minuto se llena 2 cm solo se agarra 1cm centimetro del otro medio minuto, entonces ahi son 2+1=3.

Inciso d) ¿Después de 2 minutos?

- E10 4 cm.

Inciso e) Completa la tabla hasta llegar a 8 minutos

- E2

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (cm)	2	4	6	8	10	12	14	16

Inciso f) Podrías predecir ¿cuál será la altura después de 25 min?

- E1 * 50 cm porque la altura va aumentando el doble del tiempo.
- E2 R/=50 25×2=50
- E8 Los 50 de la altura los saque Porque se multiplica 25 x 2
- E12 50 porqué 50 sentimetros es EL DobLe en 25 minutos.
- E7 si predecir es algo que va suceder, entonces 50 es el doble de 25.

En este inciso, los estudiantes E1, E2, E8, E12, E7, recurren a la predicción, considerada por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) como una estrategia variacional. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos.

Inciso g) ¿Cuál es la relación entre la altura y el tiempo?

- E2 Entre màs tiempo, más llena estará.
- E12 Qué en mas tiempo pasa mas sube la altura del agua
- E5 que el tiempo pasa la altura aumenta
- E8 Que entre mas tiempo pasa mas aumenta la Altura

Inciso h) ¿La altura de la superficie del agua depende del tiempo o el tiempo depende de la altura de la superficie del agua?

- E4 La altura depende del tiempo porque entre mas tiempo tenga abierta la llave más se llena el tanque.
- E11 La altura depende del tiempo

Inciso i) ¿Qué cantidad depende de la otra?

- E5 Variable dependiente: Altura

Inciso j) ¿Qué cantidad es independiente?

- E9 Variable independiente Tiempo.

Las respuestas dadas por E4, E11, E5, E9 en los incisos h, i , j, reflejan la noción de dependencia entre dos magnitudes, aludiendo a uno de los aspectos sugeridos por Posada y Villa (2006) respecto al estudio del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Inciso k) ¿cómo podemos expresar con un modelo la altura en términos del tiempo?

- E7 $2 * x = y$ un modelo es como una Fórmula.
- E8 $y = 2x$

En este inciso los estudiantes se situaron de acuerdo con Vasco (2002), en el momento de creación de un modelo mental, los cuales fueron propuestos por E7 y E8. Además se llevó a cabo la transformación tipo conversión, al pasar del registro verbal al registro algebraico con la propuesta del modelo de la altura en términos del tiempo. Según Duval (2004a), la conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto en otro registro.

Inciso l) Usa el modelo para verificar la predicción de cuál sería la altura que alcanzaría la superficie del agua después de 25 minutos.

E4
$$y = 2x$$
$$y = 2(25)$$
$$y = \underline{50}$$

E7
$$2 * x = y$$
$$2 * 25 = y$$
$$50 = y$$

Del inciso m) Usa el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.

E7
$$2 * x = y$$
$$2 * 73 = y$$
$$146 = y$$

E9
$$y = 2(73) =$$
$$y = \underline{146.}$$

En este inciso los estudiantes se situaron según Vasco (2002) en el Momento de echar a andar el modelo. Los estudiantes E7 y E9 usaron el modelo propuesto para determinar la altura en un tiempo específico.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Tanque cilíndrico, vacío, llenar, volumen, superficie, aumenta, llenar, altura, minuto, magnitud, cantidad, tabla, predecir, variable dependiente, variable independiente, dependiente, cambia, relación, modelo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Más, sube, doble, dos veces, después, tiempo, depende, mitad, pasa, mayor, multiplicar.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron exclusivamente a lo solicitado en las consignas de los 13 incisos.

Sin embargo, un estudiante preguntó si fuera al revés, si pidieran el tiempo de llenado del tanque en vez de la altura.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Entre más tiempo, más llena estará.

Que si el tiempo pasa, la altura aumenta.

La altura depende del tiempo porque entre más tiempo tenga abierta la llave más se va a llenar el tanque.

50 cm porque la altura va aumentando el doble del tiempo.

Los 50 de la altura los saqué porque se multiplica 25×2.

50 porque 50 centímetros es el doble en 25 minutos.

La altura depende del tiempo.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

De manera general los estudiantes hacen afirmaciones con características variacionales de acuerdo a lo discutido durante el desarrollo del problema.

(…) porque entre más tiempo tenga abierta la llave, más se va a llenar el tanque.

(…) porque se multiplica.

Porque 50 centímetros es el doble de 25 minutos.

La altura depende del tiempo, porque entre más tiempo tenga abierta la llave más se va a llenar el tanque.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como magnitudes, cilindro, unidades de medida, superficie, volumen, altura, tabla, tiempo. Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: Los estudiantes tienden a aproximarse a la noción de:

- Magnitudes directamente proporcionales: expresan esas concepciones cuando mencionan que entre más tiempo pasa, más altura alcanzará la superficie del agua.
- Dependencia e independencia de variables: la mayoría de los estudiantes expresan que la altura que alcanza la superficie del agua depende del tiempo.
- Predicción: Un estudiante mencionó que “predecir es saber algo que va a suceder”

- Modelo: Un estudiante mencionó que un modelo es como una fórmula sin que tenga claro la concepción que tiene de este.

En el primer momento, la mayoría de los estudiantes expresan modelos con ciertos elementos adecuados y otros dejan la actividad sin evidencia de algún desarrollo. Solo dos estudiantes en particular construyeron el modelo correspondiente a la situación planteada, sin tener la noción formal de la función lineal en su forma $y = mx$ (para este problema). En ese primer momento E7 expresó el modelo como $2x = y$, asimismo E8 expresó el modelo como $y = 2x$. En el segundo momento, una vez que fue presentado el concepto de función lineal otros estudiantes lograron plantear el modelo de manera adecuada.

P**rocedimientos**: los estudiantes realizaron multiplicaciones sencillas para determinar cuál es la altura que alcanza la superficie del agua después de cada minuto indicado.

4.2.2.2 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #2 (SD1P2)

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Problema #2 (P2): Se refirió en este problema al salario diario que gana Raquel por vender baleadas. Cada noche se le pagan L.80 y por cada baleada que vende Raquel recibe L.2 adicionales. El problema consta de 11 incisos.

Con el P2 los estudiantes pueden identificar que el pago fijo representa una cantidad que permanece constante, pues venda o no baleadas, ella recibirá el mismo pago, sin embargo este salario diario se verá afectado de acuerdo al número de baleadas vendidas cada día. Lo anterior implica que un pago extra o adicional involucra un signo más. Se espera además que hagan predicciones de estados futuros del salario que recibiría Raquel por la venta de cierta cantidad de baleadas y finalmente propongan un modelo del salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas. Este problema se desarrolló con todo el grupo con las aportaciones individuales de los estudiantes.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Inciso a) ¿Qué cantidades intervienen en la situación?

- E1 * CANTIDAD DE BALEADAS.
  * PAGO POR VENDER
- E9 * Cantidad de baleadas.
  * Pago.

Inciso b) ¿Cuánto ganaría Raquel cada noche si vende?

- E4 El lunes 5 baleadas: 80 5 x 2 = 90 (80 mas 10 extra de las 5 baleadas a 2 L.
  El martes 10 baleadas: 80 + 10 x 2 = 100
  El miércoles 15 baleadas: 80+ 15 x 2 = 110
  El jueves 20 baleadas: 80 + 20 x 2 = 120
  El viernes 25 baleadas: 80+ 25 x 2 = 130
- E9 El lunes 5 baleadas: L. 80+10=90.
  El martes 10 baleadas: L 80+10x2=100.
  El miércoles 15 baleadas: 80+15x2=110.
  El jueves 20 baleadas: 80+20x2=120
  El viernes 25 baleadas: 80+25x2=130
  (80 y le da 10 de ademas. de las 5 baleadas a 2 lempiras.)

Inciso c) ¿Qué cantidad permanece fija (constante)? ¿Por qué?

- E2 L 80, Por ayudarle a vender baleadas.
- E3 80 Lps. Porque es el pago fijo que tiene al vender
- E4 80 L Porque es el pago diario por ayudarle a bender a Doña Maria Si no vende ninguna baleada siempre le van a dar los L80

- E5 80 LPS Porque es el Pago diario sin ProPina.
- E12 80L porqué si no vende valeadas siempre va aver un sueldo

En este inciso los estudiantes E2, E3, E4, E5, E12 identificaron la cantidad fija o constante argumentando su respuesta. Según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que permanece.

Inciso d) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

- E3 la Cantidad de valadas porque no se sabe cuanto se ba a vender

En este inciso, según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que varía. E3 identificó la cantidad que varía, argumentando su respuesta.

Del inciso e) Podrías predecir ¿cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas?

- E2 R Ganaría = 154 Lempiras. 80+37 x 2 =154
- E3 37 x 2 + 80 = 154
- E10 80 + 37 x 2 = 154.

En este inciso, los estudiantes E2, E3, E10, recurren a la predicción, considerada por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) como una estrategia variacional. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos.

Del inciso f) ¿Qué relación hay entre lo que gana Raquel diariamente y las baleadas vendidas?

- E3 entre mas baleadas vende mas pago tendra.

- E9 ★Entre más vende, más gana.
★Entre menos vende, menos gana

Inciso g) ¿Qué cantidad depende de la otra?

- E1) ¿Qué cantidad depende de la otra? * EL PAGO DEPENDE DE LA CANTIDAD DE BALEADAS VENDIDAS
Variable dependiente: y= PAGO

Inciso h) ¿Qué cantidad es independiente?

- E5 Variable independiente: x= Cantidad de baleadas.

Las respuestas dadas por E1 y E5 en los incisos g y h, reflejan la noción de dependencia entre dos magnitudes, aludiendo a uno de los aspectos sugeridos por Posada y Villa (2006) respecto al estudio del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Inciso i) ¿Cómo podemos expresar un modelo del salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas?

- E7 $80+x*2=y$ / $y=2x+80$
- E8 $80+(x)(2)=y$ $\{ y=mx+b$ $y=2x+80$

En este inciso los estudiantes se situaron de acuerdo con Vasco (2002), en el momento de creación de un modelo mental, los cuales fueron propuestos por E7 y E8.

Además se llevó a cabo la transformación tipo conversión, al pasar del registro verbal al registro algebraico con la propuesta del modelo de la altura en términos del tiempo.

Según Duval (2004a), la conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto en otro registro.

Inciso j) Usa el modelo para verificar la predicción de cuanto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.

- E8 $y = 2(37) + 80$ $\quad$ $\underline{y = 154}$
  $y = 74 + 80$

Inciso k) Usa el modelo para determinar cuánto ganaría Raquel si vende 51 baleadas

- E6 $y = 2(51) + 80$
  $y = \underline{182}$

  E8 $y = 2(51) + 80$
  $y = 102 + 80$
  $\boxed{y = 182}$

En este inciso los estudiantes se situaron según Vasco (2002) en el Momento de echar a andar el modelo. Los estudiantes E6 y E8 usaron el modelo propuesto para determinar cuánto ganaría Raquel si vendiera una cantidad específica de baleadas.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Pago, vender, cantidad de baleadas, salario, ganancia, cantidad, magnitud, cantidad fija, constante, variar, variable dependiente, variable independiente, dependiente, independiente, relación, lempiras, predecir, modelo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Más, dinero, sueldo, propina, ganancia, extra.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en las consignas de los once incisos.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Si no vende ninguna baleada, siempre le van a dar los L. 80

Siempre le van a dar los L.80 porque es su sueldo, pero sin propina.

La ganancia depende de las baleadas que vende porque entre más baleadas vende, más ganancia tiene.

Si no vende baleadas, siempre va a haber un sueldo.

Entre más vende baleadas más dinero gana y entre menos vende baleadas, menos dinero gana.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Siempre le van a dar los L.80 porque es su sueldo, pero sin propina.

(…) porque entre más baleadas vende más ganancia tiene.

Entre más vende baleadas, más dinero gana y entre menos vende baleadas, menos dinero gana.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como: magnitudes, ingresos.

Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: Los estudiantes tienden a aproximarse a la noción de:

- Dependencia de variables: la mayoría de los estudiantes identifican que el pago que recibirá Raquel depende de la cantidad de baleadas que venda.

De igual manera que en el P1, en el primer momento, la mayoría de los estudiantes expresan modelos con ciertos elementos adecuados y otros dejan la actividad sin evidencia de algún desarrollo. En particular, dos estudiantes lograron construir el modelo adecuado sin antes conocer la noción formal de la función en su forma $y = mx + b$ (para este problema), E7 expresó el modelo como $80 + x * 2 = y$, E8 expresó el modelo como $80 + x(2) = y$. En el segundo momento, una vez que el concepto de función lineal fue presentado, estos estudiantes reestructuraron los modelos que construyeron de acuerdo a la definición y otros estudiantes lograron plantear el modelo de manera apropiada.

Procedimientos: los estudiantes realizaron sumas y multiplicaciones sencillas para determinar cuál sería el salario de Raquel de acuerdo al número de baleadas vendidas.

4.2.2.3 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #3 (SD1P3)

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Problema #3 (P3): En este tercer problema se refiere a la ganancia de Roberto por la venta de arroz. Cada libra de arroz la vende a L.9. El problema contiene 10 incisos.

Con el P3 los estudiantes pueden identificar que la ganancia de Roberto por la venta de arroz dependerá o se verá afectado por la cantidad de arroz que venda, esto inducirá a los estudiantes a suponer que entre más arroz vende mayor es su ganancia. Surge la posibilidad que descubra que en este problema no interviene una cantidad de pago o ganancia extra, que identifique que la magnitud que varía es la cantidad de arroz que vende, que prediga estados futuros de la ganancia de Roberto por la venta de cierta cantidad de arroz, y, finalmente, proponga un modelo que exprese lo que gana Roberto respecto a la cantidad de libras de arroz vendidas. Esta actividad fue desarrollada en grupos de tres.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Inciso a) ¿Qué cantidades intervienen en la situación?

- G1
  * LA GANANCIA.
  * CANTIDAD DE ARROZ VENDIDO

  G5
  ★ Cantidad de Arroz
  ★ Ganacia.

Inciso b) Cuánto ganará Roberto si vende:

- G2
  - 1 libra de arroz: $9 \times 1 = 9$
  - $1\frac{1}{2}$ ~~libra de arroz~~: $9 \times 1\frac{1}{2} = 13.5$
  - 2 libras de arroz : $9 \times 2 = 18$
  - 3 libras de arroz: $9 \times 3 = 27$
  - 4 libras de arroz : $9 \times 4 = 34$
  - $4\frac{1}{2}$ libras de arroz: $9 \times 4\frac{1}{2} = 40.5$

- G4
  - 1 libra de arroz: $9 \times 1 = 9$ Lps
  - $1\frac{1}{2}$ ~~libra de arroz~~: $9 \times 1 + 4.5 = 13.50$ Lps
  - 2 libras de arroz : $9 \times 2 = 18$ Lps
  - 3 libras de arroz: $9 \times 3 = 27$ Lps
  - 4 libras de arroz : $9 \times 4 = 36$ Lps
  - $4\frac{1}{2}$ libras de arroz: $9 \times 4 + 4.5 = 40.50$ Lps

Inciso c) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

- G1
  #LA CANTIDA QUE BARIA ES LA CANTIDAD DE ARRO VENDIDO.
- G2
  * La cantidad de Arroz
  porque no se save la cantidad de Arroz que le venda a cada persono.
- G4
  Las Libras de arroz porque no se sabe cuantas Libras se venderán.
- G5
  ★ Depende de cuantas libras de arroz venda.
  ★ Porque si no vende no hay ganancia.

En este inciso, según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que varía.

Los Grupos G1, G2, G4 y G5 identificaron la cantidad que varía, argumentando su respuesta.

Inciso d) Podrías predecir ¿Cuánto ganaría Roberto si vende 19 $\frac{1}{2}$ libras de arroz?

- G1 $9 \times 19 + 4.5 = 175.5$
  * ES LO QUE GANARIA ROBERTO AL VENDER 19 ½ DE ARROZ.
- G2 $9 \times 19\frac{1}{2} = 175.5$
- G4 $9 \times 19 + 4.5 = 175.50$ Lps

En este inciso, los estudiantes de los Grupos G1, G2 y G4, recurren a la predicción, considerada por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) como una estrategia variacional. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos.

Inciso e) ¿Qué relación hay entre las cantidades que intervienen en la situación?

- G1 * QUE ENTRE MAS ARROZ VENDE MAS DINERO GANA.
- G3 entre mas vende arroz mas ganancia tiene
- G4 Las libras de arroz porque no se sabe cuantas libras se venderán.
- G5 * Entre mas arroz vendo más gano.
  * Entre menos arroz vendo menos gano.

Inciso f) ¿Qué cantidad depende de la otra?

- G4 Variable dependiente: y= La venta
- G5 Variable dependiente: y= Ganancia.

Inciso g) ¿Qué cantidad es independiente?

- G1 Variable independiente: x= EL ARROZ
- G3 Variable independiente: x= Cantidad de arroz

Las respuestas dadas por los estudiantes de los grupos G4, G5, G1 y G3 en los incisos f y g, reflejan la noción de dependencia entre dos magnitudes, aludiendo a uno de los aspectos sugeridos por Posada y Villa (2006) respecto al estudio del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Inciso h) Plantea un modelo que exprese lo que gana Roberto respecto a la cantidad de libras de arroz vendidas.

- G1 $9*(x)=y$ / $y=mx$ $\boxed{y=9x}$
- G2 $9*x=y$ $y=mx$ / $y=9x$

En este inciso los estudiantes se situaron de acuerdo con Vasco (2002), en el momento de creación de un modelo mental, los cuales fueron propuestos por los G1 y G2. Además se llevó a cabo la transformación tipo conversión, al pasar del registro verbal al registro algebraico con la propuesta del modelo de la altura en términos del tiempo.

Según Duval (2004a), la conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto en otro registro.

Inciso i) Usa el modelo para verificar la predicción que hiciste en el inciso d.

- G2 $9 * 19\frac{1}{2} = 175.5$ $y=mx$, $y=9(19\frac{1}{2})$, $y=175.5$

- G3 $y=9(19\tfrac{1}{2})$

  $y=175.5$

Inciso j) Usa el modelo para determinar cuánto ganará Roberto si vende 47 libras de arroz.

- G1 $y=9x$

  $y=9(47)$

  $y=423.$

- G2 $9\times 47=423$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} y=9(47) \\ y=423 \end{array}}$

- G4 $y=9x$

  $9\times 47=423$ Lps.

En este inciso los estudiantes se situaron según Vasco (2002) en el Momento de echar a andar el modelo. Los grupos G1, G2 y G4 usaron el modelo propuesto para determinar la ganancia de Roberto al vender una determinada cantidad de arroz.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Vender, libra de arroz, lempiras, ganancia, cantidades, magnitudes, modelo, variable dependiente, variable independiente, dependiente, independiente, relación, lempiras, varía, libras, predecir.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Venta, cantidad de arroz, personas, cuantas, depende, no, hay, entre, más, tiene, vende, sabe.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en las consignas de los diez incisos.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

La cantidad que varía es la cantidad de arroz vendido.

La cantidad de arroz porque no se sabe la cantidad de arroz que le venda a cada persona.

Las libras de arroz porque no se sabe cuántas libras se venderán.

Depende de cuantas libras de arroz venda, porque si no vende no hay ganancia.

Que entre más arroz vende más dinero gana.

Que entre más vende arroz más ganancia tiene.

Entre más arroz vendo más gano, entre menos arroz vendo menos gano.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

(…) porque no se sabe la cantidad de arroz que le venda a cada persona

(…) porque no se sabe cuántas libras se venderán.

(…) porque si no vende no hay ganancia.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como magnitudes directas.

Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: Los estudiantes en sus respuestas se aproximan a las nociones de:

- Dependencia de variables: la mayoría de los estudiantes identifican que la ganancia de Roberto depende de la cantidad de arroz que venda.

En el primer momento, algunos grupos expresaron modelos inadecuados asociados al problema y otros con ciertos elementos adecuados. Dos grupos plantearon el modelo adecuado sin antes conocer la noción formal de la función lineal en su forma $y = mx$ (para este problema). El G1 expresaron el modelo como $9 * (x) = y$, el G2 lo expresaron como $y = 9x$. En el segundo momento, una vez que el concepto de función lineal fue presentado, estos grupos reestructuraron los modelos que construyeron de acuerdo a la definición y otros grupos lograron plantear el modelo de manera apropiada.

Procedimientos: los estudiantes realizaron multiplicaciones sencillas y algunos incluyeron sumas para determinar cuál sería la ganancia de Roberto de acuerdo a la cantidad de arroz vendido.

4.2.3 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #2

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Se presentan dos actividades en un registro tabular. La primera contiene una tabla que registra los datos de la altura que alcanza la superficie del agua de una pila que aumenta 2 cm por minuto. Se le solicita al estudiante que determine las diferencias entre intervalos. La tarea está planteada para que los estudiantes identifiquen que las razones de cambio son constantes y que esa es una característica de las funciones lineales. La segunda actividad contiene 3 tablas en las que se les pide a los estudiantes que determinen cuál de las tablas corresponde a puntos de una función lineal y que justifique su respuesta. Lo anterior requiere que los estudiantes calculen diferencias entre intervalos en cada tabla, luego identifiquen qué tabla contiene los puntos de una función lineal al tener razones de cambio constantes. La tarea está planteada para que los estudiantes comprendan la noción de pendiente para posteriormente formalizarlo como su forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Ítem 1: La tabla registra los datos de la altura que alcanza la superficie del agua de una pila que aumenta 2 cm por minuto.

Minutos x	Altura $y = 2x$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

Inciso a) Encontrar la razón, $\frac{cambio\ de\ altura}{cambio\ de\ tiempo} = \frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ correspondiente a cada altura transcurrido cada minuto:

- E4

$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{10-8}{5-4} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{12-10}{6-5} = \frac{2}{1} = 2$
$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{8-6}{4-3} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{8-4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$	$\frac{cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{6-4}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$

- E8

$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{1-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{12-10}{6-5} = \frac{2}{1} = 2$
$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{4-6}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$	$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{10-2}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$
$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{8-10}{4-5} = \frac{-2}{-1} = 2$	$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2$

Con los cálculos realizados los estudiantes E4, E8 reflejaron el uso de la seriación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28). La Seriación consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos.

Inciso b) ¿Cómo son las razones en cada $\frac{cambio\ de\ altura}{cambio\ de\ tiempo} = \frac{cambio\ y}{cambio\ x}$?

- E4 Los razones son iguales.
- E6 Los Resultado me dieron iguales
- E8 Los Resultados fueros Iguales
- E9 que da igual Porque todo me da a igual resultado que es = 2

Ítem 2: Determine que tabla corresponde a puntos de una función lineal. Justifique su respuesta.

- E1

Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x} = \frac{17-11}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$\frac{Cambio\ y}{cambio\ x} = \frac{44-56}{12-16} = \frac{-12}{-4} = 3$

La tabla. C. Porque tiene las razones de cambio constante.

- E4

Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{38-17}{10-3} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{56-44}{16-12} = \frac{12}{4} = 3$$

La tobla C porque los respuestas son iguales.

- E5

Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{38-44}{10-12} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{56-17}{16-3} = \frac{39}{13} = 3$$

Lo tabla "C" tiene numero constantes.

- E6

Tabla A

x	y
1	1
2	4
5	25
7	49
10	100

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{25-49}{5-7} = \frac{-24}{-2} = 12$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{100-4}{10-2} = \frac{96}{8} \quad 12$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{25-1}{5-1} = \frac{24}{4} = 6$$

Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{56-44}{16-12} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \frac{11-38}{1-10} = \frac{-27}{-9} \quad 3$$

$$\frac{\text{Cambio } y}{x} = \frac{44-17}{12-3} = \frac{27}{9} = 3$$

La Tabla C tiene razones cambio constante

- E8

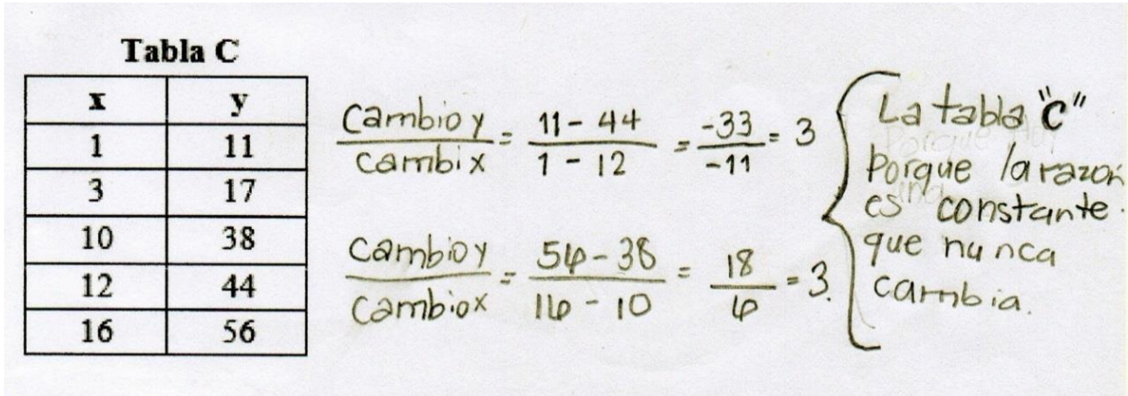


Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$\frac{\text{Cambio y}}{\text{cambi x}} = \frac{11-44}{1-12} = \frac{-33}{-11} = 3$

$\frac{\text{Cambio y}}{\text{Cambio x}} = \frac{56-38}{16-10} = \frac{18}{6} = 3.$

La tabla "C" porque la razon es constante. que nunca cambia.

- E12

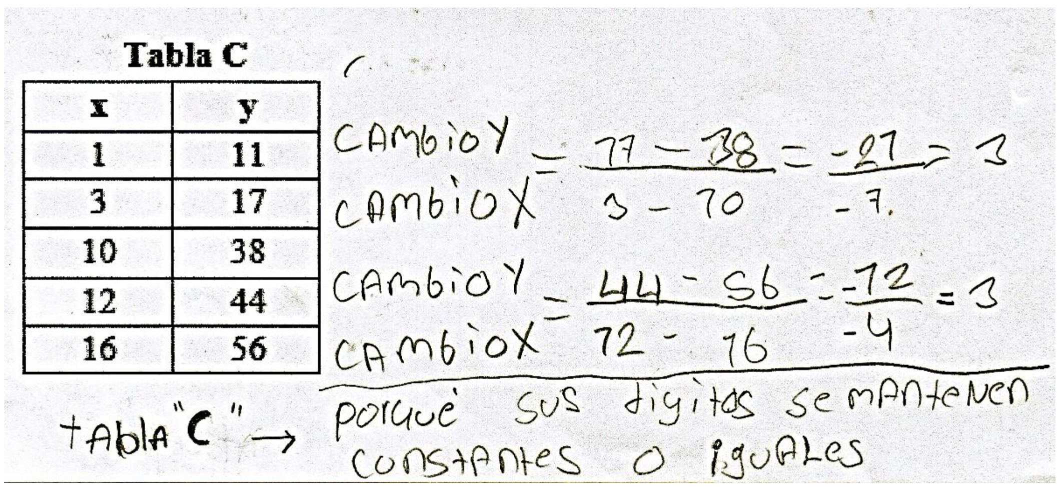


Tabla C

x	y
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

$\frac{\text{CAMbioY}}{\text{CAMbioX}} = \frac{11-38}{3-10} = \frac{-27}{-7.} = 3$

$\frac{\text{CAMbioY}}{\text{CAMbioX}} = \frac{44-56}{12-16} = \frac{-12}{-4} = 3$

tAblA "C" → porqué sus digitos se mAntenen constAntes o iguAles

Con los cálculos realizados los estudiantes E1, E4, E5, E6, E8, E12 reflejaron el uso de la seriación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28). La Seriación consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos. Lo anterior permitió además que los estudiantes descubrieran, identificaran y reconocieran la razón de cambio constante como elemento o característica principal que identifica a las funciones lineales, así como lo proponen autores como Posada y Villa (2006).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Tabla, altura, superficie, minuto, cambio de altura, cambio de tiempo, razones, razón de cambio, constante, minutos, centímetros.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Iguales, número, dígito, mantener, nunca cambia, mantener.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

En la actividad 2, un estudiante (E6) calculó diferencias entre intervalos en cada tabla, dos comparaciones por tabla, y descubrió que por los datos que había elegido, dos tablas la “A” y la “C” le resultaron con razones de cambio constantes. Así pues, calculó la diferencia con un tercer intervalo en cada tabla, y encontró que las razones de cambio para una de las tablas ya no eran constantes. Así pues, se usó esa situación para enfatizar que las razones de cambio de puntos de una función lineal cualquiera que sea el intervalo que se tome serán constante y que en una función lineal ese valor se le llama pendiente y que será el coeficiente de la variable x.

Cuando se presentó la noción de pendiente en su forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, un estudiante preguntó porque primero no va x_1 y también y_1 sino que va al revés $x_2 - x_1$ y también $y_2 - y_1$.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

La mayoría de los estudiantes concluyó que la “Tabla C” correspondía a puntos de una función lineal.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

De manera general, los estudiantes hacen afirmaciones con características variacionales de acuerdo a lo desarrollado durante la situación planteada.

(…) porque tiene las razones de cambio constante.

(…) porque las respuestas son iguales.

(…) porque tiene números constantes.

(…) porque la razón es constante que nunca cambia.

(…) porque sus dígitos se mantienen constantes o iguales.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como razón y diferencia. Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: las expresiones de los estudiantes cuando realizan cálculos de las diferencias entre intervalos en cada tabla, muestran que hay un acercamiento al concepto de:

- **Razón de cambio constante:** en este sentido, los estudiantes manifiestan esta concepción al mencionar que los resultados obtenidos son iguales, que se mantienen constantes, que nunca cambian o que se mantienen iguales al realizar los cálculos de resta entre intervalos de datos de las tablas.

Aproximándose a una de las características de la función lineal en la que a intervalos de igual longitud de la variable dependiente e independiente, estos se mantienen constantes.

- **Pendiente:** los estudiantes se aproximan a esta noción cuando descubren que el valor de las razones de cambio es constante cualquiera que sea el intervalo que se tome y en una función lineal ese valor se le llama pendiente.

Procedimientos*:* los estudiantes realizaron restas y divisiones sencillas para determinar las razones de cambio entre intervalos.

4.2.4 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #3

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Esta actividad fue una adaptación de un problema presentado por Posada y Villa (2006). Se plantea una situación en un registro en lenguaje verbal o natural apoyado en una tabla y en un contexto de situación problema real. La tabla muestra el sueldo mensual que ganaría Julia de acuerdo a la cantidad de horas extras trabajadas. El sueldo fijo es de L. 6,800. El problema contiene 17 preguntas orientadas al desarrollo del pensamiento variacional que les permitirá a los estudiantes completar la tabla, encontrar la pendiente y expresión algebraica que modela la situación planteada. Esta actividad fue realizada en grupos de 2 y 3 integrantes.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

- G2

x (Horas extras)	y (Sueldo mensual)
0	6,800
3	7,040
5	7,200
6	7,280
7	7,360
9	7,520
10	7,600

Inciso a) Para recibir L. 6,800 de sueldo ¿cuántas horas extras debe trabajar Julia?

- G1 Ninguna hora Porque EL sueldo fijo es 6,800.

- G2 No tiene que trabajar porque 6,800 es el pago Fijo

- G4 Ninguna hora extra trabajo Por que es su Sueldo Fijo.

En este inciso los estudiantes de los grupos G1, G2, G4, identificaron la cantidad fija o constante argumentando su respuesta. Según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que permanece.

Inciso b) ¿Cuánto es el cambio de salario mensual al trabajar 3 horas extra respecto a no trabajar horas extras?

- G2 7,040 - 6,800 = 240
  El Cambio de salario mensual es de 240$ ya que trabaja Horas Extras

- G3 7,040 - 6800 = 240
  Qué anqué ella no trabaje siempre tendrA Los = 6,800 pero si trabaja tresoras obtentra = 7040

- G4 Restamos
  $$\begin{array}{r} 7,040 \\ \underline{6,800} \\ 240 \end{array}$$

Con los cálculos realizados los estudiantes reflejaron el uso de la comparación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28), los estudiantes de los grupos G2, G3, G4 compararon el salario mensual de Julia al trabajar 3 horas extras respecto a no trabajar horas extras. La comparación, está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados.

Inciso c) ¿Cuánto representa ese cambio de salario mensual por hora extra trabajada?

- G2 240÷3=80 porque quiero saber el valor de la hora y al dividirla me da ese valor.
- G4 Dividimos: 240÷3=80

Inciso d) ¿Qué representa ese valor?

- G2 Que cada hora extra que trabaja Son 80£ mas
- G4 80 LPS, RePresenta Cada hora extra.
- G5 R/ Representa 1 hora extra trabajado

Inciso e) ¿Cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 6 horas extra?

- G2 Ganara 7,280 { 7,200 + 80 = 7,280
- G4 Ganaria 7,280 si trabaja 6 horas extras 6x80+6,800
- G5 R/ 7,280 480+ 6,800 = 7,280.

Inciso f) ¿Cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 7 horas extra?

- G2 Recibira 7,360 { 7,280 +80 = 7,360
- G4 R/ 7,360 7,280 + 6800 = 7,360
- G5 Ganaria 7,360 si trabaja 7 horas extras 7x80+6,800

Inciso g) ¿Cuánto es el cambio de salario mensual al ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040?

- G2 Sera 160 → porque, 7,200 − 7,040 = 160

- G4 Restomos 7,200
  7,040
  160

Con los cálculos realizados los estudiantes reflejaron el uso de la comparación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28), los estudiantes de los grupos G2, G4 compararon el salario mensual de Julia de ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040.

Inciso h) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

- G1 2 hrs extra. Porque Vale 80 cada hora Extra
- G2 Repiecenta 2 horas extras porque 160 ÷ 80 = 2.
- G4 160 ÷ 80 = 2 hrs extras

Inciso i) ¿cuántas horas extra representa ganar L.7200 de sueldo?

- G1

7040 + 80 + 80 = 7,200
Seran 5 hrs Extra

Porque si con 3 hrs gano 7040
Sumando los 160 lps de 2 hrs
Extra sale a 7200 Lps.

- G4

Trabajo 5 horas extras Para ganar 7,200
80x5 = 400 + 6,800 = 7,200

(llegamos a conclución de
5 hrs. Le sumamos 2 hrs
extra más las 3 hrs
extras

- G2

Repecenta 5 horas extras. 7,200 - 6,800 = 400 ÷ 80 = 5.

Inciso j) ¿Cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?

- G1 Lo diferenua sera 160 lps. 7,520 - 7360 = 160.
- G2 El cambio 160 L porque 7,520 - 7,360 = 160 L.
- G4 7,520 − 7,360 = 160 RePresento 2 hrs extra

Con los cálculos realizados los estudiantes reflejaron el uso de la comparación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28), los estudiantes de los grupos G1, G2, G4 compararon el salario mensual de Julia de ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras.

Inciso k) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

- G2 Repecenta dos horas porque 160 ÷ 80 = 2
- G4 2 hrs extra

Inciso l) ¿Cuántas horas extra representa ganar L.7520 de sueldo?

G1 Repreccenta 9 hrs de trabajo Extra. sumando 7 hrs y las 2 hrs Extra

G2 Reprecenta a 9 horas porque 7,520 - 6,800 = 720 ÷ 80 = 9.

G4 RePresenta 9 hrs (llegamos a conclución a 9 hrs. y le sumamos 2 hrs extra más 7 hrs)

Inciso m) ¿Cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?

G2 Seta Igual porque 240 es 7,600 - 7360 = 240

G4
$$\begin{array}{r} 7{,}600 \\ -\ 7{,}360 \\ \hline 240 \end{array}$$
RePresenta 3 hrs extra

Con los cálculos realizados los estudiantes reflejaron el uso de la comparación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28), los estudiantes de los grupos G2, G4 compararon el salario mensual de Julia de ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras.

Inciso n) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

G2 Reprecento 3 horas porque 240 ÷ 80 = 3

G4 3 hrs extra (llegamos a conclución a 10 hrs y le sumamos 3 hrs. extras ma 7 hrs).

Del inciso o) Entonces ¿Cuántas horas extra representa ganar L.7600 de sueldo?

G1 10 hrs Extra sumando las 7 hrs y las 3 extra.

G2 Reprecentara 10 horas porque 7600 - 6,800 = 800 ÷ 80 = 10

G4 RePresentan 10 hrs extra

G5 R 7600 - 6,800 = 800 ÷ 80 = 10

Del inciso p) Encuentre la pendiente con los datos registrados en la tabla.

G1 $m = \frac{6800 - 7200}{0 - 5} = \frac{-400}{-5} = 80$ $\quad m = 80$

G2 $\frac{7600-7200}{10-5} = \frac{400}{5} = 80 \quad m=80$

G3 $\frac{7{,}040 - 7360}{3 - 7} = \frac{-320}{-4} = 80$

G4 $m = \frac{7{,}040 - 7{,}200}{3 - 5} = \frac{-160}{-2} = \underline{\underline{80}} \quad \underline{\underline{m=80}}$

G5 $\frac{7600-7520}{10-9} = \frac{80}{1} = \boxed{80} \qquad \frac{7360-7280}{7-6} = \frac{80}{1} = \boxed{80}$

Del inciso q) ¿Qué expresión matemática modela el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas?

- G1

$$\begin{aligned} &y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (0, 6800) \\ &y - 6800 = 80(x - 0) \\ &y - 6800 = 80x - 0 \\ &y = 80x - 0 + 6800 \\ &y = 80x + 6800. \end{aligned}$$

- G2

$$\begin{aligned} &y - y_1 = m(x - x_1) \ (\overset{x}{9}, \overset{y_1}{720}) \\ &y - 7520 = 80(x - 9) \\ &y - 7520 = 80x - 720 \\ &y = 80x - 720 + 7520 \\ &y = \underline{80x + 6{,}800} \end{aligned}$$

- G3

$$\begin{aligned} &y - 7{,}600 = 80(x - 10) \\ &y - 7{,}600 = 80x - 800 \\ &y = 80x - 800 + 7600 \\ &y = 80x + 8400 \end{aligned}$$

- G4

$$y = 80x + 6{,}800$$

$$(\overset{x_1}{6}, \overset{y_1}{7{,}280})$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7{,}280 = 80(x-6)$$
$$y = 80x - 480 + 7{,}280$$
$$y = 8x + 6{,}800$$
$$y = mx + b$$

- G5

$$y = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{horas} \\ \text{extra}}}{80}x + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sueldo} \\ \text{fijo}}}{6{,}800}$$

$$y - 7600 = 80(x - 10)$$
$$y - 7600 = 80x - 800$$
$$y = 80x - 800 + 7600$$
$$y = 80x + 6800$$

Los estudiantes de los distintos grupos G1, G2, G3, G4, G5 recurrieron a las trasformaciones tipo tratamiento al transitar en el registro algebraico mediante la forma punto-pendiente para encontrar la expresión algebraica o modelo del sueldo mensual de Julia en términos de las horas extras trabajadas. Asimismo el encontrar la expresión algebraica que representa la situación planteada permitió a los estudiantes transitar del registro tabular al registro algebraico, llevándose acabo con esta la transformación tipo conversión, ambas transformaciones planteadas por Duval (2004a) en su teoría de las representaciones semióticas.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Horas extras, sueldo mensual, cantidad de horas extras trabajadas, valor, sueldo fijo, cambio, tabla, pendiente, expresión matemática, modelo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Horas, hora extra trabajada, trabajo, lempiras, recibir, ganaría, recibiría, pago extra, ninguna, vale, sumando, más, restar, diferencia, dividiendo,

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en las consignas de los 17 incisos.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes hacen afirmaciones con características variacionales respecto a lo tratado durante el desarrollo del problema planteado.

Para recibir L. 6,800 de sueldo, Julia no necesita trabajar ninguna hora extra porque es su sueldo fijo.

Si Julia trabaja 3 horas extras, obtendrá L. 7,040.

El pago por hora extra es L. 80.

L. 80 representa el pago por el trabajo de una hora extra.

Que cada hora extra que trabaja son L.80 más.

Ganaría L. 7,280 si trabaja 6 horas extras.

Ganaría L. 7,360 si trabaja 7 horas extras.

Porque si con 3 horas gana L. 7,040 sumando los L.160 de 2 horas extra sale a L. 7,200 así que para ganar L. 7,200 debe trabajar 5 horas extra.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Para recibir L. 6,800 de sueldo, Julia no necesita trabajar ninguna hora extra porque es su sueldo fijo.

Si Julia trabaja 3 horas extras obtendrá L. 7,040.

Porque si con 3 horas gana L. 7,040 sumando los L.160 de 2 horas extra sale a L. 7,200, así que para ganar L. 7,200 debe trabajar 5 horas extra.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto a los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como adición, sustracción, cociente, pendiente, función lineal. Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: los procesos mostrados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad les permitió acercarse a la función lineal desde una mirada variacional, ya que realizaron diferentes cálculos y comparaciones entre intervalos (esto se detalla más adelante en los procedimientos usados por los estudiantes).

Los estudiantes se aproximan a una de las concepciones de derivada como razón de cambio, misma que es utilizada a nivel universitario.

Procedimientos: los estudiantes realizaron sumas, restas, multiplicaciones y divisiones sencillas para completar la tabla. Hicieron uso de sus concepciones sobre pendiente de una recta al tomar y relacionar distintos valores de la tabla, calcularon las diferencias entre ellos y encontraron su valor. La mayoría de los grupos hicieron uso de la forma punto- pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$ donde se auxiliaron de la transposición de términos para determinar la expresión algebraica que modelaba el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas. En particular, un grupo de estudiantes expresó el modelo usando sus concepciones sobre la forma de la función lineal $y = mx + b$ identificando $m = 80$ que es la pendiente y que representa el valor de una hora extra y $b = 6{,}800$ como el sueldo fijo y uso de la forma punto- pendiente.

4.2.5 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #4

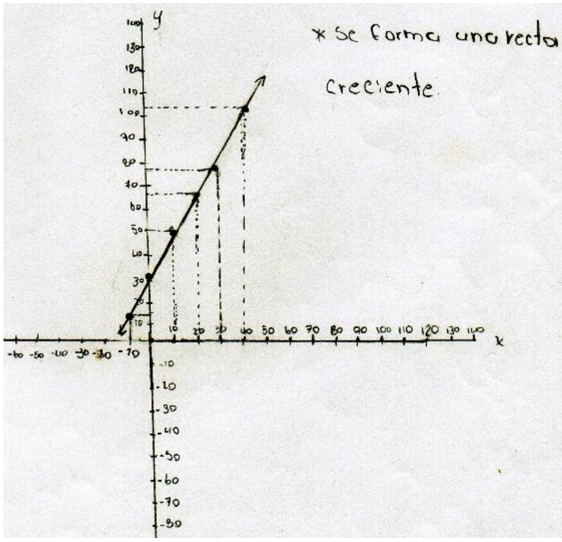
Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

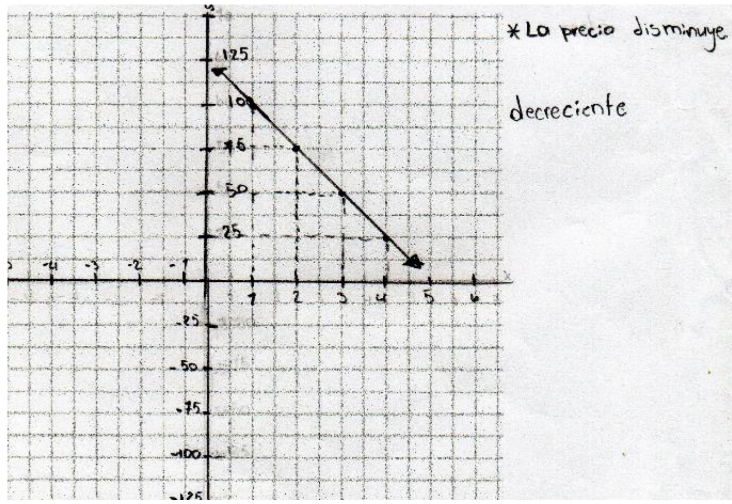
Esta actividad se presenta en un registro tabular. Se presentan dos situaciones: la primera fue una adaptación de un problema presentado por Steweart, Redlin y Watson (2012). Se plantea una tabla que contiene los datos de la temperatura medida en grado Celsius en relación a la temperatura medida en grados Fahrenheit. En la segunda situación se plantea una tabla que contiene los precios de entrada a un circo durante cuatro semanas. Lo anterior requiere que los estudiantes construyan un plano cartesiano, identifiquen los ejes, grafiquen los puntos que representan las temperaturas Celsius y Fahrenheit para la primera actividad y las semanas y el precio de entrada en la segunda actividad. Finalmente, que unan los puntos. Esto les permitirá a los estudiantes identificar que la gráfica de una función lineal o de primer grado es una recta e identificar que esta puede ser creciente o decreciente. Esta actividad se realizó en grupos de dos.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

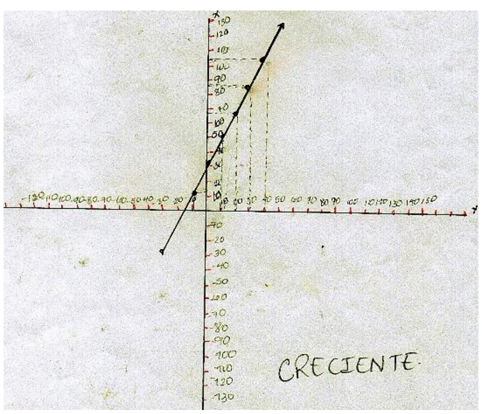
G1


* Se forma una recta
creciente

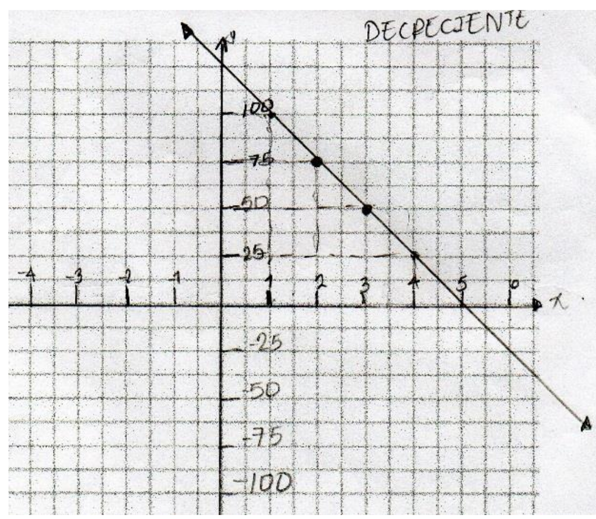
G1


* La precio disminuye
decreciente

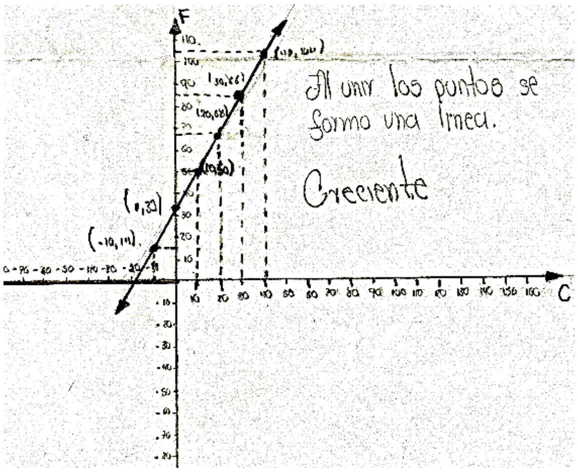
G2


CRECIENTE

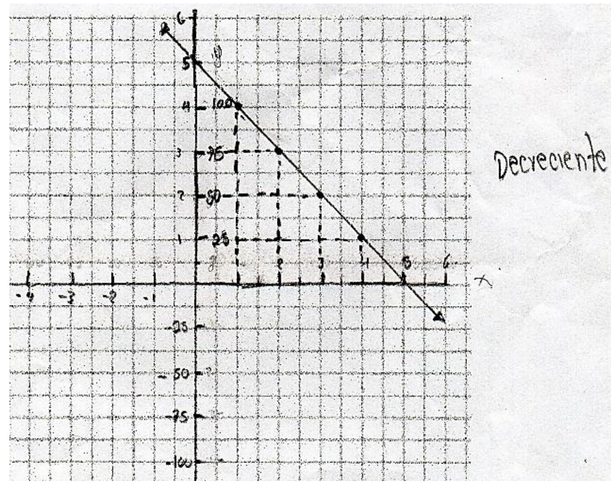
G2


DECRECIENTE

G3



G3



Las producciones de los estudiantes de los grupos G1, G2, G3 muestran que mediante el registro grafico lograron visualizar que el comportamiento de la gráfica de una función lineal puede ser creciente o decreciente, así como lo señala Macías (2014). Además de recurrir a la transformación tipo conversión al transitar del registro tabular al gráfico, Duval (2004a).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Tabla, plano cartesiano, eje x, eje y, recta horizontal, recta vertical, coordenadas, graficar, puntos, temperatura Celsius °C, temperatura Fahrenheit °F, lineal, semanas, valor de la entrada.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Recta, línea, creciente, decreciente.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los puntos van formando una línea.

Se forma una recta.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Al unir los puntos se forma una línea.

Se forma una recta.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto a los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) implicados en esta actividad como puntos, recta, plano cartesiano. Los estudiantes tienen las ideas básicas, lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: Los estudiantes al trazar la gráfica de la función lineal llevan implícito la definición de lugar geométrico.

Procedimientos: los estudiantes construyeron un plano cartesiano, identificaron los ejes, graficaron los puntos que representan las temperatura Celsius y Fahrenheit (para la primera situación) y las semanas y el valor de la entrada al circo (para la segunda situación), y, finalmente, unieron con regla los puntos que forman una recta, la que representa la gráfica de una función lineal, identificando cuando la recta será creciente o decreciente.

4.2.6 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #5

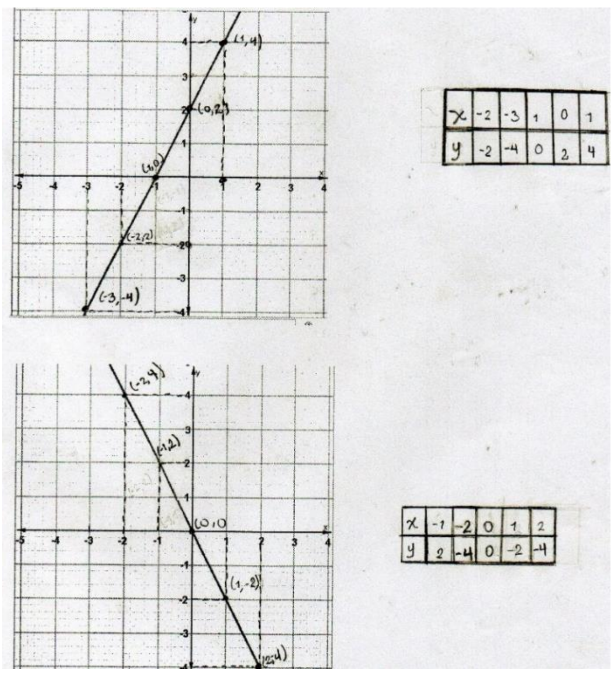
Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

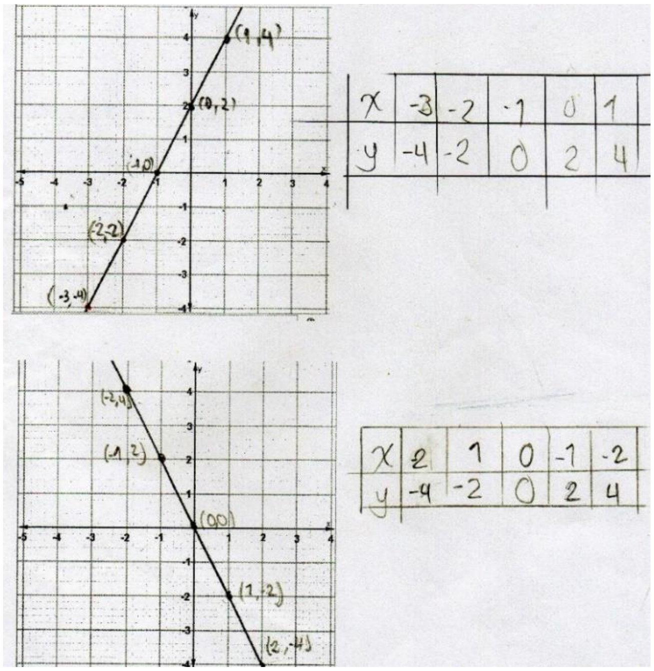
La actividad se presenta en un registro gráfico y consiste en que el estudiante pueda construir una tabla que contenga los puntos que corresponden a cada gráfica planteada. Con esta actividad se requiere que los estudiantes identifiquen las coordenadas que representan los puntos contenidos en la recta y construir la tabla que contenga esos puntos.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

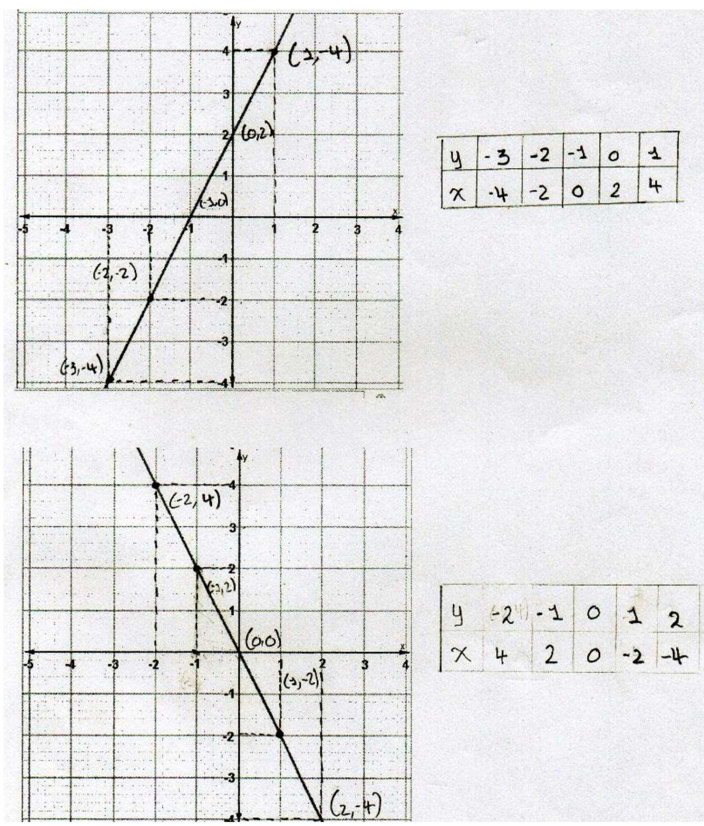
E1



E7



E10



Las producciones de los estudiantes E1, E7, E10 muestran que han recurrido a la transformación tipo conversión al transitar del registro gráfico al registro tabular, según Duval (2004a).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Tabla, función lineal, gráfica.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Variable x, variable y.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Dada la naturaleza de la consigna, los estudiantes no expresaron mediante un registro escrito algún tipo afinación y se limitaron a elaborar una tabla.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

De igual manera los estudiantes tampoco presentaron argumentos dada la naturaleza de la actividad planteada.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: Con referencia a los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) implicados en esta actividad como coordenadas cartesianas, representación gráfica. Los estudiantes tienen las ideas básicas, lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: los estudiantes, al ubicar e identificar las coordenadas cartesianas de los puntos contenidos en la gráfica de la función lineal en el plano, muestran una aproximación a la definición de representación rectangular de un punto.

P**rocedimientos**, los estudiantes en su mayoría construyeron una tabla horizontal con casillas que contenía las variables x e y en los que escribieron los números que correspondían a las coordenadas de los puntos que identificaron en cada gráfica. La mayoría de los estudiantes tomaron como base las coordenadas rectangulares de puntos de la gráfica para trasladarlos a la tabla.

4.2.7 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #6

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

En esta actividad se presenta una tabla que contiene cuatro expresiones algebraicas que representan funciones lineales y cuatro ítems en los que se le pide al estudiante identificar en cada expresión algebraica la ordenada al origen (formada por el par cero y el valor de b (0,b)), y la pendiente(el coeficiente de x.), escribir la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ e interpretar la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

E1

Función Lineal	Ordenada al origen	Pendiente	$\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$	Interpretación de $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$
a) $y = 3x$	(0,0)	3	$\frac{3}{1}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 1 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza 3 hacia Arribo
b) $y = -2x - 5$	(0,-5)	-2	$\frac{-2}{1}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza -1 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza -2 hacia Abajo
c) $y = \frac{2}{3}x + 6$	(0, 6)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 3 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza 2 hacia Arribo
d) $y = -\frac{3}{4}x + 1$	(0, 1)	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 4 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza -3 hacia Abajo

E8

Función Lineal	Ordenada al origen	Pendiente	$\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$	Interpretación de $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$
a) $y = 3x$	(0,0)	3	$\frac{3}{1}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 1 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza 3 hacia Arribo
b) $y = -2x - 5$	(0,-5)	-2	$\frac{-2}{1}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza -1 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza -2 hacia Abajo
c) $y = \frac{2}{3}x + 6$	(0, 6)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 3 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza 2 hacia Arribo
d) $y = -\frac{3}{4}x + 1$	(0, 1)	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	**A partir de la ordenada al origen** $\boldsymbol{x}$ avanza 4 hacia la Derecho $\boldsymbol{y}$ avanza -3 hacia Abajo

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Función lineal, ordenada al origen, pendiente, razón de cambio, avanza, hacia.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Derecha, izquierda, arriba, abajo.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

De acuerdo a la forma de la pendiente como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$, los estudiantes hicieron las siguientes afirmaciones:

- Pendiente: 3 como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $\frac{3}{1}$; x avanza 1 hacia la derecha, y avanza 3 hacia arriba.
- Pendiente: -2 como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $-\frac{2}{1}$; x avanza 1 hacia la derecha, y avanza 2 hacia abajo
- Pendiente: $\frac{2}{3}$ como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $\frac{2}{3}$; x avanza 3 hacia la derecha, y avanza 2 hacia arriba
- Pendiente: $-\frac{3}{4}$ como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $-\frac{3}{4}$; x avanza 4 hacia la derecha, y avanza 3 hacia abajo

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los argumentos de los estudiantes obedecen al signo de la pendiente para determinar la dirección hacia arriba, abajo, derecha e izquierda, entre ellos:

- Pendiente: 3 como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $\frac{3}{1}$

  Interpretación: x avanza 1 hacia la derecha, y avanza 3 hacia arriba.

- Pendiente: -2 como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $-\frac{2}{1}$

  Interpretación: x avanza 1 hacia la derecha, y avanza 2 hacia abajo

- Pendiente: $\frac{2}{3}$ como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $\frac{2}{3}$

  Interpretación: x avanza 3 hacia la derecha, y avanza 2 hacia arriba

- Pendiente: $-\frac{3}{4}$ como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ → $-\frac{3}{4}$

  Interpretación: x avanza 4 hacia la derecha, y avanza 3 hacia abajo

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto a los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como expresión algebraica de la función lineal, pendiente, razón de cambio. Los estudiantes tienen las ideas básicas, lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: Los estudiantes tienden a aproximarse a la interpretación de la razón de cambio, al utilizar condiciones verbales del movimiento (dirección arriba, abajo, derecha e izquierda) de las variables x e y.

4.2.8 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #7

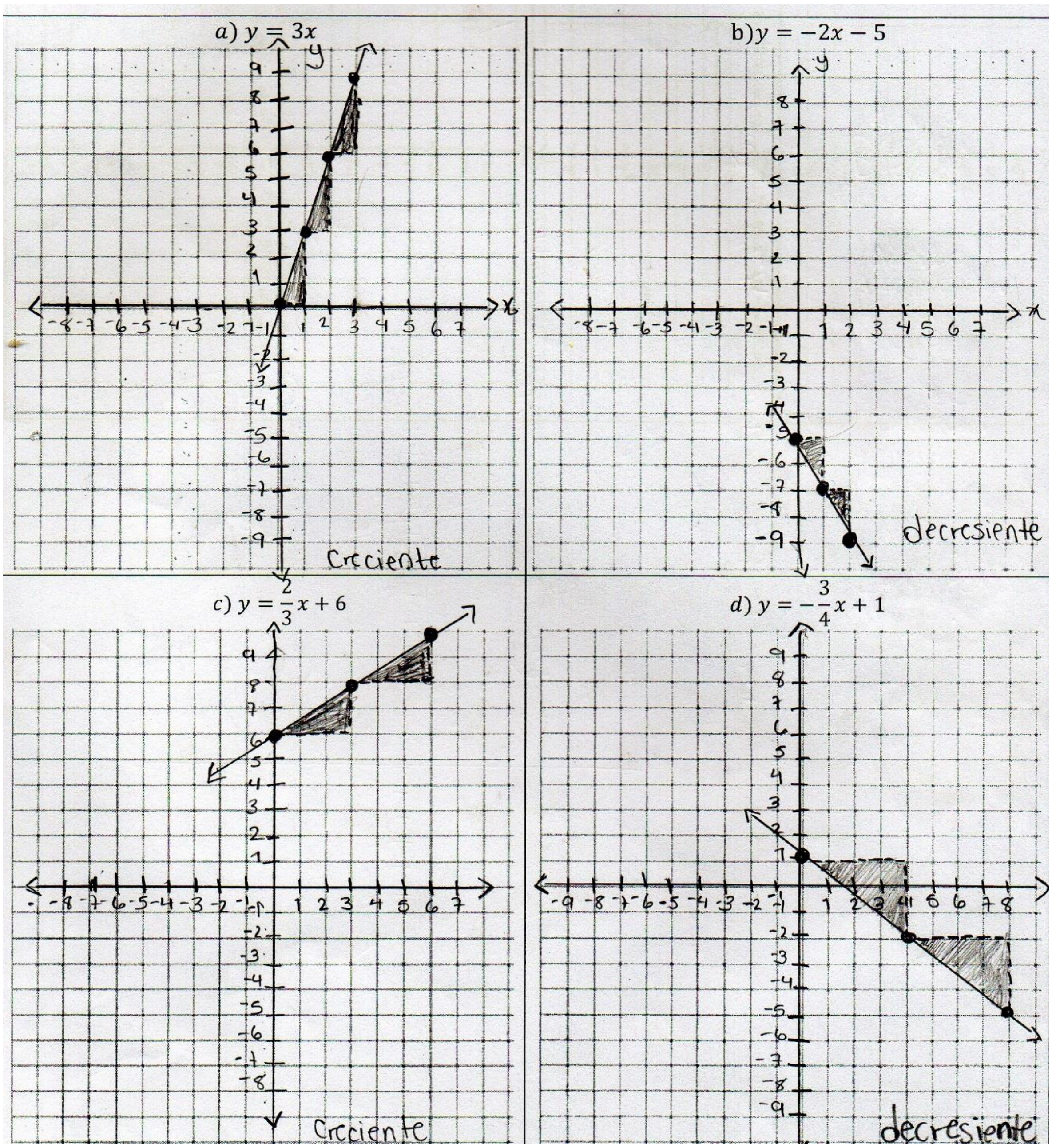
Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

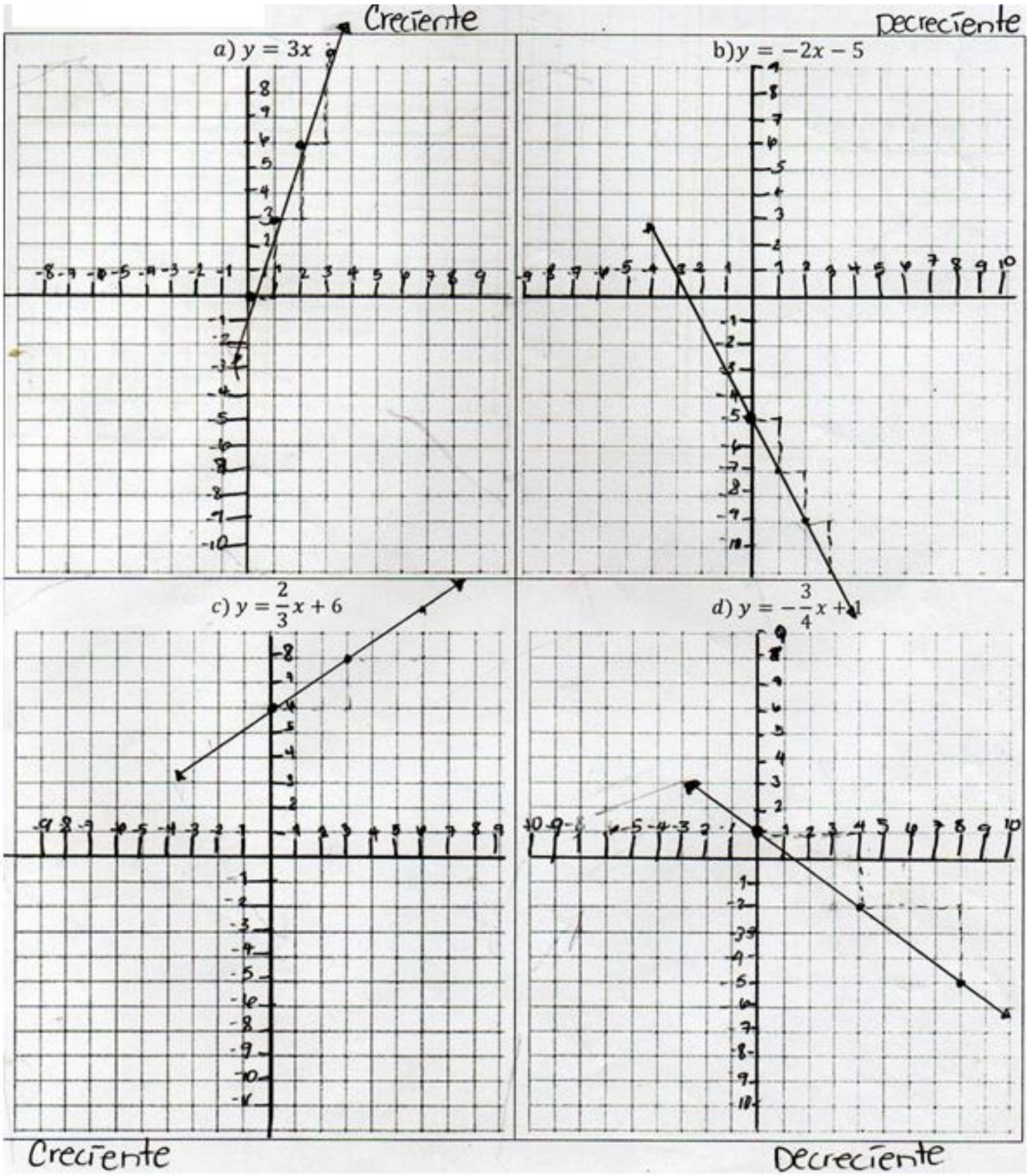
La actividad se presenta en un registro algebraico y se requiere que el estudiante grafique en un plano cartesiano cada función lineal presentada en la actividad anterior. Con esta actividad se pretende que el estudiante identifique si la gráfica es creciente (inclinada hacia la derecha-arriba) si la pendiente es positiva o decreciente (inclinada hacia la izquierda-abajo) si la pendiente es negativa.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

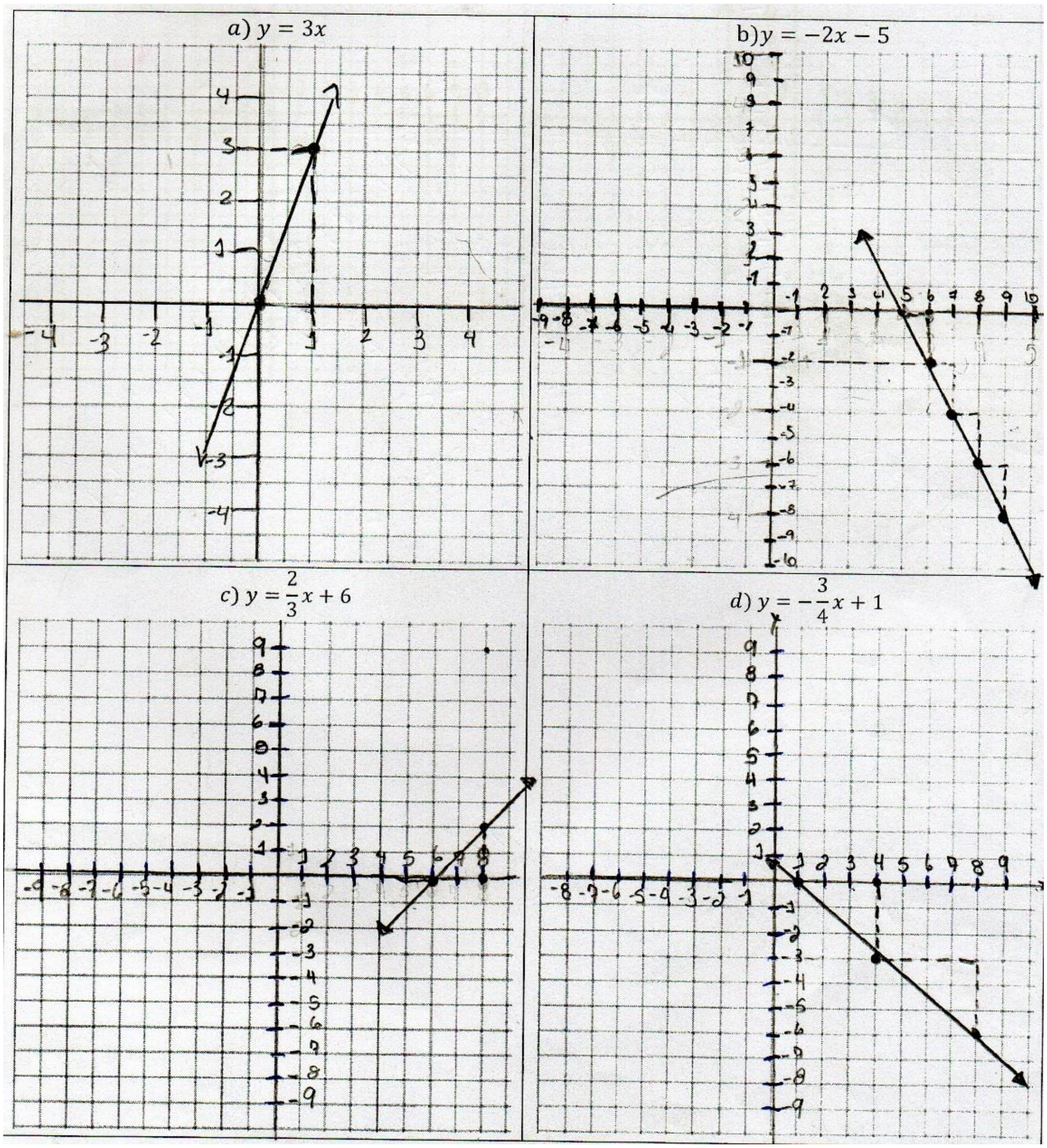
E2



E8


Creciente
Decreciente
a) $y = 3x$
b) $y = -2x - 5$
c) $y = \frac{2}{3}x + 6$
d) $y = -\frac{3}{4}x + 1$
Creciente
Decreciente

E3



Las producciones de los estudiantes E2, E8, E3 reflejan la interpretación de la razón de cambio constante para graficar las funciones lineales planteadas, al trazar segmentos que indican las condiciones verbales de los movimientos (dirección arriba, abajo, derecha e izquierda) correspondientes a las variables x e y en el plano cartesiano, esto también les permitió según Castiblanco y Moreno (2004) el estudio dinámico de la variación.

Mediante el registro gráfico, los estudiantes lograron visualizar que el comportamiento de la gráfica de una función lineal puede ser creciente o decreciente, así como lo señala Macías (2014). Además de recurrir a la transformación tipo conversión al transitar del registro algebraico al gráfico de acuerdo con Duval (2004a).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Creciente, decreciente.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Dada la naturaleza de la actividad planteada, los estudiantes se limitaron a contestar la consigna (graficar en el plano y determinar si la recta es creciente o decreciente).

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes indicaron si las gráficas eran crecientes o decrecientes.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Los estudiantes no presentaron argumentos escritos en la actividad planteada.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto a los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como la gráfica de la función lineal, los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: los estudiantes se aproximan a la interpretación de la razón de cambio en las gráficas de la función lineal, al trazar segmentos que indican las condiciones verbales del movimiento (dirección arriba, abajo, derecha e izquierda) correspondientes a las variables x e y en el plano cartesiano.

4.2.9 Análisis de secuencia didáctica de aprendizaje #8

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

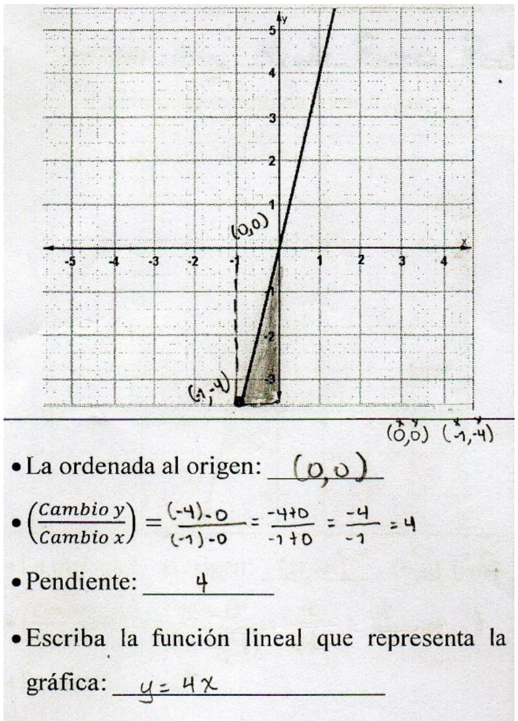
¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Esta actividad se presenta en un registro gráfico. Se plantean cuatro gráficas de funciones lineales en las que a través de identificar la ordenada al origen, identificar dos puntos de la gráfica, determinar cambios tanto en y como en x o determinar la distancia vertical y horizontal para encontrar la pendiente, y, finalmente, los estudiantes escriban la expresión matemática que modela cada gráfica.

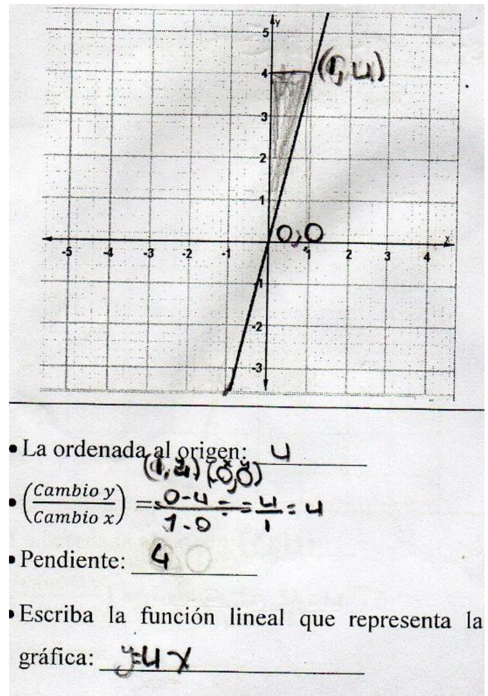
Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Gráfica 1

E1

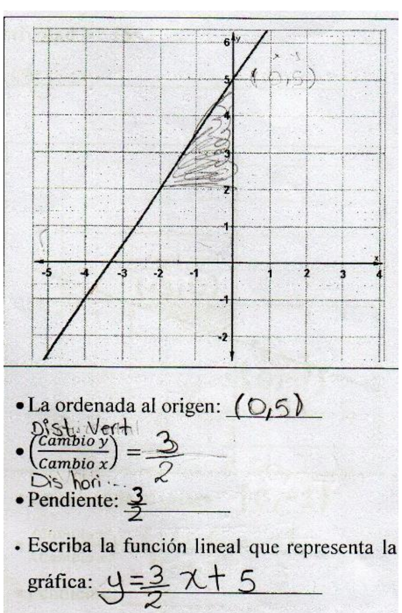


E4

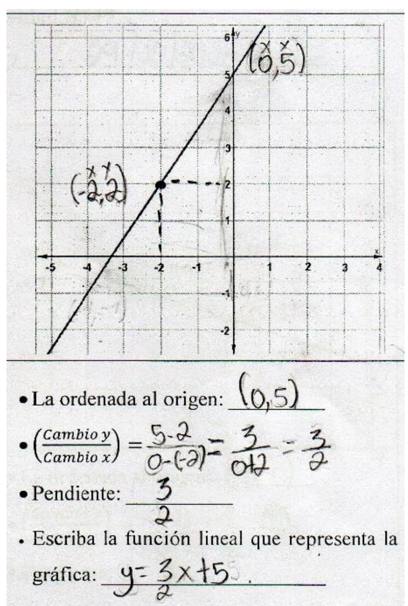


Gráfica 2

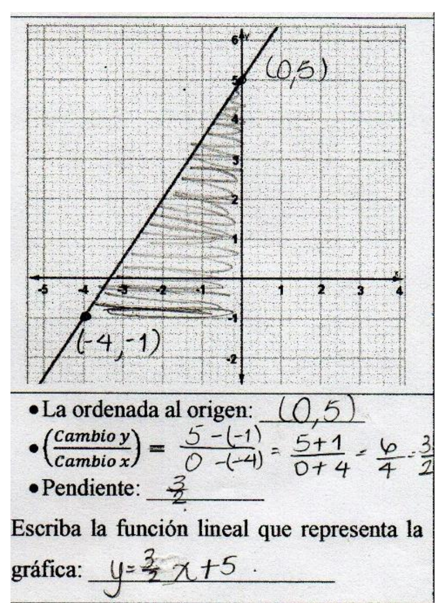
E2



E5

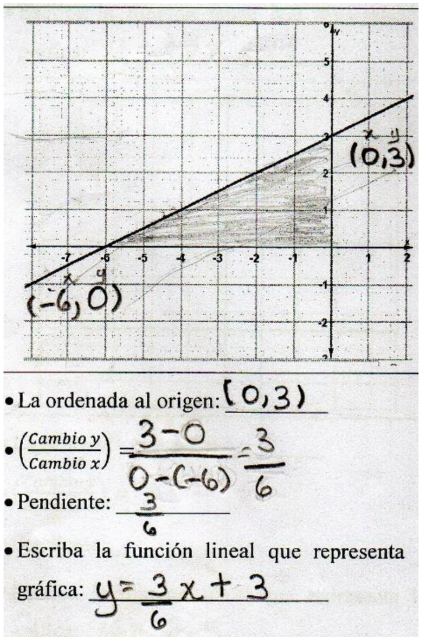


E8

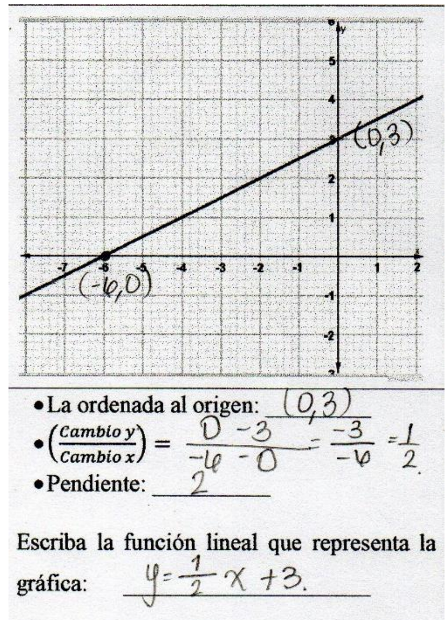


Gráfica 3

E2

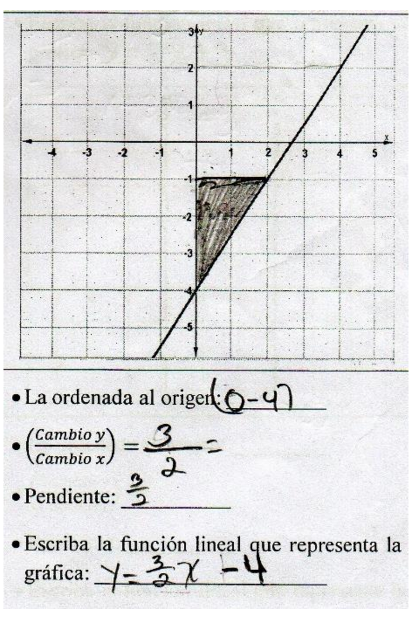


E8

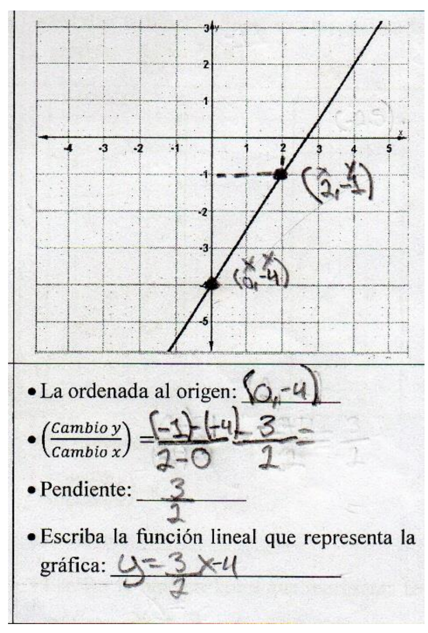


Gráfica 4

E6



E9



Los estudiantes E1, E2, E4, E5, E6, E8, E9 muestran que han recurrido a la transformación tipo conversión al transitar del registro gráfico al registro algebraico de acuerdo con Duval (2004a).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Gráfica, identifique, ordenada al origen, función lineal, pendiente, cambio y, cambio x.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Dada la naturaleza de la actividad planteada, los estudiantes se limitaron a contestar la consigna.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Dada la naturaleza de la consigna, los estudiantes no expresaron mediante un registro escrito.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

De igual manera, dada la naturaleza de la consigna, los estudiantes no expresaron mediante un registro escrito algún tipo argumento.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto a los objetos estudiados?

Previas: De acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como pendiente y función lineal. Los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la actividad con sus conocimientos previos.

Emergentes: los estudiantes no manifestaron concepciones distintas a las ya estudiadas.

Procedimientos: los estudiantes identificaron la ordenada al origen y otros puntos de la gráfica, calcularon las diferencias entre las coordenadas de los puntos, encontraron la pendiente y escribieron la función lineal correspondiente a cada gráfica.

4.2.10 Análisis de prueba final

La prueba final estaba conformada por 4 ítems. En los ítems 1 y 2 se presentaron dos problemas dados en un registro en lenguaje verbal o natural y en un contexto de situación problema real. Con cada uno de los problemas se pretendía que los estudiantes reconocieran las magnitudes que intervenían en cada situación y que a su vez las identificaran como variable dependiente e independiente, establecieran relaciones entre ellas y plantearan la función lineal es su expresión algebraica. En el ítem 3 se presentó un gráfica y se solicitaba crear una tabla con los puntos que contiene la gráfica de una función lineal y en el ítem 4 se presentó un grafica en la que se solicitó escribir la función lineal en su representación algebraica correspondiente.

4.2.10.1 Análisis prueba final ítem 1

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

Se planteó un problema que hacía referencia al salario diario de Elena por vender rosas en un vivero. Diariamente ella recibe L.135 y por cada rosa vendida recibe L.3 extra. El problema consta de 11 incisos. Los estudiantes pueden identificar que el pago fijo representa una cantidad que permanece constante. Sin embargo, este salario diario puede variar de acuerdo al número de rosas vendidas cada día. Lo anterior implica que un pago extra o adicional involucra un signo más. Se espera además, que hagan predicciones de estados futuros del salario que recibiría Elena por la venta de cierta cantidad de rosas y finalmente propongan un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Inciso a) ¿Qué cantidades o magnitudes intervienen en la situación?

E4 Pago diario
Cantidad derosas bendida:

E9 Cantidad de Rosas.
·Pago Diario.

E10 Las Rosas
El pago extra

Inciso b) ¿cuánto ganará Elena cada día si vende?

E7
El lunes 1 rosa: 135+3*1 = 138
El martes 2 rosas: 135+3*2 = 141
El miércoles 3 rosas: 135+3*3 = 144
El jueves 4 rosas: 135+3*4 = 147
El viernes 5 rosas: 135+3*5 = 150
El sábado 6 rosas: 135+3*6 = 153

E10
El lunes 1 rosa: 135+1×3=138
El martes 2 rosas: 135+2×3=141
El miércoles 3 rosas: 135+3×3=144
El jueves 4 rosas: 135+4×3=147
El viernes 5 rosas: 135+5×3=150
El sábado 6 rosas: 135+6×3=153

Del inciso c) ¿Qué cantidad permanece fija (constante)? ¿Por qué?

E1 EL Pago Diario porque es el que le paga doña Ana. A Elena si vende o no vende Flores.

E2 R\ El Pago Diario (L.135) Porqué es lo Qué le pagan.

E4 L.135 por que esel pago diario

E8 El pago permanese Fijo porque Sea que no venda Elena siempre le va a pagar L.135

E10 El Pago diario
Porque es la cantidad que le Pagan a Elena Fijamente.

E11 El cantidad permanece fija es L.135 Porque es el Pago fijo.

E12 PAgo DiArio porque Aunque no venDA ninguna ROSA siempre Resive un SuelDo L.135.

En este inciso los estudiantes E1, E3, E4, E5, E8, E10, E11, E12 identificaron la cantidad fija o constante argumentando su respuesta. Según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que permanece.

Inciso d) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

E1 La Cantidad de rosas Vendidas. Porque entre mas rosas Vendidas mas ganancia para Elena.

E3 La Contidad de Rosas que vende

E4 Las rosas bendidos extra.

E5 lo Contida varia depende cuantas rosas venda.

E8 La Cantidad que varia es la cantidad de rosas porque todos los dias Vende diferentes cantidades.

E10 La cantidad que Varia son los tres lempiras extras, Por que no sabe cuantas Rosas ba a vender diariamente

E11 La cantidad de rosas si son las que varia.

E12 LACANTiDAD DerosAS VeNDiDAS
porque entreMAS Rosas veNDiDAS MAS GANASiA

En este inciso, según Vasco (2002), los estudiantes se situaron en el momento de captación de patrones de variación, en este caso lo que varía.

E1, E3, E4, E5, E8, E10, E10, E11, E12 identificaron la cantidad que varía, argumentando su respuesta.

Del inciso e) Podrías predecir ¿Cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas?

E1 135 + 87 = 222 lps. Porque si multiplicamos 29 X 3 = 87. Y sumando esos 87 + 135 seria L.222 que ganaria Elena.

E2 135 + 29 x 3 = 222.
Ganaria 222 si vendiera 29 rosas.

E8 $135+29\times3=\boxed{222}$ Ganaria L.222

E9 *135+29x3=222

En este inciso, los estudiantes E1, E2, E8, E9, recurren a la predicción, considerada por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) como una estrategia variacional. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos.

Del inciso f) ¿Qué relación hay entre lo que gana Elena diariamente y las rosas vendidas?

E1 Qué entre mas rosas vende mas ganancia recibe

E4 Que entre mas rosas bende mas ba serel Pagode Elena.

E5 Entre más rosas vende mas ganacia tiene
Entre menos rosas venda menos ganancia tiene

E8 La relacion que hay esque entre mas rosas Vendidas mas gana

E10 Que entre más rosas venda elena mas dinero ba a ganar.

E11 Que entre más rosas vende más ganaria

Inciso g) ¿Qué cantidad depende de la otra?

E4 Variable dependiente: y= Pago diario

E5 Variable dependiente: y= La Ganacia

Inciso h) ¿Qué cantidad es independiente?

E1 Variable independiente: x= Rosas.

E8 Variable independiente: x= Cantidad Rosas vendidas.

Las respuestas dadas por E4, E5, E1, E8 en los incisos g y h, reflejan la noción de dependencia entre dos magnitudes, aludiendo a uno de los aspectos sugeridos por Posada y Villa (2006) respecto al estudio del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Inciso i) ¿Cómo podemos expresar un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas?

E7 $135 + 3 * X = Y$ E8 $y = mx + b$

$y = 3\ x + 135.$

E10 $y = 135x + 3$ E11 $y = 3x + 135$

En este inciso los estudiantes se situaron de acuerdo con Vasco (2002), en el momento de creación de un modelo mental, los cuales fueron propuestos por E7, E8, E10, E11.

Además se llevó a cabo la transformación tipo conversión, al pasar del registro verbal al registro algebraico con la propuesta del modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas. Según Duval (2004a), la conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro, en otra representación del mismo objeto en otro registro.

Inciso j) Usa el modelo para verificar la predicción de cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.

E7 $135 + 3 * X = Y$

$135 + 3 * 29 = 222$

E8 $y = mx + b.$ $\boxed{y = 222}$

$y = 3(29) + 135.$

$y = 87 + 135.$

E10 $y = 3(29) + 135 = \underline{y = 222}$

Inciso k) Usa el modelo para determinar cuánto recibiría de pago Elena si vende 71 rosas.

E7 $135 + 3 * X = Y$

$135 + 3 * 71 = 348$ Lps

E8 $y = mx + b$

$y = (3)(21) + 135$

$y = 213 + 135$

$\boxed{y = 348}$

Ganaría 348

E10 $y = 3(71)+135 = \underline{y = 348}$

En este inciso los estudiantes se situaron según Vasco (2002) en el Momento de echar a andar el modelo. Los estudiantes E7, E8, E10 usaron el modelo propuesto para determinar cuánto ganaría Elena si vendiera una cantidad específica de rosas.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Pago, vender, cantidad de rosas, salario, ganancia, cantidad, magnitud, cantidad fija, constante, variar, variable dependiente, variable independiente, dependiente, independiente, relación, lempiras, predecir, modelo.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Pago diario, pago por vender, cantidad de rosas, más, variar, pago fijo, recibir, dinero, propina, ganancia, extra.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron únicamente a lo solicitado en la consigna planteada.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

La cantidad que permanece fija es el pago diario que es L. 135.

L.135 porque es el pago diario.

La cantidad que permanece fija es L. 135 porque es el pago fijo.

Pago diario porque aunque no venda ninguna rosa siempre recibe un sueldo L.135.

La cantidad que varía es la cantidad de rosas porque todos los días vende diferentes cantidades.

La cantidad que varía es la cantidad de rosas que vende Elena.

Entre más rosas vende, más ganancia tiene. Entre más rosas vende, menos ganancia tiene.

Que entre más rosas venda Elena más dinero va a ganar.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

La cantidad que permanece fija es L. 135 porque es el pago fijo.

L.135 porque es el pago diario.

Pago diario porque aunque no venda ninguna rosa siempre recibe un sueldo L.135.

La cantidad que varía es la cantidad de rosas porque todos los días vende diferentes cantidades.

Entre más rosas vende, más ganancia tiene. Entre menos rosas vende, menos ganancia tiene.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: respecto con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como magnitudes, dependencia entre variables, expresión algebraica y pendiente, los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la situación con los conocimientos adquiridos.

Emergentes: los estudiantes no manifestaron concepciones distintas a las ya estudiadas.

La mayoría de los estudiantes expresan modelos adecuados correspondientes al problema planteado y verificaron el modelo planteado, algunos expresaron modelos con ciertos elementos adecuados, pero sin lograr plantear un modelo apropiado para las situaciones presentadas.

Procedimientos: los estudiantes realizaron sumas y multiplicaciones sencillas para determinar cuál sería el salario de Elena de acuerdo al número de rosas vendidas.

4.2.10.2 Análisis prueba final ítem 2, 3 y 4

Etapa 1: Se responde a las preguntas básicas.

¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

La situación planteada en el ítem 2 fue una adaptación de un problema presentado por Vrancken, Engler, Leyendecker y Müller (2017). Se trata sobre la estimación de la edad de los árboles donde se relaciona el diámetro del árbol con la edad. Para cierta variedad de robles, se determinó que el diámetro del tronco de un árbol de 24 años de edad es 10 cm y el de uno de 32 años es 15cm. El problema estaba compuesto por 10 incisos.

Con esta situación los estudiantes pueden identificar que entre mayor es el diámetro del tronco de un árbol, mayor es su edad; establecer la relación de dependencia entre la edad del árbol y el diámetro; identificar que los pares ordenados que intervienen en la situación son datos que da el problema y los forman los años y el diámetro del tronco; determinar la pendiente con los pares ordenados y la expresión matemática que modela la situación; explicar el significado de la pendiente en el contexto del problema; usar el modelo encontrado para estimar la edad de un roble con un diámetro de 45 cm, y, finalmente, representar con una gráfica la función lineal planteada correspondiente al problema.

La situación que se planteó en el ítem 3 fue una gráfica, y se solicitaba crear una tabla con las coordenadas (x,y) correspondientes a cada punto de la gráfica, y, finalmente, en el ítem 4 se presentó una gráfica en el que se solicitaba plantear la función lineal en su registro algebraico correspondiente.

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

Del inciso a) ¿Qué cantidades intervienen en la situación?

E1 * Años del Arbol
*Diametro del groso del Arbol.

Del inciso b) ¿Qué relación hay entre el diámetro y la edad del roble?

E1 *Qué entre mas grueso es un arbol
Mas años tiene

E2 R/ Qué entre más semejante sea el árbol
más grande es el díametro.

E4 Que entre mas edad tenga mos grande ba
aser el Diametro.

E5 *Entre más año tiene el árbol más diometro tiene
Entre menos año tien el arbol menos diametro tiene.

E7 Entre más años de edad tiene el árbol.
más grande será el diámetro.

E8 Que entre mas es la edad del Roble
hay mas diametro (Anillos)

E9 *Entre más anos pasan mas engruesa el diametro.

E10 Que entre mas años tiene el arbol mas grande
es el Diametro.

E11 Que entre más años pasan más grande es el diámetro

Inciso c) ¿El diámetro depende de la edad en años del roble o la edad en años del roble depende del diámetro?

E1 * La edad depende del diametro.

E2 La Edad en años del roble depende del diámetro.

E7 El diámetro depende de la edad en años.

Las respuestas dadas por E1, E2, E7 reflejan la noción de dependencia entre dos magnitudes, aludiendo a uno de los aspectos sugeridos por Posada y Villa (2006) respecto al estudio del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Inciso d) ¿Qué cantidad depende de la otra?

E1
- Variable dependiente y= La Edad.
- Variable independiente: x= Diametro.

E7
- Variable dependiente y= Diámetro
- Variable independiente: x= ~~edad~~ edad en años

Inciso e) ¿Qué pares ordenados intervienen en la situación?

E2 (10,24)(15,32).

E4 $\overset{y_1}{24}, \overset{x_1}{10}$ $\quad$ (10,24) (15,32)

$\overset{y_2}{32}, \overset{x_2}{15}$

E8 $(\overset{x_1}{10}, \overset{y_1}{24})\ (\overset{x_2}{15}, \overset{y_2}{32})$

E7

x_1	y_1	x_2	y_2
24	10	32	15

Inciso f) Determine la pendiente:

E1 $\dfrac{\text{cambio } y}{\text{cambio } x} = \dfrac{24-32}{10-15} = \dfrac{-8}{-5} = \dfrac{8}{5}$

E2 $m = \dfrac{(15-10)}{(32-24} = \dfrac{5}{8}$

E8 $m = \dfrac{32-24}{15-10} = \dfrac{8}{5}\ \dfrac{\text{años}}{\text{Diametro}}$

Inciso g) Escriba una expresión matemática que represente o modele esta situación:

E1

$\boxed{(10,24)}$

$y - y_1 = m(x - x_2)$

$y - 24 = \frac{8}{5}(x-10)$

$y - 24 = 8/5\, x - 16$

$y = 8/5\, x - 16 + 24$

$\boxed{y = 8/5\, x + 8}$

E2

$y - 10 = \frac{5}{8}(x-24)$

$y - 10 = \frac{5}{8}x - 15$

$y = \frac{5}{8}x - 15 + 10$

$y = \frac{5}{8}x - 5$

E4

$y - 32_1 = \frac{8}{5}(x - 15)$

$y - 32_1 = \frac{8}{5}x - 24$

$y = \frac{8}{5}x - 24 + 32 = 8$

$y = \frac{8}{5}x + 8$

E7

$y - 10 = \frac{5}{8}(x - 24)$

$y - 10 = \frac{5}{8}x - 15$

$y = \frac{5}{8}x - 15 + 10$

$y = \frac{5}{8}x - 5$

E8

$$\boxed{(y-y_1)=m(x-x_1)} \quad y-32=\frac{8}{5}(x-15). \quad \boxed{(15,32)}$$

$$y-32=\frac{8}{5}x-24$$

$$y=\frac{8}{5}x-24+32.$$

$$\boxed{y=\frac{8}{5}x+8}$$

Los estudiantes E1, E2, E4, E7, E8 recurrieron a las trasformaciones tipo tratamiento al transitar en el registro algebraico mediante la forma punto-pendiente para encontrar la expresión algebraica o modelo de la edad del árbol en términos del diámetro. Asimismo el encontrar la expresión algebraica que representa la situación planteada permitió a los estudiantes transitar del registro verbal al registro algebraico, llevándose a cabo la transformación tipo conversión, ambas transformaciones planteadas por Duval (2004a) en su teoría de las representaciones semióticas.

Inciso h) Explique el significado de la pendiente en el contexto del problema.

E1 QUE un arbol de 8 años puede tener su grosor puede ser de 5cm de Diametro o de ancho.

E2 R/ Qué un árbol que tenga 8 años su diámetro es de 5 cm.

E7 EL diametro de un tronco de un arbol de 8 años de edad es de 5 cm.

E8 En 5años hay 8 dediametro

Inciso i) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.

E1

$$y=8/5x+8$$

$$y=8/5(45)+8$$

$$y=72+8=\boxed{y=80}$$

osea que el arbol tiene 80años

E4

$y \frac{8}{5}(45)+8$

$y = (72)+8 =$

$y = 80$

R// La edad del roble es de 80 años.

E8

$y = \frac{8}{5}(45)+8$

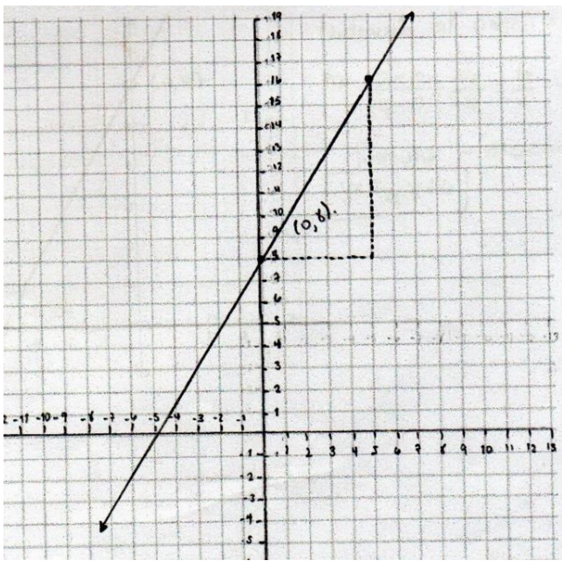
$y = 72+8$

$\boxed{y = 80}$

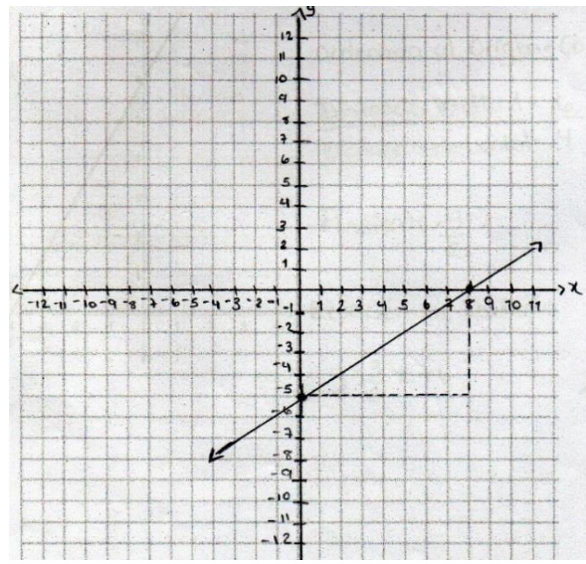
El roble de 45cm tiene la edad 80 años

Inciso j) Graficar la función lineal planteada correspondiente al problema.

E1



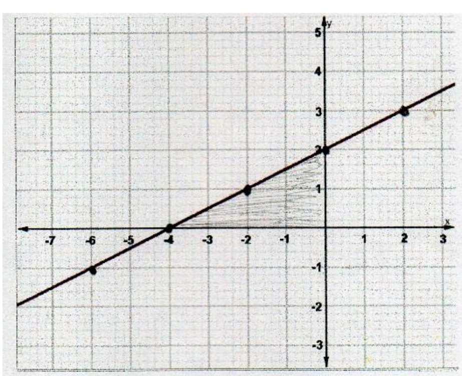
E2



Los estudiantes E1, E2 muestran que han recurrido a la transformación tipo conversión al transitar del registro algebraico al registro gráfico de acuerdo con Duval (2004a).

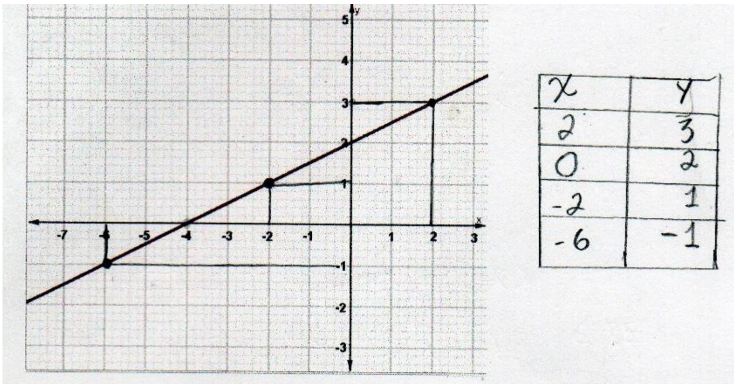
Del Ítem 3

E2

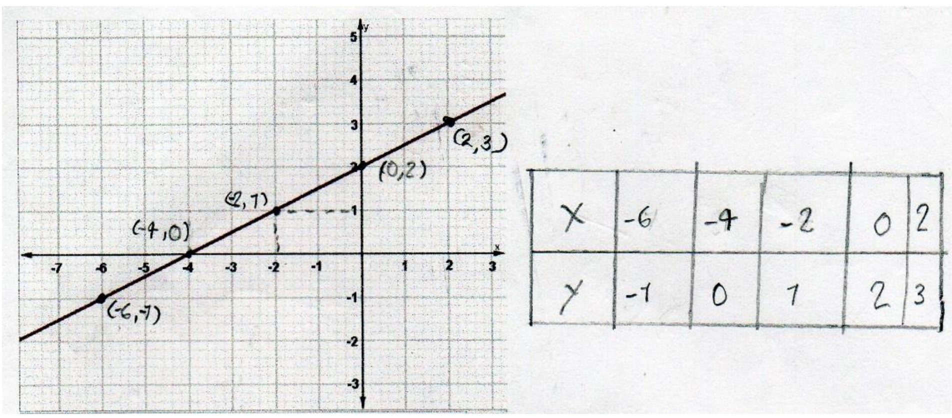


x	2	2	1	0	-1
y	3	0	-2	-4	-6

E5



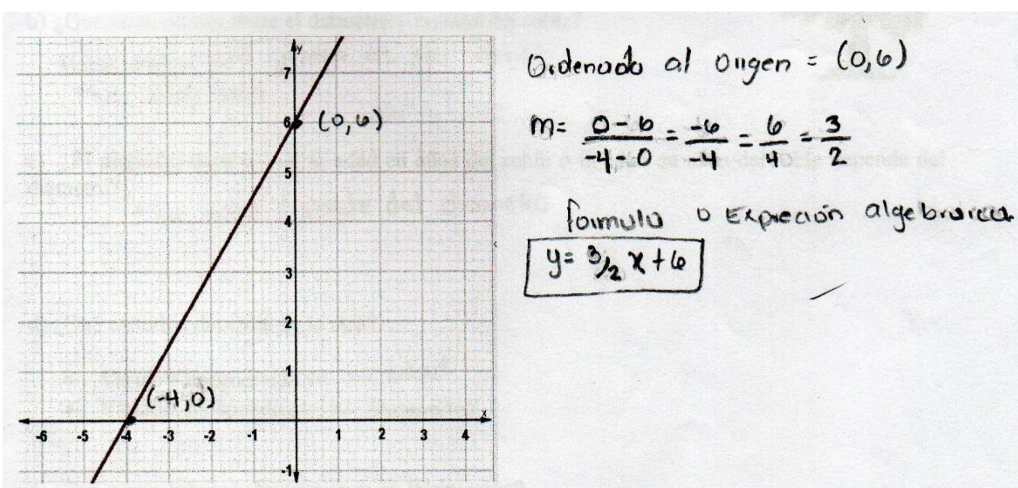
E11



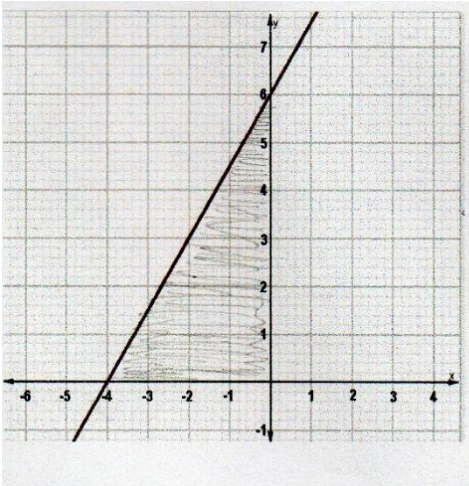
Los estudiantes E2, E5, E11 reflejan el uso de la transformación tipo conversión al transitar del registro gráfico al registro tabular de acuerdo con Duval (2004a).

Del ítem 4

E1



E2



Ordenada al Origen $= (0,6)$

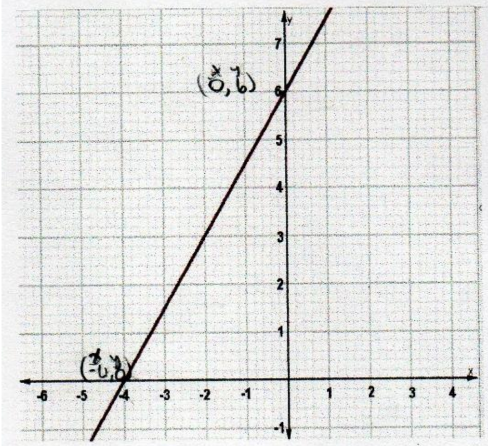
$\dfrac{\text{Distancia Vertical}}{\text{Distancia Horizontal}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

Pendiente $= \dfrac{3}{2}$

Ecuación De La Recta

$y = \dfrac{3}{2}x + 6.$

E4

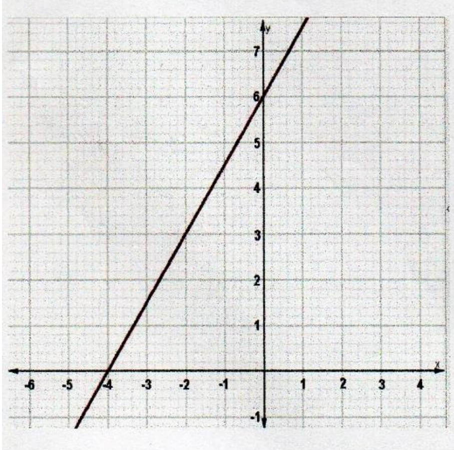


Ordenada de orijen $= 0,6.$

$\dfrac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} \; \dfrac{6-0}{0-(-4)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}x + 6$

E6



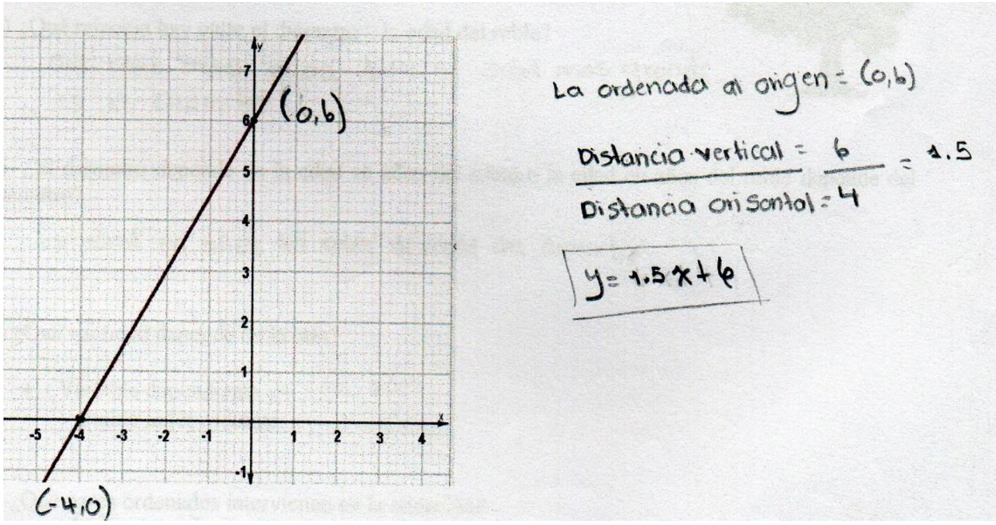
Orige $(0,6)$

$\dfrac{\text{Cambio } y}{\text{Cambio } x} = \dfrac{0-6}{-4-0} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

Pendiente $\dfrac{3}{2}$

Grafica $y = \dfrac{3}{2}x + 6$

E10



Los estudiantes E1, E2, E4, E6, E10 reflejan el uso de la transformación tipo conversión al transitar del registro gráfico al registro algebraico de acuerdo con Duval (2004a).

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes).

- Roble, años, diámetro, magnitud, variable dependiente, variable independiente, dependiente, independiente, relación, tiempo, centímetros, pendiente, predecir, modelo, expresión algebraica.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos que surgen durante el desarrollo de la práctica).

- Árbol, grueso, semejante, grande, más, menos, pasan, engruesa, tronco, ordenada al origen, distancia vertical, distancia horizontal, pendiente.

Etapa 4: Situaciones problema emergentes.

Los estudiantes atendieron exclusivamente a lo solicitado en las consignas de los 13 incisos del problema planteado y a los ítems 3 y 4.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Que entre más grueso es un árbol, más años tiene.

Que entre más semejante sea el árbol, más grande es el diámetro.

Que entre más edad tenga, más grande va a ser el diámetro.

Entre más años tiene el árbol más diámetro tiene, entre menos años tiene el árbol menos diámetro tiene.

Entre más años de edad tiene el árbol más grande será el diámetro.

Entre más años pasan más engruesa el diámetro.

Que entre más años tiene el árbol más grande es el diámetro.

Que entre más años pasan más grande es el diámetro.

La edad depende del diámetro.

La edad en años del roble depende del diámetro.

El diámetro depende de la edad en años.

Que un árbol que tenga 8 años su diámetro es de 5 cm.

El diámetro de un tronco de un árbol de 8 años de edad es de 5cm.

En 5 años hay 8 de diámetro.

O sea que el árbol tiene 80 años.

La edad del roble es de 80 años.

El roble de 45 cm tiene la edad de 80 años.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Que entre más grueso es un árbol más años tiene.

Que entre más semejante sea el árbol más grande es el diámetro

Que entre más edad tenga más grande va a ser el diámetro

Entre más años tiene el árbol más diámetro tiene, entre menos años tiene el árbol menos diámetro tiene.

Entre más años de edad tiene el árbol más grande será el diámetro.

Entre más años pasan más engruesa el diámetro.

Que entre más años tiene el árbol más grande es el diámetro.

Que entre más años pasan más grande es el diámetro.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son las concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: de acuerdo con los objetos matemáticos (conceptos formales de la matemática que involucran definiciones, propiedades, axiomas teoremas, entre otros) que se incluyen en el problema, tales como magnitudes, dependencia entre variables, expresión algebraica, pendiente, grafica, función lineal, tabla, coordenadas, los estudiantes tienen las ideas básicas lo que les permite desarrollar la situación con los conocimientos adquiridos.

Emergentes: los estudiantes no manifestaron concepciones distintas a las ya estudiadas.

Algunos estudiantes expresaron modelos inadecuados asociados al problema ya que establecieron una inadecuada relación de dependencia entre variables. Sin embargo, estos mismos estudiantes llegaron a graficar de manera adecuada la expresión algebraica planteada, aunque esta no correspondía de manera correcta a la situación presentada.

Procedimientos: para el ítem 2 los estudiantes realizaron sumas, restas y multiplicaciones sencillas para estimar la edad de un roble de acuerdo a la medida de su diámetro. Así como el uso de la forma punto- pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$ donde se auxiliaron de la transposición de términos para determinar la expresión algebraica que modelaba la situación planteada.

Para el ítem 3 los estudiantes marcaron en la gráfica algunos puntos e indicaron sus coordenadas correspondientes para registrarlos en una tabla.

Para el ítem 4 los estudiantes realizaron restas y divisiones sencillas para determinar la pendiente y escribir la expresión algebraica correspondiente a la gráfica presentada.

4.3 Rúbricas de evaluación

Atendiendo a las rubricas de evaluación, las cuales consideraron cuatro categorías, se presentan descriptores numéricos correspondiente a la prueba diagnóstica, a las secuencias didácticas de aprendizaje y a la prueba final. Cada rúbrica se describe de la siguiente manera: **No respondió**, si el estudiante no mostró evidencia de lo solicitado; **Inadecuado:** si el procedimiento o respuesta dada por el estudiante no cumplió con lo solicitado; **Parcialmente adecuado:** si el procedimiento o respuesta dada por estudiante correspondió a ciertos elementos solicitados; **Adecuado:** si el procedimiento o respuesta dada por el estudiante cumplió con lo solicitado. Cabe mencionar que las actividades que se planearon en los instrumentos estaban compuestas por un número de ítems, que a su vez en algunos casos estaban subdivididos por incisos, así las rúbricas de evaluación se elaboraron por ítem e inciso.

4.3.1 Rúbrica de evaluación para prueba diagnóstica

Tabla 17: *Rúbrica de evaluación para prueba diagnóstica*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem #1	No hay evidencia de lo solicitado.	Escribe de manera inadecuada expresiones algebraicas.	Escribe de manera correcta las expresiones algebraicas de al menos un inciso.	Escribe de manera correcta las expresiones algebraicas de los cuatro incisos solicitados.
Ítem #2	No hay evidencia de lo solicitado.	Escribe de manera inadecuada expresiones en lenguaje verbal o natural.	Escribe de manera correcta las expresiones en lenguaje verbal o natural de al menos un inciso.	Escribe de manera correcta las expresiones en lenguaje verbal o natural de los tres incisos solicitados.
Ítem #3				
Inciso a)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Plantea de manera inadecuada las ecuaciones lineales solicitadas en los dos problemas.	Plantea de manera correcta la ecuación lineal correspondiente al problema pero no la resuelve, o realiza ciertos procedimientos correctos sin llegar a la respuesta.	Plantea, resuelve y comprueba de manera adecuada la ecuación lineal que corresponde a la situación planteada o plantea y resuelve correctamente la ecuación lineal que corresponde a la situación planteada.
Inciso b)	No hay desarrollo de lo solicitado	Plantea de manera inadecuada las ecuaciones lineales solicitadas en los dos problemas.	Plantea de manera correcta la ecuación lineal correspondiente al problema pero no la resuelve, o realiza ciertos procedimientos correctos, pero no llega a la respuesta.	Plantea, resuelve y comprueba de manera adecuada la ecuación lineal que corresponde a la situación planteada o plantea y resuelve correctamente la ecuación lineal que corresponde a la situación planteada.
Ítem #4	No hay evidencia de lo solicitado.	Establece y justifica de manera incorrecta las relaciones de correspondencia en cada situación planteada.	Establece y justifica de manera correcta algunas relaciones de correspondencia en las situaciones planteadas o establece de forma	Establece y justifica de manera correcta las relaciones de correspondencia en cada situación planteada.

			correcta todas las relaciones de correspondencia pero no las justifica.	
Ítem #5	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la tabla B es la que representa la relación de cantidades directamente proporcionales.	Determina que la tabla A es la que representa la relación de cantidades directamente proporcionales, lo que implica identificar que las cantidades correspondientes a las variables x e y son ambas crecientes, pero no verifica que el cociente entre ellas es constante.	Determina que la Tabla A es la que representa la relación de cantidades directamente proporcionales, lo que implica identificar que las cantidades correspondientes a las variables x e y son ambas crecientes y que el cociente entre ellas es constante.
Ítem #6	No hay evidencia de lo solicitado.	Resuelve de forma incorrecta el problema presentado.	Resuelve el problema presentado pero no hace uso de las nociones de constante de proporcionalidad.	Resuelve correctamente el problema presentado haciendo uso de las nociones de constante de proporcionalidad.

Fuente: Elaboración propia.

4.3.2 Resultados de la prueba diagnóstica

Tabla 18*: Resultados de la prueba diagnóstica*

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem #1	0	0	6	6
Ítem #2	1	0	4	7
Ítem #3				
Inciso a)	1	0	5	6
Inciso b)	5	1	2	4

Ítem #4	0	0	2	10
Ítem #5	2	1	9	0
Ítem #6	6	3	2	1

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la prueba diagnóstica mostraron que algunos estudiantes presentaron dificultad en los ítems 1 y 2, planteamiento de expresiones algebraicas dadas inicialmente en un lenguaje natural y viceversa. También dificultad en el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales solicitadas en cada problema presentado en el ítem 3. Lo anterior refleja que hay poco manejo de las propiedades de la igualdad y las reglas de transposición de términos. Respecto al ítem 5 donde se presentaron dos tablas, una que correspondía a magnitudes directamente proporcionales, la mayoría de los estudiantes solo identificaron que las magnitudes eran crecientes en una de las tablas, sin recordar que en magnitudes directamente proporcionales su cociente es constante. En relación al ítem 6, solo un estudiante resolvió el problema presentado haciendo uso de la noción de constante de proporcionalidad para su resolución.

4.3.3 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #1, Problema #1 (SD1P1)

De acuerdo con la naturaleza de las preguntas propuestas para ciertos incisos de esta actividad, la categoría parcialmente adecuado no se consideró, así que se utilizó (N/A) para indicar que no aplica.

Tabla 19*: Rúbrica de evaluación para secuencia didáctica de aprendizaje #1, problema #1*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de manera incorrecta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta una de las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.

b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma incorrecta la altura de la superficie del agua después de 1 minuto.	N/A	Determina que después de 1 minuto la superficie del agua alcanza 2 cm.
c)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Determina de forma incorrecta la altura de la superficie del agua después de 1 minuto y medio	N/A	Determina que después de 1 minuto y medio la superficie del agua alcanza 3cm.
d)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma incorrecta la altura de la superficie del agua después de 2 minutos.	N/A	Determina que después de 2 minutos la superficie del agua alcanza 4 cm.
e)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Llena la tabla con datos incorrectos.	Llena la tabla con algunos datos.	Completa la tabla con los datos solicitados.
f)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos de manera incorrecta sin llegar a la respuesta.	Realiza ciertos procedimientos para predecir la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos, sin llegar a la respuesta.	Predice de manera correcta la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Establece de forma incorrecta la relación que hay entre la altura de la superficie del agua y el tiempo.	N/A	Establece de manera correcta la relación que hay entre la altura de la superficie del agua y el tiempo.

h)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que el tiempo depende de la altura de la superficie del agua.	N/A	Determina que la altura de la superficie del agua depende del tiempo.
i)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad dependiente es el tiempo.	N/A	Determina que la cantidad dependiente es la altura de la superficie del agua.
j)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad independiente es la altura de la superficie del agua.	N/A	Determina que la cantidad independiente es el tiempo.
k)	No hay evidencia de lo solicitado.	Expresa de forma incorrecta el modelo solicitado.	Escribe una expresión que contiene ciertos elementos correctos.	Expresa de manera correcta un modelo, la altura de la superficie del agua en términos del tiempo.
l)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo planteado para verificar la predicción.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo planteado para verificar la predicción.	Usa de forma correcta el modelo planteado para verificar la predicción de cuál sería la altura que alcanza la superficie del agua después de 25 minutos.
m)	No hay evidencia de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.	Usa de forma correcta el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.

Fuente: *Elaboración propia.*

4.3.4 Resultados de la secuencia de aprendizaje #1, Problema #1

Esta actividad se realizó de manera individual.

Tabla 20: *Resultados de la secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #1*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	12
b)	0	0	--	12
c)	1	7	--	4
d)	0	0	--	12
e)	0	0	1	11
f)	0	0	0	12
g)	0	0	--	12
h)	0	0	--	12
i)	0	0	--	12
j)	0	0	--	12
k)	3	0	2	7
l)	5	0	0	7
m)	5	0	0	7

Fuente: Elaboración propia

4.3.5 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #1, Problema #2 (SD1P2)

De acuerdo con la naturaleza de las preguntas propuestas para ciertos incisos de esta actividad, la categoría parcialmente adecuado no se consideró, así que se utilizó (N/A) para indicar que no aplica.

Tabla 21: *Rúbrica de evaluación para secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #2*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de manera incorrecta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta una de las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.

b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma inadecuada la ganancia de Raquel en cada noche.	Determina de manera correcta la ganancia de Raquel de acuerdo al número de baleadas vendidas cada noche, durante al menos tres noches.	Determina de manera correcta la ganancia de Raquel de acuerdo al número de baleadas vendidas cada noche, durante cinco noches.
c)	No hay evidencia de lo solicitado	Identifica de forma incorrecta la cantidad que permanece fija.	N/A	Identifica que la cantidad que permanece fija o constante es el pago de L.80.
d)	No hay evidencia de lo solicitado	Identifica de forma incorrecta la cantidad que varía.	N/A	Identifica que la cantidad que varía es la cantidad de baleadas que vende.
e)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta.	Realiza ciertos procedimientos para predecir lo que ganaría Raquel sin llegar a la respuesta.	Predice de manera correcta lo que ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.
f)	No hay evidencia de lo solicitado.	Establece de manera incorrecta la relación que hay entre lo que gana Raquel y las baleadas vendidas.	N/A	Establece correctamente la relación que hay entre lo que gana Raquel diariamente y las baleadas vendidas.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad de baleadas vendidas depende del sueldo de Raquel.	N/A	Determina que el sueldo de Raquel depende de la cantidad de baleadas que venda.
h)	No hay evidencia de lo solicitado	Determina que la cantidad independiente es	N/A	Determina que la cantidad independiente es la cantidad de baleadas.

		el sueldo de Raquel.		
i)	No hay evidencia de lo solicitado.	Plantea de forma inadecuada el modelo solicitado.	Escribe una expresión que contiene ciertos elementos correctos.	Expresa de manera correcta un modelo del salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas.
j)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo planteado para verificar la predicción.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo planteado para verificar la predicción.	Usa de forma correcta el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.
k)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo para determinar cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo para determinar cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.	Usa de forma correcta el modelo para determinar de cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas.

Fuente: *Elaboración propia*

4.3.6 Resultados de la secuencia de aprendizaje #1, Problema #2

Esta actividad se realizó de manera individual.

Tabla 22*: Resultados de la secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #2*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	12
b)	0	0	0	12
c)	0	0	--	12
d)	0	0	--	12
e)	0	0	0	12
f)	0	0	--	12
g)	0	0	--	12

h)	0	0	--	12
i)	0	0	5	7
j)	3	0	3	6
k)	2	0	5	5

Fuente: Elaboración propia

4.3.5 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #1, Problema #3 (SD1P3)

De acuerdo con la naturaleza de las preguntas propuestas para ciertos incisos de esta actividad, la categoría parcialmente adecuado no se consideró, así que se utilizó (N/A) para indicar que no aplica.

Tabla 23*: Rúbrica de evaluación para secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #3*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de manera incorrecta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta una de las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.
b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma inadecuada la ganancia de Roberto de acuerdo a la cantidad de arroz vendido.	Determina de manera correcta la ganancia de Roberto de acuerdo a la cantidad de arroz vendido en al menos dos de las opciones planteadas	Determina de manera correcta la ganancia de Roberto de acuerdo a la cantidad de arroz vendido en las seis opciones planteadas.
c)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de forma incorrecta la cantidad que varía.	N/A	Identifica que la cantidad que varía es la cantidad de baleadas que vende.

d)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta.	Realiza ciertos procedimientos para predecir lo que ganaría Roberto sin llegar a la respuesta.	Predice de manera correcta lo que ganaría Roberto si vendiera $19\frac{1}{2}$ libras de arroz.
e)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Establece de manera incorrecta la relación que hay entre las cantidades que intervienen en la situación.	N/A	Establece correctamente la relación que hay entre las cantidades que intervienen en la situación.
f)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad de libras de arroz vendidas depende de la ganancia de Roberto.	N/A	Determina que la ganancia de Roberto depende de la cantidad de libras de arroz que venda.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad independiente es la ganancia de Roberto.	N/A	Determina que la cantidad independiente es la cantidad de libras de arroz.
h)	No hay evidencia de lo solicitado.	Plantea de forma inadecuada el modelo solicitado.	Escribe una expresión que contiene ciertos elementos correctos.	Expresa de manera correcta un modelo de lo que gana Roberto en términos de la cantidad de arroz vendido.
i)	No hay evidencia de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo planteado para verificar la predicción.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo planteado para verificar la predicción.	Usa de forma correcta el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Roberto si vendiera $19\frac{1}{2}$ libras de arroz.
j)	No hay desarrollo	Usa de forma incorrecta el modelo para	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el	Usa de forma correcta el modelo para determinar de

	de lo solicitado.	determinar cuánto ganaría Roberto.	modelo para determinar cuánto ganaría Roberto.	cuánto ganaría Roberto si vendiera 47 libras de arroz.

Fuente: Elaboración propia.

4.3.6 Resultados de la secuencia de aprendizaje #1, Problema #3

Esta actividad se realizó en grupos de dos y tres integrantes.

Tabla 24*: Resultados de la secuencia didáctica de aprendizaje #1, Problema #3*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	5
b)	0	0	0	5
c)	0	0	--	5
d)	0	0	0	5
e)	0	0	--	5
f)	0	0	--	5
g)	0	0	--	5
h)	0	0	0	5
i)	0	0	2	3
j)	0	0	0	5

Fuente: Elaboración propia

Los resultados del conjunto de problemas propuestos para esta secuencia inicial reflejan de manera general que, aunque hay dificultad al momento de plantear un modelo o expresión algebraica, la interacción y discusión grupal de los problemas les permitió a los estudiantes adquirir conocimiento reflexivo. Con las preguntas propuestas, se guio a los estudiantes a pensar de una manera dinámica. El identificar lo que permanece fijo, lo que varía, proponer y echar andar modelos como expresiones algebraicas fueron elementos imprescindibles dentro de la perspectiva del pensamiento variacional argumentada por Vasco (2002). Además los estudiantes recurrieron a la predicción, considerada por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) como una estrategia variacional. La Predicción está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos. También, con esta secuencia los estudiantes transitaron el concepto de función lineal del registro verbal al algebraico.

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #2

Tabla 25: *Rúbrica para secuencia de aprendizaje #2*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Determina de manera inadecuada las razones de $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$.	Determina algunas razones de $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$.	Determina las seis razones de $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$ a través de calcular las diferencias entre intervalos correspondientes a altura trascurrido cada minuto.
b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma inadecuada diferencias entre intervalos en cada tabla	Determina de manera correcta algunas diferencias entre intervalos en cada tabla, pero no logra identificar ni justificar su respuesta.	Determina de forma correcta las diferencias entre intervalos en cada tabla e identifica y justifica que tabla tiene razones de cambio constantes y que por ello corresponde a puntos de una función lineal.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #2

Esta actividad se realizó de manera individual

Tabla 26*: Resultado de secuencia de aprendizaje #2*

Inciso	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	12
b)	0	0	2	10

Fuente: Elaboración propia

Con esta segunda secuencia, los resultados muestran que de manera general los estudiantes descubrieron, identificaron y reconocieron la razón de cambio constante como elemento que identifica a las funciones lineales, así como lo afirman autores como Posada y Villa (2006). Además, en esta actividad los estudiantes recurrieron a uso de la seriación como una de las estrategias variacionales propuestas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012). Esta estrategia se relaciona con la comparación, la diferencia consiste en que se analizan varios estados y no solo dos, con el fin de encontrar una relación o propiedad entre ellos. Así Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28) señala que la seriación como estrategia variacional, puede ser usada para hallar una relación funcional dada una tabla de valores, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras.

4.4.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #3

Tabla 27*: Rúbrica para secuencia de aprendizaje #3*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	No Identifica que para ganar L. 6,800 Julia no necesita trabajar horas extras.	N/A	Identifica que Julia no necesita trabajar horas extras para ganar L. 6,800 porque es su sueldo fijo.
b)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza cálculos, inadecuados para determinar el cambio de salario mensual por trabajar 3 horas extras.	Realiza ciertos cálculos pero no llega a la respuesta correcta.	Realiza cálculos adecuados para determinar que el cambio de salario mensual por trabajar 3 horas extra equivale a L. 240.
c)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta.	Realiza algunos cálculos, pero no llega a la respuesta correcta.	Efectúa cálculos adecuados para determinar que el cambio de salario mensual por hora extra

				trabajada equivale a L.80.
d)	No hay evidencia de lo solicitado.	No Identifica que L.80 representa el pago por hora extra trabajada.	N/A	Identifica que L. 80 representa el pago por hora extra trabajada.
e)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta.	Realiza algunos cálculos pero no llega a la respuesta correcta.	Realiza cálculos correctos para determinar que por trabajar 6 horas extra recibirá de salario mensual L. 7,280.
f)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos incorrectos sin llegar a la respuesta.	Efectúa ciertos procedimientos correctos, pero no llega a la respuesta.	Efectúa procedimientos adecuados para determinar que por trabajar 7 horas extra recibirá de salario mensual L. 7,360.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta correcta.	Realiza algunos cálculos correctos, pero no logra la respuesta adecuada.	Realiza cálculos adecuados para determinar que el cambio de salario mensual al ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040 es L.160.
h)	No hay evidencia de lo solicitado.	No logra identificar que el cambio de salario mensual representa 2 horas extras.	N/A	Identifica que ese cambio de salario mensual representa 2 horas extras.
i)	No hay evidencia de lo solicitado.	No logra identificar que para ganar L. 7,200 de sueldo mensual se necesita trabajar 5 horas extra.	N/A	Identifica que para ganar L. 7,200 de sueldo mensual se necesita trabajar 5 horas extra.
j)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza cálculos incorrectos sin lograr la respuesta adecuada.	Realiza algunos cálculos correctos, pero no	Efectúa cálculos adecuados para determinar que el cambio de salario

			logra la respuesta adecuada.	mensual al ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras es L.160.
k)	No hay desarrollo de lo solicitado.	No logra identificar que ese cambio de salario mensual representa 2 horas extras.	N/A	Identifica que ese cambio de salario mensual representa 2 horas extras.
l)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza cálculos incorrectos sin lograr la respuesta adecuada.	Realiza ciertos procedimientos, correctos pero sin llegar a una respuesta adecuada.	Realiza cálculos correctos para determinar que para ganar L. 7,520 de sueldo mensual se necesita trabajar 9 horas extra.
m)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Efectúa cálculos incorrectos sin lograr la respuesta adecuada.	Efectúa algunos procedimientos pero no llega a la respuesta correcta.	Efectúa cálculos adecuados para determinar que el cambio de salario mensual al ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras es L. 240.
n)	No hay desarrollo de lo solicitado.	No logra identificar que ese cambio de salario mensual representa 3 horas extras.	N/A	Identifica que ese cambio de salario mensual representa 3 horas extra.
o)	No hay desarrollo de lo solicitado.	No logra identificar que ese cambio de salario mensual representa 10 horas extras de trabajo.	N/A	Identifica que para ganar L. 7,600 de sueldo mensual necesita trabajar 10 horas extra.
p)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos incorrectos sin lograr la respuesta adecuada.	Efectúa algunos procedimientos para encontrar la pendiente, pero no llega a la	Encontrar la pendiente utilizando los datos registrados en la tabla y que equivale a L. 80.

			respuesta correcta.	
q)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados sin lograr la respuesta adecuada.	Realiza ciertos procedimientos, pero no llega a encontrar la expresión matemática.	Encontrar la expresión matemática que modela el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas.

Fuente: Elaboración propia

4.4.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #3

Esta actividad se realizó en grupos de dos y tres integrantes.

Tabla 28: *Resultado de la secuencia de aprendizaje #3*

Inciso	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	--	5
b)	0	0	0	5
c)	0	0	0	5
d)	0	0	--	5
e)	0	0	0	5
f)	0	0	0	5
g)	0	0	0	5
h)	0	1	--	4
i)	0	0	--	5
j)	0	0	0	5
k)	0	0	--	5
l)	0	0	0	5
m)	0	1	0	4
n)	0	1	--	4
o)	0	0	--	5
p)	0	0	0	5

q)	0	0	1	4

Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que en esta tercera secuencia, la mayoría de los estudiantes logró completar la actividad de manera adecuada. Lo anterior indica que hubo características del pensamiento variacional que fueron utilizadas por los estudiantes para la resolución de la situación planteada. Con los cálculos realizados los estudiantes reflejaron el uso de la comparación como una de las estrategias variacionales planteadas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012:28).

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #4

Tabla 29: *Rúbrica para secuencia de aprendizaje #4*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem 1	No hay desarrollo de lo solicitado.	Grafica de manera inadecuada los puntos que contiene la tabla.	Grafica de manera correcta algunos puntos que contiene la tabla, pero no logra unir los puntos graficados para formar una recta o realiza un trazado incorrecto.	Grafica de manera correcta los puntos que contiene la tabla que representa las temperaturas Celsius y Farenheit y une los puntos graficados trazando de manera adecuada una recta.
Ítem 2	No hay desarrollo de lo solicitado.	Grafica de manera inadecuada los puntos que contiene la tabla.	Grafica de manera correcta algunos puntos que contiene la tabla, pero no logra unir los puntos graficados para formar una recta o realiza un trazado incorrecto.	Grafica de manera correcta los puntos que contiene la tabla que representa las semanas y el valor de la entrada al circo y une los puntos graficados trazando de manera adecuada una recta.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #4

Esta actividad se realizó en grupos de dos integrantes.

Tabla 30: *Resultado de la secuencia de aprendizaje #4*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem #1	0	0	1	5
Ítem #2	0	0	0	6

Fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar en esta cuarta secuencia, que la mayoría de los estudiantes graficó de manera adecuada los datos presentados en la tabla, identificando y visualizando que la gráfica de una función lineal corresponde a una recta y que puede ser creciente o decreciente.

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #5

Tabla 31*: Rúbrica para secuencia de aprendizaje #5*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Construye una tabla y no logra registrar de manera adecuada los puntos de la gráfica.	Construye una tabla y registra algunos puntos que corresponden a la gráfica.	Construye de manera adecuada una tabla y registra los puntos que corresponden a la gráfica presentada.
b)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Construye una tabla y no logra registrar de manera adecuada los puntos de la gráfica.	Construye una tabla y registra algunos puntos que corresponden a la gráfica.	Construye una tabla y registra de manera adecuada los puntos que corresponden a la gráfica planteada.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #5

Esta actividad se desarrolló de manera individual

Tabla 32: *Resultado de secuencia de aprendizaje #5*

Inciso	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	3	3	6
b)	0	3	4	5

Fuente: Elaboración propia

Con esta quinta secuencia, algunos estudiantes mostraron mayor dificultad en identificar las coordenadas de la gráfica planteada en el inciso b, confundiendo la coordenada correspondiente al eje x con la del eje y.

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #6

Tabla 33: *Rúbrica para secuencia de aprendizaje #6*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
1)	No hay evidencia de lo solicitado.	No identifica la ordenada al origen.	Identifica la ordenada al origen en al menos dos expresiones algebraicas que representan funciones lineales.	Identifica la ordenada al origen (formada por el par cero y el valor de b (0, b)) en las cuatro expresiones algebraicas que representan funciones lineales.
2)	No hay evidencia de lo solicitado.	No identifica la pendiente.	Identifica la pendiente (el coeficiente de x) en al menos dos expresiones algebraicas que representan funciones lineales.	Identifica la pendiente (el coeficiente de x) en las cuatro expresiones algebraicas que representan funciones lineales.
3)	No hay evidencia de lo solicitado.	Escribe de forma incorrecta la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.	Escribe de manera adecuada la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ en al menos dos expresiones algebraicas que representan funciones lineales.	Escribe de manera adecuada la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ en las cuatro expresiones algebraicas que representan funciones lineales.
4)	No hay evidencia de lo solicitado.	Interpreta de manera inadecuada la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$.	Interpretar la pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ de al menos dos expresiones algebraicas que representan funciones lineales.	Interpretarla pendiente como la razón $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$ en las cuatro expresiones algebraicas que representan funciones lineales.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #6

Esta actividad se desarrolló de manera individual.

Tabla 34: *Resultado de secuencia de aprendizaje #6*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
1)	0	0	0	12
2)	0	0	3	9
3)	0	0	3	9
4)	0	0	5	7

Fuente: Elaboración propia

Con esta sexta secuencia, lo que se pretendió fue que los estudiantes identificaran ciertos elementos de la función lineal, lo que les permitiera en la próxima secuencia de aprendizaje graficar esas funciones lineales. Entre estos elementos se destacaron, la ordenada al origen, pendiente, la pendiente como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ y a interpretación de ese $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ con las direcciones, arriba, abajo, derecha o izquierda. Los resultados mostraron mayor dificultad en la interpretación del cambio y e x, al no interpretar las direcciones apropiadamente o no percatarse del signo de la pendiente.

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #7

Tabla 35*: Rúbrica para secuencia de aprendizaje #7*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Grafica de manera inadecuada funciones lineales o de primer grado.	Grafica de manera correcta al menos dos funciones lineales o de primer grado, indicando si es creciente o decreciente.	Grafica de manera correcta las cuatro funciones lineales o de primer grado, indicando si es creciente o decreciente.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #7

Esta actividad se desarrolló de manera individual.

Tabla 36: *Resultado de secuencia de aprendizaje #7*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
1)	0	2	3	7

Fuente: Elaboración propia

Los resultados en el desempeño en esta séptima secuencia se vinculan de alguna manera por el desempeño de la secuencia anterior. Una inadecuada interpretación de la pendiente como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ se vio reflejada en el trazo de las gráficas.

4.3.1 Rúbrica para secuencia de aprendizaje #8

Tabla 37: Rúbrica para secuencia de aprendizaje #8

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
1)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Determina de manera inadecuada las expresiones algebraicas que representan las funciones lineales graficadas.	Determina de manera correcta la expresión algebraica de al menos una de las funciones lineales.	Determina de manera correcta la expresión algebraica que representan las cuatro funciones lineales graficadas.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Resultados de la secuencia de aprendizaje #8

Esta actividad se desarrolló de manera individual.

Tabla 38: Resultado de secuencia de aprendizaje #8

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
1)	0	4	8	0

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la octava y última secuencia de aprendizaje mostraron que la mayoría de los estudiantes presentaron dificultades en el planteamiento de expresiones algebraicas correspondientes a las gráficas, esto se debió a la inadecuada identificación de la ordenada al origen o a la identificación de otros puntos de la gráfica para determinar la pendiente o procesos incorrectos al momento de realizar las diferencias entre intervalos para determinar la pendiente.

4.3.1 Rúbrica para prueba final, Problema #5

Tabla 39: *Rúbrica de evaluación para prueba final, Problema #5*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de manera incorrecta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta una de las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.
b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de forma inadecuada la ganancia de Elena en cada día.	Determina de manera correcta cuánto ganaría Elena de acuerdo al número de rosas vendidas por día durante al menos tres días.	Determina de manera correcta cuánto ganaría Elena de acuerdo al número de rosas vendidas por día durante seis días.
c)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de forma incorrecta la cantidad que permanece fija.	N/A	Identifica que la cantidad que permanece fija o constante es el pago de L.135.
d)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de forma incorrecta la cantidad que varía.	N/A	Identifica que la cantidad que varía es la cantidad de rosas que vende.
e)	No hay desarrollo de lo solicitado	Realiza procedimientos inadecuados sin llegar a la respuesta.	Realiza ciertos procedimientos para predecir lo que ganaría Elena, pero sin llegar a la respuesta.	Realiza procedimientos adecuados para predecir cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.

f)	No hay evidencia de lo solicitado.	Establece de manera incorrecta la relación que hay entre lo que gana Elena y las rosas vendidas.	N/A	Establece de forma adecuada la relación que hay entre lo que gana Elena diariamente y las rosas vendidas.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad de rosas vendidas depende del salario de Elena.	N/A	Determina que el salario de Elena depende de la cantidad de rosas que venda.
h)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que la cantidad independiente es el sueldo de Elena.	N/A	Determina que la cantidad independiente es la cantidad de rosas.
i)	No hay evidencia de lo solicitado.	Plantea de forma inadecuada el modelo solicitado.	Escribe una expresión que contiene ciertos elementos correctos.	Expresa de manera correcta un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas.
j)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo planteado para verificar la predicción.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo planteado para verificar la predicción.	Usa de manera adecuada el modelo planteado para verificar la predicción de cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas.
k)	No hay desarrollo de lo solicitado.	Usa de forma incorrecta el modelo para determinar el salario de Elena si vendiera 71 rosas.	Realiza ciertos procedimientos correctos usando el modelo.	Usa de forma correcta el modelo para determinar cuánto recibiría de pago Elena si vendiera 71 rosas.

Fuente: Elaboración propia.

4.3.6 Resultados de prueba final, Problema #5

Esta actividad se desarrolló de manera individual

Tabla 40: *Resultados de prueba final, Problema #5*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	12
b)	0	0	0	12
c)	0	0	--	12
d)	0	0	--	12
e)	0	0	0	12
f)	0	0	--	12
g)	0	0	--	12
h)	0	0	--	12
i)	0	2	2	8
j)	0	7	0	5
k)	2	2	0	8

Fuente: Elaboración propia

Los resultados del problema propuesto en la prueba final muestran que los estudiantes aluden a aspectos variacionales en el desarrollo y resolución del mismo. Lo anterior refleja un avance en los procesos de aprendizaje del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

4.3.1 Rúbrica para prueba final, Problema #6

Tabla 41*: Rúbrica de evaluación para prueba final, Problema #6*

Inciso	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica de manera incorrecta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta una de las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.	Identifica de manera correcta las magnitudes o cantidades que intervienen en la situación.

b)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que el diámetro depende de la edad en años del roble.	N/A	Establece de forma correcta la relación que hay entre el diámetro y la edad del roble.
c)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina que el diámetro depende de la edad en años del roble.	N/A	Determina que la edad en años del roble depende del diámetro.
d)	No hay evidencia de lo solicitado.	Identifica que la variable dependiente es el diámetro y la variable independiente es la edad del roble.	N/A	Identifica que la variable dependiente es la edad del roble y la variable independiente es el diámetro.
e)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de manera inadecuada los pares ordenados.	Determina de manera adecuada un para par ordenado que interviene en la situación.	Determina de manera adecuada los pares ordenados que intervienen en la situación.
f)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos incorrectos para encontrar la pendiente.	Realiza ciertos procedimientos correctos para encontrar la pendiente.	Determinar la pendiente.
g)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos incorrectos para determinar la expresión matemática.	Realiza ciertos procedimientos correctos para determinar la expresión matemática sin llegar a la respuesta esperada.	Realiza procedimientos correctos para determinar la expresión matemática que modela la situación planteada.
h)	No hay evidencia de lo solicitado	Explica de manera inadecuada el significado de la pendiente en el contexto del problema.	Explica el significado de la pendiente en el contexto del problema, pero con ciertos argumentos inadecuados.	Explica de manera adecuada el significado de la pendiente en el contexto del problema.

i)	No hay evidencia de lo solicitado.	Realiza procedimientos inadecuados usando el modelo.	Realiza algunos procedimientos adecuados usando el modelo.	Realiza procedimientos adecuados usando el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.
j)	No hay evidencia de lo solicitado.	Grafica de manera inadecuada la función lineal que corresponde al problema planteado.	Grafica de manera correcta algunos puntos correspondientes a la expresión algebraica planteada, pero realiza un trazado incorrecto.	Grafica de forma correcta la función lineal que corresponde al problema planteado.

Fuente: Elaboración propia

4.3.6 Resultados de prueba final, Problema # 6

El desarrollo de esta actividad fue de manera individual.

Tabla 42*: Resultados de prueba final, Problema #6*

Incisos	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
a)	0	0	0	11
b)	0	0	--	11
c)	0	3	--	8
d)	0	5	--	6
e)	0	5	0	6
f)	0	5	0	6
g)	0	5	0	6
h)	2	3	4	2
i)	0	5	1	5
j)	0	5	0	6

Fuente: Elaboración propia

Acerca del problema propuesto como desafío en la prueba final, los resultados reflejaron que más de la mitad de los estudiantes identificaron adecuadamente la variable dependiente e independiente y establecieron de forma apropiada la relación de dependencia entre ellas, recurrieron a tareas de tratamiento en el registro algebraico para determinar la expresión algebraica correspondiente a la situación planteada y tareas de conversión al graficar la expresión algebraica encontrada manifestando en ello aspectos variacionales en el desarrollo y resolución del problema. Cabe destacar que, aunque algunos estudiantes confundieron las magnitudes correspondientes a la variable dependiente e independiente, desarrollaron el problema y hasta graficaron la expresión algebraica que encontraron, lo que refleja la adquisición de la noción de función lineal desde diversos registros al identificarla en un registro algebraico desde un registro verbal y en un registro gráfico desde un registro algebraico e identificar la pendiente como una razón.

4.3.1 Rúbrica para prueba final, ítems 3 y 4

Tabla 43*: Rúbrica de evaluación para prueba final, ítem 3 y 4*

Ítem	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem 3)	No hay evidencia de lo solicitado.	Construye una tabla y no logra registrar de manera adecuada los puntos de la gráfica.	Construye una tabla y registra algunos puntos que corresponden a la gráfica.	Construye de manera adecuada una tabla y registra los puntos que corresponden a la gráfica presentada.
Ítem 4)	No hay evidencia de lo solicitado.	Determina de manera inadecuada las expresiones algebraicas que representan las funciones lineales graficadas.	Determina de manera adecuada ciertos elementos de la expresión algebraica solicitada.	Determina de manera correcta la expresión algebraica que representa la función lineal graficada.

Fuente: Elaboración propia

4.3.6 Resultados de prueba final, ítems 3 y 4

El desarrollo de esta actividad fue de manera individual.

Tabla 44: *Resultados de prueba final, ítems 3 y 4*

Ítem	**No respondió**	**Inadecuado**	**Parcialmente adecuado**	**Adecuado**
3)	0	0	1	11
4)	0	0	1	11

Fuente: Elaboración propia

Y, finalmente, con los ítems 3 y 4, los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes recurrieron de manera adecuada a los registros tabular y algebraico de la función lineal desde el registro gráfico.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

Atendiendo al primer objetivo vinculado a la primera pregunta de investigación que se planteó acerca de explorar los conocimientos previos que tienen los estudiantes para lograr la comprensión del concepto de función lineal, los resultados mostraron que en la temática evaluada en la prueba diagnóstica, aunque estaba vinculada a contenidos desarrollados en séptimo grado los estudiantes presentaron dificultades y debilidades. Entre estas se describen:

- Dificultad en el planteamiento de expresiones algebraicas dadas inicialmente en un lenguaje natural y viceversa.
- Dificultad en el planteamiento de ecuaciones lineales en problemas de la vida cotidiana, además del poco manejo de las propiedades de la igualdad o de las reglas de transposición de términos para su resolución y debilidad en la noción de valor numérico para su comprobación.
- Dificultad en reconocer que para que dos magnitudes sean directamente proporcionales implica que el cociente entre ambas debe ser constante. Así también, para la resolución de problemas en los que intervienen este tipo de magnitudes implica tener claro la noción de constante de proporcionalidad.

Parte de estas dificultades y debilidades son debidas a que los contendidos retomados en noveno grado para el inicio del estudio de la función lineal son contenidos correspondientes a séptimo grado, lo que refleja que no hay un enlace cercano entre estos contenidos. Lo anterior sugiere que para facilitar la construcción y comprensión de nuevos saberes es conveniente establecer un enlace cercano entre los contenidos previos y el objeto matemático en estudio.

En cuanto al segundo objetivo vinculado a la segunda pregunta de investigación relacionada con la implementación de secuencias didácticas, el tipo de secuencias que se diseñaron, perseguían que a través del análisis de fenómenos que implican el cambio y variación, desarrollar el pensamiento variacional y con el uso de este pensamiento y la articulación de sus diversos registros de representación semiótica lograr la construcción y comprensión del concepto de función lineal.

Sobre las representaciones semióticas del concepto de función, con el diseño e implementación de las secuencias didácticas, los estudiantes lograron llevar a cabo tareas de tratamiento: transitar el concepto de función lineal en un mismo registro y tareas de conversión: transitar el concepto en diversos registros de representación. Estas tareas se desarrollaron con cada secuencia de aprendizaje propuesta, así: el paso del registro natural al algebraico (secuencia de aprendizaje #1), del registro tabular al algebraico (secuencia de aprendizaje #3); del registro tabular al gráfico (secuencia de aprendizaje #4); del registro gráfico al tabular (secuencia de aprendizaje #5) del registro algebraico al gráfico (secuencia de aprendizaje #7); del gráfico al algebraico (secuencia de aprendizaje #8). Ya que como afirma Duval y Sáenz (2016) “cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación” (Duval y Sáenz, 2016:91).

Con la implementación de estas secuencias se persiguió que los estudiantes identificaran variables dependientes e independientes y establecieran relaciones entre ellas, predijeran estados futuros sobre situaciones específicas, plantearan modelos o expresiones algebraicas, comprendieran la noción de pendiente y reconocieran que la razón de cambio constante como una característica de la función lineal, plantearan expresiones algebraicas como los modelos correspondes a diversos problemas planteados en forma verbal, identificaran que la gráfica de una función lineal es una recta y que puede ser creciente o decreciente, graficaran funciones lineales, construyeran tablas a partir de gráficas, graficaran funciones lineales a partir de tablas, plantearan expresiones algebraicas a partir de gráficas.

En relación al tercer objetivo vinculado a la tercera pregunta de investigación que aludía al análisis del nivel de comprensión del concepto de función lineal logrado mediante el desarrollo del pensamiento variacional y su articulación con los registros de representación, se tomó como referencia los cinco niveles de comprensión de conceptos propuestos por Hitt (ver tabla 3). En este sentido, el panorama que ofreció el análisis realizado a través del Enfoque Ontosemótico, el cual es útil para el estudio de prácticas matemáticas, en su primer nivel de análisis se vincula a los objetos y procesos primarios como las producciones de los estudiantes, sus afirmaciones, argumentos, concepciones y procedimientos. Lo anterior, permitió reconocer e identificar que la mayoría de los estudiantes alcanzaron el nivel cuatro de comprensión (ver tabla 3); esto implica, según Hitt, articular coherentemente entre dos sistemas de representación el concepto de función lineal en las situaciones variacionales propuestas.

En consecuencia, se involucró el logro de los niveles dos y tres al identificar el concepto de función lineal en sus diferentes representaciones y llevar a cabo trasformaciones con preservación de significado de concepto de función lineal desde un sistema de representación a otro respectivamente. Respecto al nivel cinco, pocos estudiantes lograron articular coherentemente los diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

Y, finalmente, el cuarto objetivo vinculado a la cuarta pregunta de investigación que se planteó orientada a caracterizar el uso del pensamiento variacional para la comprensión del concepto de función lineal. Atendiendo a las consideraciones teóricas propuestas por autores como Vasco (2002), Posada y Villa (2006), Caballero y Cantoral (2013a), Caballero y Cantoral (2013b), quienes convergen que la intervención de elementos como la variación y el cambio son fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional y a las consideraciones teóricas de autores como Duval y Hitt respecto a los registros de representación semiótica como medio para exteriorizar la compresión del concepto de función lineal a través del pensamiento variacional. Estos elementos se ponen de manifiesto en la siguiente caracterización en la que se destacan:

1. Principales logros:

De manera general, se logró que los estudiantes:

- Identificaran lo que varía, lo que permanece constante, identificaran variables dependientes e independientes y establecieran relaciones entre ellas, predijeran estados futuros sobre situaciones específicas, plantearan modelos o expresiones algebraicas. y llevar a cabo tareas de tratamiento y conversión entre sus distintos registros de representación.
- Comprendieran la noción de pendiente y reconocieran la razón de cambio constante como una característica de la función lineal.
- Encontraran expresiones algebraicas que modelan los datos contenidos en tablas.
- Identificaran que la gráfica de una función lineal es una recta al graficar datos de situaciones de la vida cotidiana contenidos en tablas.
- Graficaran funciones lineales utilizando la ordenada al origen y la interpretación de la pendiente como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ e identificando si eran crecientes o decrecientes.
- Construyeran tablas las que contenían las coordenadas de los puntos que corresponden a las gráficas de la función lineal.
- Escribieran expresiones algebraicas correspondientes a la graficas de funciones lineales.

2. Principales habilidades y estrategias

Los estudiantes desarrollaron habilidades y estrategias como:

- Recurrir a distintas representaciones del concepto de función lineal al identificarla en un registro algebraico desde un registro verbal y en un registro gráfico desde un registro algebraico, en un registro tabular y algebraico desde un registro gráfico.
- A través del uso de la visualización, los estudiantes interpretaron la razón de cambio constante en las gráficas de funciones lineales, determinando a su vez si estas eran crecientes o decrecientes, haciéndose posible de esta manera el estudio dinámico de la variación (Castiblanco y Moreno, 2004:15).
- A través de realizar cálculos de resta y cociente entre intervalos de datos contenidos en tablas, los estudiantes recurrieron a uso de la seriación como una de las estrategias variacionales propuestas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012) quien señala que la seriación como estrategia variacional, puede ser usada para hallar una relación funcional dada una tabla de valores, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o encontrar relaciones entre variables o funciones, entre otras. Tal fue el caso que se dio en la secuencia #2 en la que se pretendió que lo estudiantes identificaran la razón de cambio constate como característica de las funciones lineales.

  También los estudiantes recurrieron al uso de la comparación como otra de las estrategias variacionales propuestas por Salinas (como se citó en Caballero, 2012), quien señala que la comparación, está asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados, esto se dio en la secuencia de aprendizaje #3 en la que los estudiantes hacían comparaciones del salario mensual de Julia al trabajar cierta cantidad de horas extras.

3. **Principales dificultades y debilidades**

- Algunos estudiantes presentaron dificultad en organizar en tablas las coordenadas que representan los puntos de la gráfica de una función lineal, al escribir las coordenadas correspondientes de la variable y en la variable x como también escribir las coordenadas correspondientes de la variable x en la variable y.
- Dificultad en la interpretación de la pendiente como razón $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ lo que involucraba identificar las direcciones arriba, abajo, derecha o izquierda.
- Debilidades en graficar expresiones algebraicas, que aunque la noción de pendiente como $\frac{cambio\ y}{cambio\ x}$ se evidenció, la gráfica inadecuada del punto correspondiente a la ordenada al origen generó graficas incorrectas de las expresiones algebraicas correspondientes a las funciones lineales planteadas.
- Se presentaron dificultades en escribir expresiones algebraicas correspondientes a gráficas de funciones lineales, esto se debió a la inadecuada identificación de la ordenada al origen e identificación de puntos correspondientes a la gráfica para encontrar la pendiente.
- Dificultad en determinar la relación de dependencia entre variables, esto se evidenció, por ejemplo, en un problema planteado en la prueba final cuando algunos estudiantes confundieron el diámetro como variable dependiente y los años del roble como la variable independiente. Así, lo anterior llevó a desarrollar de manera inadecuado el resto de la situación planteada.
- Debilidad en la escritura de expresiones matemáticas.

De manera general, con base a los resultados obtenidos se considera que:

- Con las prácticas matemáticas implementadas en el estudio del concepto de función lineal a través del análisis de situaciones de cambio y variación, se propició una base para estimular el desarrollo del pensamiento variacional lo que favorece la compresión de este concepto, así como lo señala Cabrera (2009), quien refiere que trabajos desarrollados bajo la línea del pensamiento y lenguaje variacional "muestran la factibilidad de abordar el estudio de la variación y el desarrollo de las estrategias variacionales, como medios adecuados y favorecedores para la construcción y apropiación de conceptos matemáticos tales como las funciones" (Cabrera, 2009:43) y que además se evidencia en secuencia didáctica de aprendizaje 1,3 y la prueba final (ver tablas 39 y 40) en los que se aluden aspectos variacionales en el desarrollo y resolución del problema propuesto y cuyos resultados reflejaron un avance en los procesos de aprendizaje del concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.
- La incorporación del pensamiento variacional para la construcción del concepto de función lineal contribuyó a que los estudiantes adquirieran un conocimiento rico en significados. Pues, las tareas propuestas demandaban argumentación y análisis en los procesos realizados (ver Secuencia didácticas 1,3 y prueba final). A este respecto, autores señalan que "propiciar el estudio de la variación representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados" (Caballero y Cantoral,2013a:1586).
- Asimismo la articulación del concepto de función lineal en sus diferentes registros de representación y las tareas de tratamiento y conversión entre ellas, contribuyó para consolidar la construcción de este concepto. Así como lo indica Hitt (2001) al sugerir que "es absolutamente necesario contar con actividades de conversión en por lo menos dos registros

de representación para que las representaciones en juego, por ser complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión” (Hitt, 2001:175).

5.2 Recomendaciones

- Resulta pertinente seguir profundizando en el estudio del pensamiento variacional y potenciar su desarrollo en las prácticas matemáticas en el aula.
- A la comunidad educativa se recomienda abordar el concepto de función lineal por medio del planteamiento de situaciones cercanas al entorno de los estudiantes. De acuerdo con PISA (como se citó en Cabrera y Cantoral, 2010) se señala que los problemas deben ser cercanos a la realidad del estudiante, que puedan ser vividos o susceptibles a ser vividos por él.

  Además, se recomienda que para iniciar el estudio del concepto de función lineal, se haga énfasis en tareas que sitúen a los estudiantes en escenarios en los que se desarrollen nociones del cambio y variación, ya que “comprender el cambio es fundamental para comprender las funciones” (NCTM, 2003:42), pues con ello favorecerá y permitirá construir una base para fortalecer la comprensión de conceptos como el de función y otros conceptos estudiados en niveles más avanzados como nociones relacionadas al cálculo.

  Procurar transitar el concepto de función lineal en sus diversos registros, entre ellos: verbal, algebraico, tabular, gráfico, involucrando tareas de tratamiento (transitar un concepto en el mismo registro) y conversión (transitar el concepto de un registro a otro) para lograr un mejor entendimiento de este. Ya que según Duval (2006) “la conversión puede ser considerada como el umbral de la comprensión” (Duval, 2006:149).

  Enfatizar la razón de cambio constante como característica de las funciones lineales Posada y Villa (2006).

Se recomienda también, enfatizar en los estudiantes la importancia de la adecuada escritura, además de corregir los errores ortográficos que ellos comenten. De esta manera se permite la formación integral de los estudiantes y contribuir con su mejoramiento en todas las áreas.

- Al Ministerio de Educación, se recomienda considerar la incorporación del pensamiento variacional en el currículum desde los primeros años de escolaridad, ya que es con el tiempo que este tipo de pensamiento se va enriqueciendo. De acuerdo con Mendoza (2016), el pensamiento variacional "debe considerarse como la base sobre el cual se estructure el curriculum matemático, ya que este es un pilar y eje de otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial o geométrico, estocástico, métrico) figurando como un eje articulador de éstos" (Mendoza, 2016:58).

  Para favorecer la construcción y comprensión de nuevos saberes se recomienda establecer en el currículo un enlace cercano entre los contenidos previos a la temática de función lineal y el estudio de este concepto. Debido a que estos contenidos previos son estudiados en séptimo grado y la temática de función lineal hasta noveno grado.

Referencias Bibliográficas

Acuerdo No. 0985-SE-2018. Secretaría de Educación, Comayaguela, M.D.C., Honduras, 25 de octubre de 2018.

ACE. (2012). Resultados TIMSS 2011 Chile. Recuperado de https://www.agenciaeducacion.cl /wp-content /uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf

Amaya, T. y Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. Educación matemática, 25(2), 119–140.

Amaya, T. R., Pino, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. Educación matemática, 28(3), 111–144.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17, 418-422. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. (2012). Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato (tesis de maestría). México: Cinvestav.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013a). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1583-1591. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013b). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial. Formación universitaria, 9, 13–26.

Cabrera, L. (2009). El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato (tesis de maestría). México: Cinvestav.

Cabrera, L. y Cantoral, R. (2010). El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 859-867. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. Educación Matemática, 18 (1), 133-160.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon, 42, 3.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall.

Cantoral, R., Molina, J. G. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014b). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. Revista Pedagógica Escri/viendo, 11(24), 17–26.

Cantoral, R., Reyes, D. y Montiel, G. (2014a). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3), 91–116.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. Revista Ema, 8, 121–156.

Castiblanco, A. y Moreno, L. (2004). Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Revista científica, 11, 150–164.

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El cálculo y su enseñanza, 4. México: Cinvestav.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo: Curso del Doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática*, Universidad del Valle, 1999. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2004b). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9, 143–168.

Duval, R. y Sáenz, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N. y Abarzúa, A. (2016). Aportes para la Enseñanza de la Matemática.

Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 8(1).

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14, 325–355.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Publicaciones, 38, 25–48.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Boletim de Educação Matemática, 31, 90–113.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47–78.

Gómez, E., Hernández, H. y Chaucanés, A. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. Scientia et technica, 20(3), 278-285.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6a ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Education.

Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Educación matemática, 10, 23–45.

Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. The Journal of Mathematical Behavior, 17, 123–134.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Educación matemática, 7, 63–75.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, 165–178.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Edición Especial: Educación Matemática, 213.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. Revista Conect@2, (9), 27-57.

MEN, C. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Documento: Vol. 3. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mendoza, M. M. (2016). Pensamiento variacional emergente: Una experiencia en cálculo inicial desde una primera categoría de análisis del enfoque ontosemiótico. (Tesis doctoral). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.

NCTM. (2003). Principios y estándares para la educación matemática (1. ed.). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

UNESCO. (2014). El desarrollo sostenible comienza por la educación. Francia. Recuperado de: http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002305/230508s.pdf

Ospina, O. M. G. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Revista científica, 2, 115–120.

Planchart, O. (2002). La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cuernavaca, México. Recuperado de: http://ponce. inter. edu/cai/tesis/oplanchart/inicio. Pdf,

Posada, F. y Obando, G. (2006). Pensamiento variacional y razonamiento algebraico: Medellín: Gobernación de Antioquia.

Posada, F. y Villa, J. A. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Prada, R., Hernández, C. y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de Ingeniería-Understanding of the notion of function and the articulation of the semiotic registers that represent it among students entering an Engineering program. Revista científica, 2, 188–205.

Rey, G., Boubée, C., Vazquez, P. S. y Cañibano, A. (2009). Ideas para Enseñar. Número 20–Diciembre de 2009, 153.

Ruiz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico (tesis doctoral). Universidad de Granada.

Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, 141–155.

Secretaría de Educación. (2003). Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2010). Informe Nacional de Desempeño Académico 2010 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2011a). Estándares Educativos Nacionales Español y Matemáticas 1er-11mo grado. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2011b). Programaciones Educativas Nacionales Español y Matemáticas 7mo- 11avo grado. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2012). Informe Nacional de Desempeño Académico 2012 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2013). Informe Nacional de Desempeño Académico 2013 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2014). Informe Nacional de Desempeño Académico 2014 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2015). Informe Nacional de Desempeño Académico 2015 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2016c). Informe Nacional de Desempeño Académico 2016 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2016a). Guía del docente Séptimo grado. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2016b). Guía del docente Noveno grado. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2017). Informe Nacional de Desempeño Académico 2016 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2018). Evaluación de desempeño académico Informe Municipal. Nacional de Desempeño Académico 2017 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning.

Torres, W. A. (2011). El Enfoque Ontosemiótico para la investigación en educación matemática: Una reflexión crítica. Revista de Educación de Puerto Rico (REduca), 54–69.

UPNFM, (2017). Sistema de Líneas Institucionales de Investigación 2017-2018. Tegucigalpa: COIMPRES

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías.

Vrancken, S., Engler, A., Leyendecker, A. y Müller, D. (2017). Función de primer grado. Construcción de significados desde una perspectiva variacional. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 49, 122–142.

Zúniga, M. (2009). Construcción del Concepto de Función, Visualización. En alumnos de Cálculo I (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.

Anexos

Anexo 1: Prueba Diagnóstica

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción
Prueba Diagnóstica

Nombre: ____

Fecha: __________

Instrucciones: Resuelva de manera clara y ordenada cada uno de los problemas presentados a continuación, dejando evidencia de todo procedimiento usado para su resolución.

1. Escriba una expresión algebraica que represente cada expresión escrita en lenguaje cotidiano o natural:

a) El doble de un número aumentado en cinco unidades: ____________________

b) La mitad de un número disminuido en diez unidades: ____________________

c) La edad de José dentro de siete años: ____________________

d) La tercera parte de un número ____________________

2. Si x, y, z representan números distintos. Escriba una expresión en lenguaje cotidiano o natural que represente cada expresión escrita en lenguaje algebraico:

a) $\frac{1}{5}y$: ____

b) $z + 14$: ____

c) $3x - 5$: ____

3. Resuelva los siguientes problemas, compruebe su respuesta y deje evidencia de los procesos realizados.

a) El doble de un número aumentado en 15 unidades es 75. ¿Cuál es el número?

b) Se van a repartir confites a varios niños. Si se le dan 6 confites a cada uno sobran 8 y si se le dan 8 confites a cada uno faltan 6. ¿Cuántos niños hay?

4. En cada situación de la **COLUMNA A,** determine la relación correspondiente con cada expresión de la **COLUMNA B**.

a) Escriba en el espacio en blanco de la **COLUMNA A** la letra correspondiente de la **COLUMNA B**.

COLUMNA A	**COLUMNA B**
1. ___ El llenado de un recipiente	a) Los kilómetros recorridos
2. ___ Salario de un obrero	b) Horas trabajadas
3. ___ El consumo de gasolina	c) Número de artículos comprados
4. ___ Gasto total	d) El peso agregado
5. ___ El estiramiento de un resorte	e) Tiempo transcurrido

b) En las líneas en blanco justifique cada relación de correspondencia que determinó en el inciso a.

1. ____

2. ____

3. ____

4. ____

5. ____

5. Indique cuál de las siguientes tablas representan la relación de cantidades directamente proporcionales. Justifique su respuesta.

Tabla A

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Tabla B

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

6. Resuelva el siguiente problema dejando evidencia de todo procedimiento utilizado.

Si Carlos compró 15 libros y gastó L. 1200.00. ¿Cuánto gastará César si compra 80 libros al mismo precio que los compró Carlos?

Anexo 2: Secuencia didáctica de aprendizaje #1

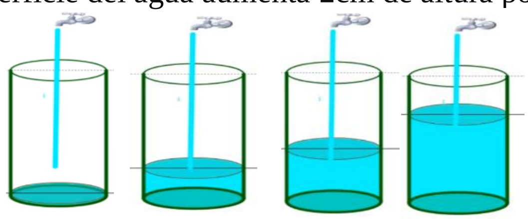
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 1

Nombre: ____

Fecha: ________________

Se quiere llenar un tanque cilíndrico. El tanque está vacío y se empieza a llenar de modo que el volumen de la superficie del agua aumenta 2cm de altura por minuto.



a) ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?

b) ¿Cuántos cm mide la altura del agua después de 1 minuto?

c) Después de un minuto y medio, ¿cuánto se habrá llenado?

d) ¿Después de 2 minutos?

e) Completar la tabla hasta llegar a los 8 minutos

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	6		
Altura (cm)								

f) Podrías predecir ¿cuál será la altura después de 25 minutos?

g) ¿Qué relación hay entre la altura y el tiempo?

h) ¿La altura de la superficie del agua depende del tiempo o el tiempo depende de la altura de la superficie del agua?

i) ¿Qué cantidad depende de la otra?
Variable dependiente: __________
(Llame $\boldsymbol{y}$ a la variable dependiente. Representa: ¿Qué cambia?)

j) ¿Qué cantidad es independiente?
Variable independiente ______________
(Llame $\boldsymbol{x}$ a la variable independiente Representa: ¿respecto a qué cambia?)

k) ¿Cómo podemos expresar con un modelo la altura en términos del tiempo?

l) Usa el modelo para verificar la predicción que hiciste en el inciso f.

m) Usa el modelo para determinar la altura después de 73 minutos.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 2

Nombre: ____

Fecha: _______________

Todos los días en las noches doña María le paga a Raquel L.80 por ayudarle a vender baleadas. Por cada baleada que Raquel vende, doña María le da L.2. Si Raquel ha vendido cierta cantidad de baleadas al finalizar la jornada de trabajo.

a) ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?

b) ¿Cuánto ganará Raquel si cada día en la noche vende?

- El lunes 5 baleadas:
- El martes 10 baleadas:
- El miércoles 15 baleadas:
- El jueves 20 baleadas:
- El viernes 25 baleadas:

c) ¿Qué cantidad permanece fija (constante)? ¿Por qué?

d) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

e) Podrías predecir ¿cuánto ganaría Raquel si vendiera 37 baleadas?

f) ¿Qué relación hay entre lo que gana Raquel diariamente y las baleadas vendidas?

g) ¿Qué cantidad depende de la otra?

Variable dependiente: y= _______________

h) ¿Qué cantidad es independiente?
Variable independiente: x= ________________

i) ¿Cómo podemos expresar un modelo del salario diario de Raquel en términos de la cantidad de baleadas vendidas?

j) Usa el modelo para verificar la predicción que hiciste en el inciso e.

k) Usa el modelo para determinar cuánto ganaría Raquel si vende 51 baleadas.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 3

Nombre de los integrantes: ____
Fecha: _______________

Roberto vende arroz en el mercado. Cada libra de arroz la vende a L.9

a) ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?

b) Cuánto ganará Roberto si vende:

- 1 libra de arroz:
- $1\frac{1}{2}$ libra de arroz:
- 2 libras de arroz :
- 3 libras de arroz:
- 4 libras de arroz :
- $4\frac{1}{2}$ libras de arroz:

c) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

d) Podrías predecir ¿Cuánto ganaría Roberto si vende $19\frac{1}{2}$ libras de arroz?

e) ¿Qué relación hay entre las cantidades que intervienen en la situación?

f) ¿Qué cantidad depende de la otra? Variable dependiente: y= ________________

g) ¿Qué cantidad es independiente? Variable independiente: x= __________________

h) Plantea un modelo que exprese lo que gana Roberto respecto a la cantidad de libras de arroz vendidas.

i) Usa el modelo para verifica la predicción que hiciste en el inciso d.

j) Usa el modelo para determinar cuánto ganará Roberto si vende 47 libras de arroz.

Anexo 3: Secuencia didáctica de aprendizaje #2

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 4

Nombre: ____

Fecha: _______________

La tabla registra los datos de la altura que alcanza la superficie del agua de una pila que aumenta 2cm por minuto.

Minutos x	Altura $y = 2x$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

a) Encontrar la razón, $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ altura})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ tiempo})} = \frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$ correspondiente a cada altura trascurrido cada minuto:

$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$	$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$
$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$	$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$
$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$	$\frac{\boldsymbol{cambio\ de\ y}}{\boldsymbol{cambio\ de\ x}} =$

b) ¿Cómo son las razones en cada $\frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ altura})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ tiempo})} = \frac{(\boldsymbol{cambio\ de\ y})}{(\boldsymbol{cambio\ de\ x})}$ **?**

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 5

Nombre: ____

Fecha: _______________

Determine que tabla corresponde a puntos de una función lineal. Justifique su respuesta.

Tabla A

x	**Y**
1	1
2	4
5	25
7	49
10	100

Tabla B

x	**Y**
2	5
5	26
6	37
9	82
11	122

Tabla C

x	**Y**
1	11
3	17
10	38
12	44
16	56

Anexo 4: Secuencia didáctica de aprendizaje #3

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 6

Nombre de los integrantes: ____

Fecha: _______________

1. La siguiente tabla muestra el sueldo mensual que ganaría Julia de acuerdo a la cantidad de horas extras trabajadas. El sueldo fijo es de L. 6,800.
Complete la tabla contestando las siguientes preguntas.

x (Horas extras)	y (Sueldo mensual)
	6,800
3	7,040
	7,200
6	
7	
	7,520
	7.600

a) Para recibir L. 6,800 de sueldo ¿cuántas horas extras debe trabajar Julia?

b) ¿Cuánto es el cambio de salario mensual al trabajar 3 horas extra respecto a no trabajar horas extras?

c) ¿Cuánto representa ese cambio de salario mensual por hora extra trabajada?

d) ¿Qué representa ese valor?

e) ¿Cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 6 horas extra?

f) ¿Cuánto recibirá de salario mensual Julia si trabaja 7 horas extra?

g) ¿Cuánto es el cambio de salario mensual al ganar L. 7,200 respecto a ganar L. 7040?

h) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

i) Entonces, ¿cuántas horas extra representa ganar L.7200 de sueldo?

j) ¿Cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,520 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?

k) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

l) Entonces, ¿cuántas horas extra representa ganar L.7520 de sueldo?

m) ¿Cuánto es el cambio salario mensual al ganar L. 7,600 respecto al salario mensual al trabajar 7 horas extras?

n) ¿Cuántas horas extras representa ese cambio?

o) Entonces ¿Cuántas horas extra representa ganar L.7600 de sueldo?

p) Encuentre la pendiente con los datos registrados en la tabla.

q) ¿Qué expresión matemática modela el sueldo mensual en términos de las horas extras trabajadas?

Anexo 5: Secuencia didáctica de aprendizaje #4

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 7

Nombre de los integrantes: ____

Fecha: ________________

1. La siguiente tabla contiene los datos de la temperatura Celsius en relación a la temperatura Fahrenheit

C (Celsius)	F(Fahrenheit)
-10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

a) Grafique los puntos tabulados en el plano cartesiano.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 8

Nombre de los integrantes: ____

Fecha: ________________

2. A una ciudad llegó un circo. La tabla muestra el comportamiento del precio de la entrada en las últimas 4 semanas. Exprese con una gráfica ese comportamiento.

Semana	**Valor de la entrada**
1	100
2	75
3	50
4	25

Anexo 6: Secuencia didáctica de aprendizaje #5

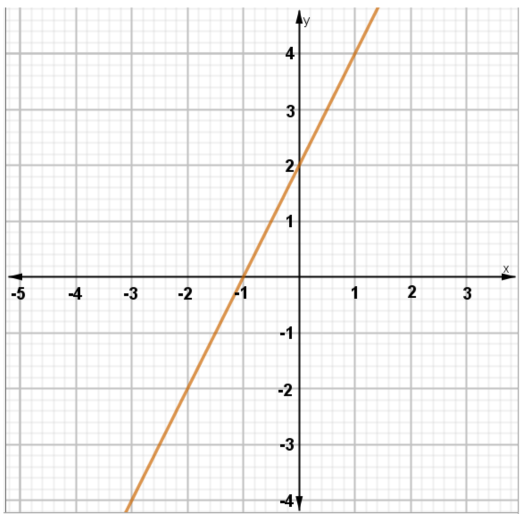
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

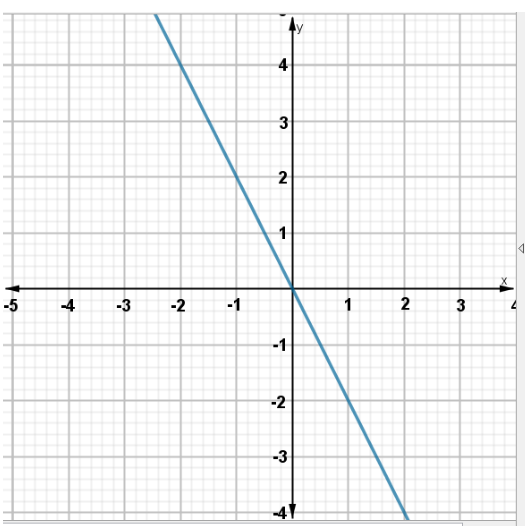
Hoja de trabajo Actividad N° 9

Nombre de los integrantes: ____

Fecha: ________________

Crear una tabla dada una gráfica de una función lineal





Anexo 7: Secuencia didáctica de aprendizaje #6

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 10

Nombre de los integrantes: ____

Fecha: _______________

Llene la siguiente tabla:

Función Lineal	Ordenada al origen	Pendiente	$\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$	Interpretación de $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$
a) $y = 3x$				$\boldsymbol{x}$ avanza _____hacia la ___________ $\boldsymbol{y}$ avanza _____hacia _____________
b) $y = -2x - 5$				$\boldsymbol{x}$ avanza _____hacia la ___________ $\boldsymbol{y}$ avanza _____hacia ____________
c) $y = \frac{2}{3}x + 6$				$\boldsymbol{x}$ avanza _____hacia la ___________ $\boldsymbol{y}$ avanza _____hacia _____________
d) $y = -\frac{3}{4}x + 1$				$\boldsymbol{x}$ avanza _____hacia la ___________ $\boldsymbol{y}$ avanza _____hacia ____________

Anexo 8: Secuencia didáctica de aprendizaje #7

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción
Hoja de trabajo Actividad N° 11

Nombre: ____

Fecha: _________________

Grafique cada una de las funciones lineales de la tabla anterior utilizando la ordenada al origen y la interpretación de la pendiente como $\frac{Cambio\ y}{cambio\ x}$, indicando si es creciente o decreciente.

$a)\ y = 3x$	$b) y = -2x - 5$
$c)\ y = \frac{2}{3}x + 6$	$d)\ y = -\frac{3}{4}x + 1$

Anexo 9: Secuencia didáctica de aprendizaje #8

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

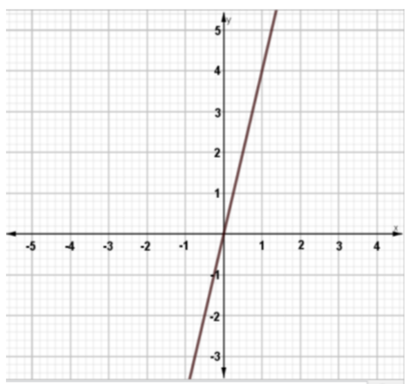
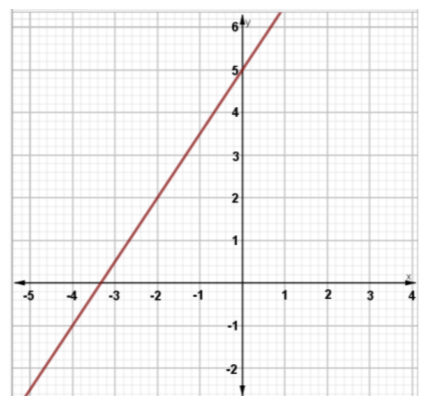
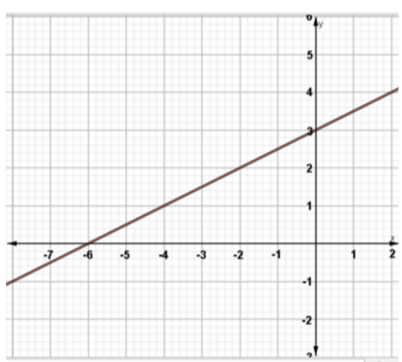
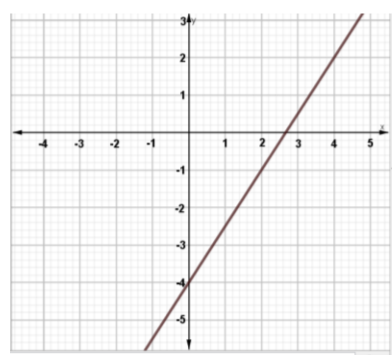
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Hoja de trabajo Actividad N° 12

Nombre: ____

Fecha: _______________

En cada gráfica representada indique:

	
• La ordenada al origen: _________ • $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right) =$ • Pendiente: __________ Escriba la función lineal que representa la gráfica: ____________________	• La ordenada al origen: _________ • $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right) =$ • Pendiente: __________ Escriba la función lineal que representa la gráfica: ____________________
	
• La ordenada al origen: _________ • $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right) =$ • Pendiente: __________ Escriba la función lineal que representa la gráfica: ____________________	• La ordenada al origen: _________ • $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right) =$ • Pendiente: __________ Escriba la función lineal que representa la gráfica: ____________________

Anexo 10: Prueba Final

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FRANCISCO MORAZÁN
Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción
Prueba Final

Nombre: ____

Fecha: ________________

1. Elena le ayuda a vender flores a doña Ana en un vivero. Si diariamente doña Ana le paga a Elena L.135 y por cada rosa vendida le paga L.3 extra.

a) ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en la situación?

b) ¿Cuánto ganará Elena cada día si vende?
- El lunes 1 rosa:
- El martes 2 rosas:
- El miércoles 3 rosas:
- El jueves 4 rosas:
- El viernes 5 rosas:
- El sábado 6 rosas:

c) ¿Qué cantidad permanece fija (constante)? ¿Por qué?

d) ¿Qué cantidad varía? ¿Por qué?

e) Podrías predecir ¿Cuánto ganaría Elena si vendiera 29 rosas?

f) ¿Qué relación hay entre lo que gana Elena diariamente y las rosas vendidas?

g) ¿Qué cantidad depende de la otra?
Variable dependiente: y= _______________

h) ¿Qué cantidad es independiente?
Variable independiente: x= ________________

i) ¿Cómo podemos expresar un modelo del salario diario de Elena en términos de la cantidad de rosas vendidas?

j) Usa el modelo para verificar la predicción que hiciste en el inciso e

k) Usa el modelo para determinar cuánto recibió de pago Elena si vendió 71 rosas rojas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FRANCISCO MORAZÁN

Maestría en Matemática Educativa XIII Promoción

Prueba Final

Nombre: ____

Fecha: _________________

2. Para estimar la edad de los árboles, los biólogos emplean un modelo lineal que relaciona el diámetro del árbol con la edad. El modelo es útil porque es mucho más fácil medir el diámetro del árbol que su edad (lo que requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para cierta variedad de robles se determinó que el diámetro del tronco de un árbol de 24 años de edad es 10 cm y el de uno de 32 años es 15 cm.

a) ¿Qué magnitudes o cantidades intervienen en esta situación?

b) ¿Qué relación hay entre el diámetro y la edad del roble?

c) ¿El diámetro depende de la edad en años del roble o la edad en años del roble depende del diámetro?

d) ¿Qué cantidad depende de la otra?

- Variable dependiente y=
- Variable independiente: x=

e) ¿Qué pares ordenados intervienen en la situación?

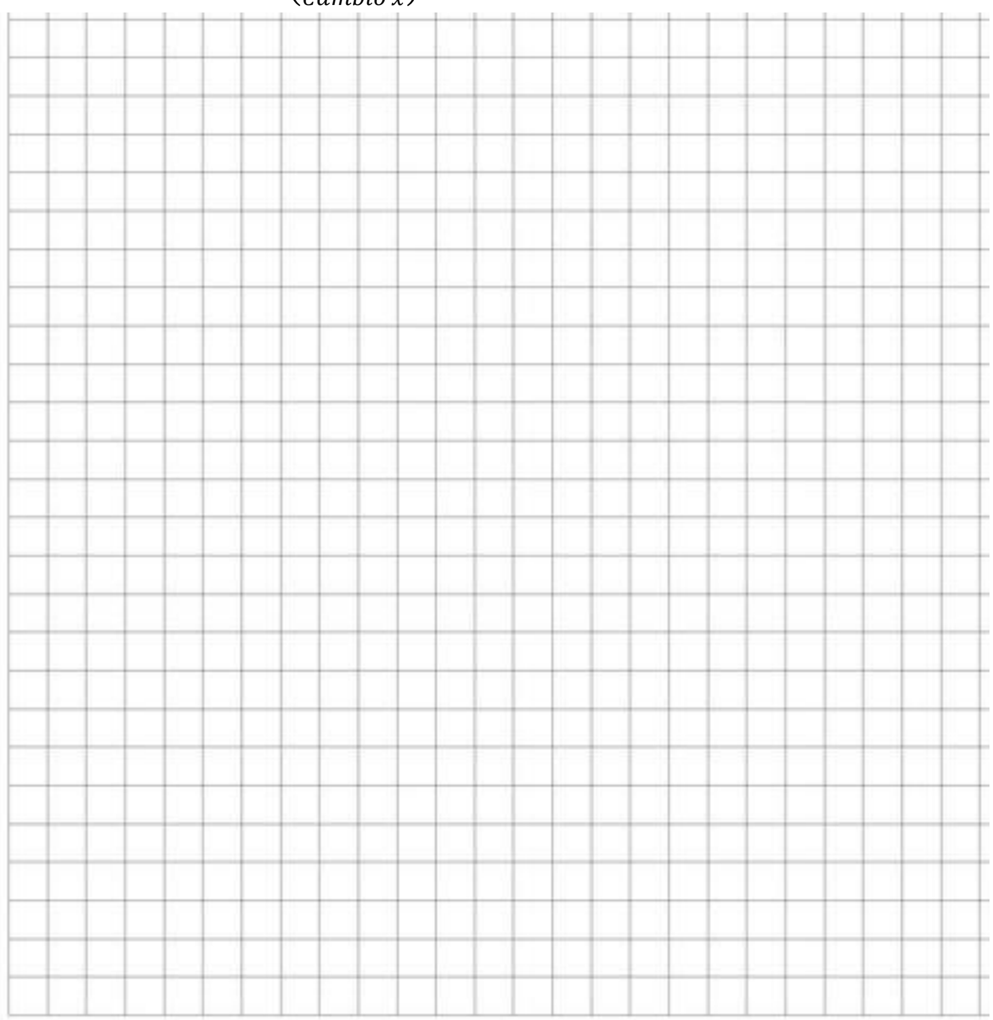
f) Determine la pendiente:

g) Escriba la expresión matemática que represente o modele esta situación:

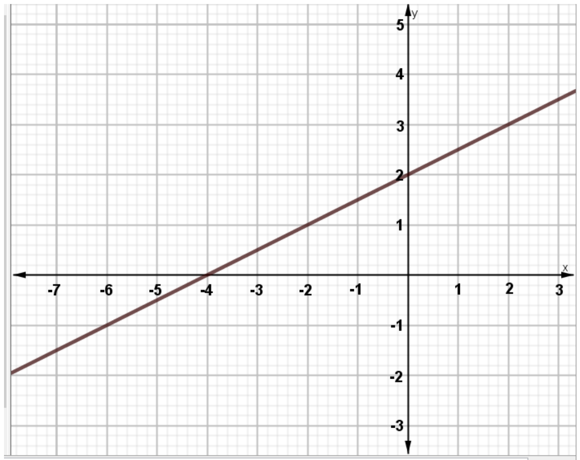
h) Explique el significado de la pendiente en el contexto del problema.

i) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 45 cm.

j) Represente con una gráfica la función lineal planteada en el inciso h haciendo uso de la pendiente como razón de $\left(\frac{Cambio\ y}{Cambio\ x}\right)$.



3. Cree una tabla dada la gráfica de una función lineal.



4. Encuentre la expresión algebraica que representa la gráfica.