

Capítulo 11

La demostración de teoremas, usando geogebra: un estudio desde el modelo Van Hiele¹

A demonstração de teoremas, usando geogebra: um estudo a partir do modelo Van Hiele²

DOI: <https://doi.org/10.67595/demostracion-teoremas-geogebra-van-hiele>

Fray Valentín Cloter Ruiz

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

San Pedro Sula, Cortés, Honduras.

<https://orcid.org/0009-0008-5531-2702>

fcloter@upnfm.edu.hn

Edgar Vásquez Alberto (asesor de tesis)

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

San Pedro Sula, Cortés, Honduras.

<https://orcid.org/0000-0003-3852-4427>

evasquez@upnfm.edu.hn

Resumen

En el presente estudio se buscó analizar de qué manera los estudiantes del curso de Geometría II de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán CURSPS progresaban en la demostración de teoremas de circunferencia a través del modelo de Van Hiele y apoyados por el software dinámico Geogebra. Con la finalidad de lograr el propósito se realizó la construcción de una propuesta didáctica fundamentada en los aportes sobre el aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de la geometría dinámica de Gutiérrez (2005). En este sentido, se propuso un estudio cualitativo, que propone una alternativa para el aprendizaje de la demostración sobre los cuadriláteros inscritos (cíclicos) y circunscritos. Como resultado de este trabajo de investigación se encontró que los estudiantes sometidos al proceso obtuvieron el logro de al menos el primero de los niveles de Van Hiele, demostrando de esta forma que el uso reflexivo del software Geogebra potencia el Reconocimiento y Visualización (Nivel 0 de Van Hiele) en el aprendizaje de la demostración sobre cuadriláteros inscritos y circunscritos. Mientras que uno de los investigados logró un promedio de superación de 2 niveles, cercano a alcanzar el nivel 3, esto hace referencia a la capacidad de construir una Deducción Formal.

Palabras claves: demostración; circunferencia; geogebra; Van Hiele; teorema.

¹ Derivada de la tesis titulada "La Demostración de Teoremas sobre la Circunferencia, usando Geogebra: Un estudio desde el modelo de Van Hiele" para obtener el grado de Magíster en el programa "Maestría en Matemática Educativa". Sustentada: 27/06/2024.

² Derivada da tese titulada "A Demonstração de Teoremas sobre a Circunferência, usando Geogebra: Um estudo sob o modelo de Van Hiele" para obter o grau de Mestrado no programa "Mestrado em Matemática Educativa". Sustentada: 27/06/2024.

Resumo

No presente estudo, buscou-se analisar de que maneira os estudantes do curso de Geometria II da Universidade Pedagógica Nacional Francisco Morazán (CURSPS) progrediam na demonstração de teoremas de circunferência através do modelo de Van Hiele e apoiados pelo software dinâmico Geogebra. Com a finalidade de alcançar o propósito, realizou-se a construção de uma proposta didática fundamentada nas contribuições sobre o aprendizado da demonstração mediante explorações com software de geometria dinâmica de Gutiérrez (2005). Nesse sentido, propôs-se um estudo qualitativo, que apresenta uma alternativa para o aprendizado da demonstração sobre os quadriláteros inscritos (cíclicos) e circunscritos. Como resultado deste trabalho de pesquisa, constatou-se que os estudantes submetidos ao processo alcançaram pelo menos o primeiro dos níveis de Van Hiele, demonstrando assim que o uso reflexivo do software Geogebra potencializa o reconhecimento y Visualização (Nível 0 de Van Hiele) na aprendizagem da demonstração sobre quadriláteros inscritos e circunscritos. Enquanto um dos pesquisados conseguiu uma média de superação de 2 níveis, próximo de alcançar o nível 3, isso se refere à capacidade de construir uma Dedução Formal.

Palavras-chave: demonstração; circunferência; geogebra; Van Hiele; teorema.

Introducción

Por todos es sabido la importancia e interés que la humanidad ha dedicado a una de las ciencias más precisas y rigurosas en la historia, las Matemáticas; esto no solamente por su grado de abstracción y complejidad, sino también por la aplicación impacto que ella tiene en el desarrollo de las distintas áreas del conocimiento. En particular, la geometría, como una de las ramas de la matemática, ha tenido de forma muy interesante su desarrollo a través de la evolución de la humanidad.

La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán como institución que rectora la educación en Honduras, ha trazado como una de sus líneas de investigación la calidad y equidad de la educación. Una de las áreas temáticas que se describe en esta línea de trabajo es la Innovación Educativa, como un espacio de reflexión acerca de las prácticas educativas innovadoras en el sistema educativo nacional, es en ella en donde se enmarca el presente estudio. En el mismo, se buscó indagar cómo los estudiantes del espacio formativo de Geometría II de la carrera de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán SPS progresan en el aprendizaje de la demostración de teoremas geométricos sobre la circunferencia a través del modelo Van Hiele y con ayuda del software matemático Geogebra.

El fundamento teórico bajo el cual se construyó esta idea de investigación fue el modelo Van Hiele (1954), una propuesta que argumenta el aprendizaje de la geometría a través de cinco niveles; además, la misma se argumenta con el aporte de Gutiérrez (2005) sobre el uso del software dinámico Geogebra para el desarrollo y logro de dichos niveles de aprendizaje.

El estudio se realizó desde un enfoque cualitativo, considerando que lo que se buscó fue construir una propuesta didáctica para el aprendizaje de la demostración de los cuadriláteros inscritos (cíclicos) y cuadriláteros circunscritos argumentada en los aportes a la teoría de Van Hiele por parte de Gutiérrez (2005). Además de describir el progreso de los estudiantes en el aprendizaje de la demostración. De esta forma se logró caracterizar el avance de cada uno de ellos a partir de los niveles de Van Hiele.

Finalmente, este artículo plantea las conclusiones que el presente aporta como producto de esta investigación.

1. Marco de Referencia

1.1. Aprendizaje de la matemática y la geometría

No cabe duda que hablar del proceso de enseñanza-aprendizaje requiere un especial interés, en particular cuando se trata de las matemáticas (una de las ciencias duras), sobre todo en la actualidad, cuando el mundo experimenta un ir y venir de tendencias en cuanto a la concepción sobre la forma en que deben desarrollarse estos procesos; en este sentido, al discutir sobre este tema hemos de ubicarnos dentro de una de estas tendencias con la finalidad de encaminar las acciones bajo una perspectiva coherente.

Dickinson citado por Pozo (2006) plantea que el aprendizaje consiste en la adquisición de información sobre la organización causal del entorno. Bajo esta definición del aprendizaje se entiende este como un proceso de aprovechamiento en el que el individuo motivado por los diferentes causales reestructura su medio.

Siguiendo con la idea anterior, Schunk (1997) plantea que las teorías cognoscitivas señalan la adquisición de conocimiento y estructuras mentales junto con el procesamiento de información, para lo cual se deben considerar inclusive las creencias en el individuo.

La geometría, como una de las más antiguas ramas de la matemática requiere de un interés particular. Tal como lo describe Corberan (1989) “ese producto refinado de la actividad inteligente de los hombres que aspira a ser la única representación posible de la realidad, ha ocupado el lugar de honor en el dominio de las Matemáticas y aun de las ciencias...” (p. 10).

Los esposos holandeses Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, a partir de sus investigaciones proponen un modelo que busca categorizar el razonamiento geométrico de los estudiantes a partir de 5 niveles de aprendizaje, Van Hiele (1957). Dicho modelo compara el aprendizaje con un proceso inductivo y propone cinco niveles de conocimiento en geometría, mismos que serán explicados en los siguientes apartados.

1.2. La Demostración de teoremas sobre la circunferencia.

¿Qué es la demostración en geometría? Fetisov (1980) dice: “una demostración es un sistema de razonamientos por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y de verdades antes demostradas”. (p 11.)

Godino y Recio (2001) Se refieren a la demostración como el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de su acción.

De Villers (2001) Argumenta que más que el parcial enfoque de la demostración como medio de verificación de una proposición o enunciado, la función, más fundamental es la explicación, misma que debe ser utilizada para presentar la demostración como una actividad significativa para los alumnos. Al mismo tiempo debe ponerse atención en la función de descubrimiento y a la comunicación, negociando con los alumnos criterios de evidencia aceptable.

1.3. Niveles del conocimiento geométrico en el modelo Van Hiele

En esta parte se pretende argumentar las bases teóricas que soportan el modelo para el aprendizaje de la geometría creado por los esposos holandeses Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, modelo que busca categorizar el razonamiento geométrico de los estudiantes a partir de 5 niveles de aprendizaje tal como se describe en el párrafo siguiente:

Corberán (1989) plantea que dicho modelo compara el aprendizaje con un proceso inductivo y propone cinco niveles de conocimiento en geometría que habitualmente se enumeran como: 0 o Visualización; 1 o Análisis; 2 o Deducción informal; 3 o Deducción formal; 4 o Rigor. A partir de esta concepción se entiende el desarrollo del aprendizaje del alumno a través de diferentes etapas de razonamiento caracterizadas cada una de ellas de forma específica con sus propios indicadores, que van desde nociones particulares con el fin de llegar a conclusiones generales.

A continuación se muestran algunos de los indicadores que se evidencia en cada una de las etapas:

Nivel 0 (Visualización)

- Utiliza cualidades, y no propiedades, en tareas de comparar, clasificar, caracterizar y clasificar formas geométricas.
- Caracterizar formas geométricas mediante prototipos visuales.

Nivel 1 (Análisis)

- Compara claramente las formas geométricas mediante las propiedades de sus componentes.
- Clasificar atendiendo a atributos simples, como la longitud de los lados, sin considerar otros ángulos, diagonales, simetría, etc, ...

- En tareas de comprobar la validez de una proposición, fiarse de una variedad de dibujos.

Nivel 2 (Deducción Informal)

- Hacer referencias explícitas a definiciones.
- Efectuar clasificaciones atendiendo a una variedad de atributos matemáticamente precisos.
- Capacidad de construir argumentos deductivos utilizando formas lógicas como si p implica q y q implica r , entonces p implica r o la ley del modus ponens.

Nivel 3 (Deducción Formal)

- Conjeturar frecuentemente e intentar, deductivamente, concluir demostraciones.
- Confiar en la demostración como autoridad final para decidir la veracidad de una proposición matemática.
- Comprensión de la utilidad en matemáticas de los axiomas, las definiciones, los teoremas y las demostraciones.

1.4. Características de los Niveles Van Hiele

El aprendizaje y enseñanza de la geometría a partir de los niveles Van Hiele debe suponer la transversalidad de una serie de características que viabilizan este proceso. Jaime y Gutiérrez (1990) explican tres características importantes del modelo:

1. **La jerarquización y secuencialidad de los niveles.** Esta característica del modelo alude que en cada uno de los cinco niveles posee sus propios rasgos en relación al razonamiento que los estudiantes realizan. Para lograr un nivel siguiente (N1) de razonamiento, es necesario haber alcanzado el nivel anterior. Es posible que en un nivel los estudiantes se familiaricen con algunas habilidades y las utilicen de forma inconsciente o implícitamente.

Tabla 6*Recursividad en los niveles Van Hiele*

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Nota: Tomado de Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele (p. 312), por Jaime y Gutiérrez, 1990, Sevilla: Alfar.

2. Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles. Es decir, a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico.

3. El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua. Se puede concluir que el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual.

Jaime (1993) en relación a la evaluación de los aprendizajes de los niveles de Van Hiele plantea que una forma efectiva de obtener información fue la entrevista y los test escritos de respuesta libre, esto después de haber antes intentado con respuestas de selección múltiple.

1.5. Aprendizaje de la demostración en el tema de cuadriláteros inscritos y circunscritos mediado por el software dinámico Geogebra.

Groman citado por Fiallos, Camargo y Gutiérrez (2013: p.194) es uno de los primeros enfocados en aspectos sociales del aprendizaje de la demostración, en donde se emplea como mediador la geometría dinámica. Grosman plantea que a partir de la exploración de figuras geométricas para producir conjeturas y preguntas de la forma “qué pasa si”, los estudiantes, futuros profesores, pueden construir por sí mismos significados matemáticos en un ambiente social de investigación. En este sentido, según lo expresan Fiallos, Camargo y Gutiérrez (2013: p.195) en el uso de las funciones de programas dinámicos se debe permitir centrar la atención en los procedimientos de construcción y en su validez, más que en el resultado de los mismos.

En correspondencia con lo anterior, se torna necesario establecer la diferencia entre dos conceptos utilizados frecuentemente en geometría en la construcción de teoremas, figura y dibujo. Gutiérrez (2005) define ambos conceptos de la siguiente manera: Una figura es un objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades matemáticas derivadas de los elementos y las herramientas usadas para su creación, mientras que un dibujo es

una representación particular en la pantalla de una figura. De allí, que una figura puede ser representada en un conjunto de dibujos que adecuadamente seleccionados son capaces de mostrar las propiedades matemáticas de la figura.

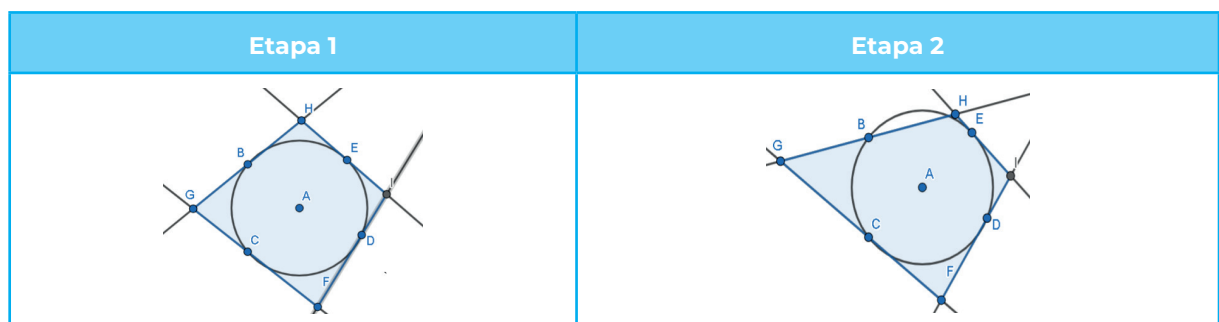
Una de las razones principales que nos motiva hacia el uso de software de geometría dinámica (en este caso Geogebra) para soportar los procesos de aprendizaje de la demostración en geometría es la posibilidad de crear y modificar in situ las construcciones geométricas sin la necesidad de mayores recursos, lo cual permite la creación de simulaciones que aproximan al estudiante al fenómeno real que se desea demostrar. En relación a esto, la herramienta arrastre que posee el software dinámico Geogebra nos facilita tales observaciones.

Gutiérrez (2005) dice: “El arrastre de objetos en la pantalla del ordenador es la característica más peculiar del software de geometría dinámica. Esta acción permite modificar en tiempo real el dibujo de la pantalla para convertirlo en otro dibujo asociado a la misma figura” (p.39). Otra función importante en relación al arrastre, aparte de poder modificar los dibujos asociados a una figura mencionada por Gutiérrez es confirmar que la construcción realizada es correcta, esto supone que la figura desarrollada como objeto de estudio referente al fenómeno analizado no pierde sus características esenciales a pesar de ser manipulado y modificado. Gutiérrez (2005) menciona 4 tipos de arrastre:

Arrastre de test: Este arrastre tiene como objetivo verificar que la construcción realizada es correcta. Ejemplo: Pedimos a los estudiantes que construyan un cuadrilátero circuncrito; ellos realizan primero una circunferencia, luego ubican cuatro puntos en la circunferencia y después construyen los cuatro lados del cuadrilátero pasando por los puntos de la circunferencia. Sin embargo, cuando manipulan el cuadrilátero se dan cuenta que pierde algunas de sus condiciones al observar que alguno de sus lados no es tangente a la circunferencia y por lo tanto no es un cuadrilátero circuncrito.

Figura 15

Ilustración del arrastre de test



Nota: En la etapa 1 de la figura se muestra que el cuadrilátero GHIF es circuncrito, sin embargo, en la etapa 2, al realizar el arrastre del punto G a través de la recta GF se evidencia una mala construcción, ya que los lados del mismo fueron trazados sin utilizar la herramienta recta tangente.

Arrastre errático: Este tipo de arrastre tiene lugar después de haber verificado que la figura es correcta, es decir, obedece al enunciado o problema. El estudiante realiza el arrastre de forma aleatoria buscando invariantes. Ejemplo: Después de haber verificado que la figura del cuadrilátero circunscrito construido es correcta ahora realiza diferentes arrastres buscando encontrar algunas relaciones matemáticas bien sea entre sus ángulos, sus lados, etc.

Arrastre guiado: Este arrastre se realiza con el propósito de obtener un caso particular de la figura.

Arrastre sobre un lugar geométrico oculto: Con este tipo de arrastre se busca que los dibujos creados a partir de la figura inicial conserven alguna propiedad matemática, casi siempre hay un punto de la figura cuyo arrastre coincide con el lugar geométrico oculto. Normalmente la identificación y caracterización de este lugar geométrico puede llevar a la solución del problema.

Además, Gutiérrez (2005) establece una relación entre los 4 tipos de arrastre y las etapas de resolución de un problema de conjetura y demostración, tal como se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 7

Tipos de arrastre y etapas de resolución de un problema o conjetura y demostración

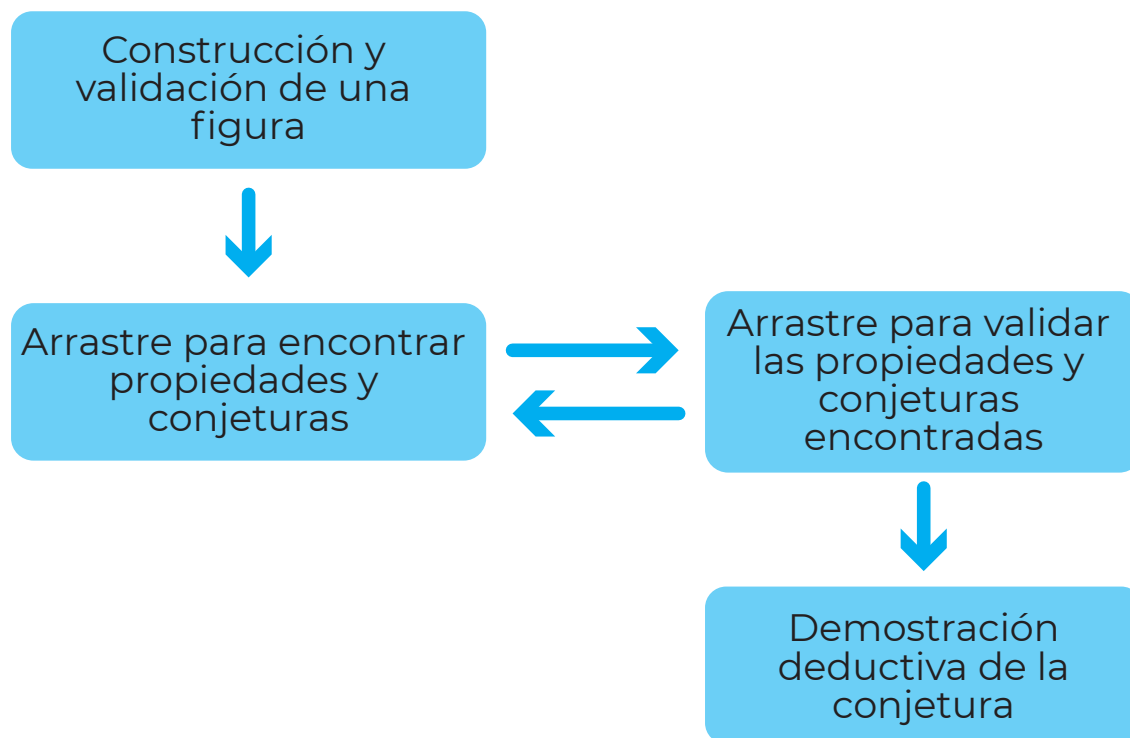
Etapas de resolución de un problema de conjetura y demostración	Tipos de arrastre
Construcción inicial Descubrimiento de propiedades Elaboración de un conjetura Verificación de la conjetura Demostración de la conjetura	Test Errático Errático Guiado Sobre un l. g. oculto Guiado Test Guiado ---

Nota: Tomado de Aspectos metodológicos de la investigación sobre el aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software en Geometría dinámica (p. 37), Gutiérrez A., 2005

La tabla 7 sugiere que los estudiantes normalmente realizan arrastres de test errático durante la construcción inicial de un enunciado o problema a resolver para luego realizar alumnos descubrimientos de propiedades mediante el test guiado, esto puede conllevar a la elaboración de una conjetura a través del arrastre sobre un lugar oculto y finalmente a la verificación de dicha conjetura.

Figura 16

Momentos en la resolución de un problema, conjetura o demostración asistida con software dinámico



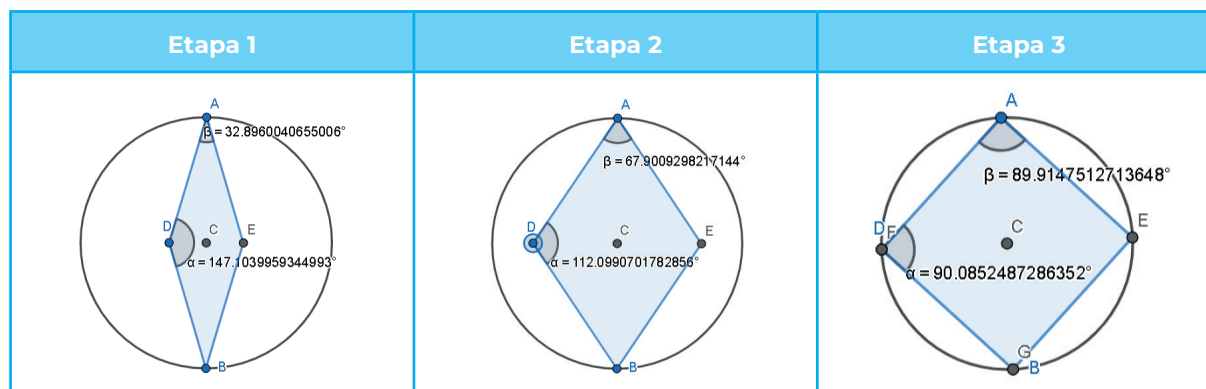
Nota: Tomado de Gutiérrez (2005)

No obstante, el autor señala que los estudiantes pueden seguir procesos diferentes a los aquí mencionados, esto debido a la poca experiencia por parte de los educandos o inclusive a la forma en que el docente dirige los procesos de aprendizaje.

Supongamos que deseamos investigar si un rombo puede ser un cuadrilátero cíclico. Una forma de proceder en este proceso desde un análisis visual (previo al análisis deductivo) podría ser que los estudiantes construyan un rombo, tracen una circunferencia a través de dos de sus vértices opuestos. Luego pedir que realicen un arrastre a través de uno de los vértices que están en el interior del círculo, hasta llevarlo a la circunferencia, observando finalmente que el cuadrilátero se convirtió en un cuadrado. De esta forma ellos pueden concluir fácilmente que el único rombo circunscritable es el cuadrado ¿A qué se debe este hecho? El único caso en que la suma de dos ángulos opuestos (de igual medida ya que es un rombo) es 180 grados se cumple cuando cada uno de ellos mide 90 grados (cuadrado).

Figura 17

Validación empírica de una conjetura



Nota: En la figura se utiliza un arrastre guiado del punto D, hasta formar un caso particular de cuadrilátero cíclico (cuadrado: el único rombo cíclico).

Además, Gutiérrez (2005: p.38) agrega que este proceso puede ser cíclico, es decir, en ocasiones el estudiante puede pasar de la fase ascendente de la búsqueda de una conjetura a la fase descendente para su argumentación, o regresar a la fase ascendente para buscar una nueva conjetura y validarla hasta finalmente lograr su argumentación y demostración deductiva.

Bell, citado por Fiallos, Camargo y Gutiérrez (2013: p.196) señala que solo hasta que los estudiantes son conscientes del estatus público del conocimiento y del valor de la verificación social, a través del trabajo cooperativo en clase, aprecian el uso de demostraciones formales.

2. Diseño metodológico

El presente estudio se planteó desde un enfoque cualitativo con la intencionalidad de investigar el fenómeno a través de las observaciones y descripciones. Además, todos los escenarios y personas fueron dignas de estudio; en este sentido, el estudio fue de tipo descriptivo ya que buscaba relatar y caracterizar la manera en que los estudiantes avanzan en los niveles Van Hiele.

En relación al diseño, el estudio se consideró de corte fenomenológico, con la pretensión de indagar a partir de las experiencias de cada uno de los estudiantes, cómo aprenden la demostración sobre cuadriláteros inscritos y circunscritos utilizando el software dinámico Geogebra.

Este proyecto de investigación fue desarrollado en las instalaciones de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Centro Regional San Pedro Sula. La población de este estudio la constituyen 5 estudiantes del curso de Geometría II, sección A del tercer periodo del año 2023 de la UPNFM-SPS. Se tomó una muestra de 5 estudiantes (toda la población), quienes voluntariamente accedieron a ser parte de este estudio.

En relación a la propuesta desarrollada se elaboraron cuatro hojas de trabajo, dos de ellas correspondientes al tema de cuadriláteros inscritos (PD-ACT1, PD-ACT2) y dos sobre el tema de cuadriláteros circunscritos (PD-ACT3, PD-ACT4), con cada una de ellas se pretende el progreso en el aprendizaje de los estudiantes a través de los niveles de Van Hiele. Posteriormente al finalizar la propuesta experimental se procedió a la aplicación de la prueba de salida cuya evaluación se hizo mediante la rúbrica previamente elaborada. El segundo instrumento pretendía el registro de los avances en la demostración de teoremas para el cual sirvieron de base los siete problemas de aplicación de la prueba de conocimiento test 1 (problema 1, 2, 3, 4) y test 2 (problema 5, 6, 7), Corresponden a siete problemas de demostración, para poder identificar el avance desarrollado por los estudiantes en los cuatro niveles Van Hiele (Nivel 0, nivel 1, nivel 2, nivel 3) en el tema de cuadrilátero inscritos y cuadriláteros circunscritos.

Técnicas para procesamiento y análisis de información

a. Etapa inicial

Previo a la ejecución de la propuesta didáctica se aplicó el diagnóstico al grupo, esto con el objetivo de garantizar el dominio básico de los conocimientos necesarios para el desarrollo de los contenidos planteados en la misma.

b. Desarrollo de la etapa de intervención a través de una propuesta didáctica.

Esta etapa se inició a través de la aplicación de un pre-test1 que buscaba detectar el nivel de Van Hiele en el cual se encontraban los estudiantes, luego el grupo recibió tratamiento experimental a través del desarrollo de las hojas de trabajo PD-ACT1, PD-ACT2 y problemas de ejercitación (Cuadriláteros inscritos), posterior a ello fue aplicado el Test 1. Después de ellos se procedió a la aplicación del pre-test2, para luego desarrollar las hojas de trabajo PD-ACT3, PD-ACT4 y problemas de ejercitación sobre el tema de cuadriláteros circunscritos. Finalmente se aplicó el pos-test 2.

c. Finalización de la intervención

La prueba de conocimiento (Test 1) fue aplicada después de la primera intervención y aplicación de las hojas de trabajo (PD-ACT1 y PD-ACT2). Luego de aplicada la segunda intervención por medio de las hojas de trabajo (PD-ACT3 y PD-ACT4) fue aplicada la segunda prueba de conocimiento (Test 2), para luego proceder a la revisión de dichas pruebas (Test 1 y Test 2) para organizar, clasificar, resumir y analizar adecuadamente la información.

Para el análisis de los resultados se diseñó una lista de cotejo para cada uno de los problemas contenidos en los test 1 y 2. Mismas que fueron validadas a juicio de expertos. Las listas de cotejo aplicadas para el análisis de los pre-test y pos-test significaron un buen instrumento para detectar el Nivel de Van Hiele en que se encontraron los estudiantes y además, permitió valorar el avance logrado en cada uno de los problemas planteados.

3. Interpretación de los resultados

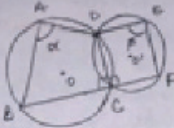
En este apartado se presenta un análisis de los resultados obtenidos a partir de los datos recolectados en los TEST 1 y TEST 2, aplicados antes de la propuesta didáctica desarrollada y posterior a ella; además, se analiza el desarrollo de cada uno de los problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 contenidos en los test, en el orden correspondiente.

3.1. Análisis pre-test1 y pos-test1

Posterior a la aplicación del diagnóstico se realizó el test 1 (PRE-TEST1 y POS-TEST1) antes y después del desarrollo de las hojas de trabajo PD-ACT1 y PD-ACT2; el primero con el objetivo de detectar el nivel de Van Hiele en el cual se encontraban los estudiantes al inicio del proceso y el segundo, con la intención de describir el nivel de avance logrado por los estudiantes en el aprendizaje de los cuadriláteros cíclicos después de haberse sometido a la propuesta didáctica.

Tabla 8

Análisis del problema #1 y categorización de los niveles de Van Hiele en que se encontraron los estudiantes al inicio de la investigación (PRE-TEST1)

Problema	Evidencia					
problema 1 Estudiante: E3	Problema 1  $m\angle BCF = 90$ $\rightarrow \widehat{DEF} = 2(90) = 180^\circ$ $m\angle DCB = 90$ $\rightarrow \widehat{DAB} = 2(90) = 180$ Luego $\alpha = \frac{180}{2} = 90^\circ$ $\beta = \frac{180}{2} = 90^\circ$ $\alpha = \beta$ ✓ se construye el segmento $\widehat{DC}$ ✓ Luego sea $\square ABCD$ un cuadrado inscrito a la circunferencia d 1) $\alpha = \frac{\widehat{DCB}}{2}$ ----- por teorema insc 2) $\beta = \frac{\widehat{DCF}}{2}$ ----- por teorema insc 3) $\widehat{DCB} = \widehat{DC} + \widehat{CB}$ ----- por suma 4) $\widehat{DCF} = \widehat{DC} + \widehat{CF}$ ----- 5) $2\alpha = \widehat{DC} + \widehat{CB}$ ----- multiplicando en 2 $2\beta = \widehat{DC} + \widehat{CF}$ $\widehat{DC} = \widehat{DC}$ $2\alpha - \widehat{CB} = 2\beta - \widehat{CF}$ $2\alpha - 2\beta = \widehat{CB} - \widehat{CF}$					
Nivel (Van Hiele)						
No.	Ítem	0	1	2	3	V
1	Identifica los cadrantes cíclicos ADCD y EFCD.	X				
2	Identifica los octo ángulos inscritos.	X				
3	traza el segmento CD y reconoce los ángulos. inscritos BCD y FCD como suplementarios.		X			
4	Establece relaciones entre los ángulos interiores de los cua- driláteros ABCD y EFCD.		X			

Nivel (Van Hiele)						
5	Prueba que la relación $\alpha + \beta = 180^\circ$ es invariable siempre que B,C y D sean colineales.			X		
6	Descubre que el hecho que B, C y D sean colineales es una condición necesaria.			X		
7	Verifica numéricamente que α y β son suplementarios.				X	
8	Demuestra formalmente que $\alpha + \beta = 180^\circ$				X	

Tabla 9

Nivel de Van Hiele detectado en los estudiantes en los problemas #1, #2, #3 y #4 (PRE-TEST1)

Estudiante	PRE-TEST 1			
	PROB. #1	PROB. #2	PROB. #3	PROB. #4
E1	RNO	RNO	NNA	NNA
E2	NO, (RN1)	RNO	NNA	NNA
E3	N1	NO	RNO	NO, (RN1)
E4	RNO	NNA	NNA	NNA
E5	NNA	NNA	NNA	NNA

NO = Nivel 0
N1 = Nivel 1

N3 = Nivel 3
N4 = Nivel 4

RNX = Rasgos del nivel X alcanzado
NNA = Ningún nivel alcanzado

La tabla 9 nos muestra que el estudiante E3, quien evidenció el mejor rendimiento de los investigados, logró reconocer cuadriláteros cíclicos y sus ángulos inscritos, no obstante carece de la habilidad para establecer una relación matemática entre estos ángulos y los demás conceptos matemáticos implicados en cada uno de los problemas. El resto de estudiantes mostraron dificultades en el reconocimiento de cuadriláteros cíclicos y sus ángulos inscritos, por ende en el razonamiento esperado.

Es evidente el hecho de que en una cantidad considerable de ocasiones (problemas resueltos) los estudiantes no llegaron siquiera al nivel 1 de Van Hiele, esto sugiere debilidad para reconocer y examinar los cuadriláteros cíclicos en una circunferencia, lo cual es considerado el argumento principal para el razonamiento matemático conducente hacia una demostración formal.

En conclusión, en lo referente al pretest 1 se pudo encontrar que en ninguno de los problemas los estudiantes fueron capaces de alcanzar los niveles dos y tres de razonamiento geométrico de Van Hiele; es decir, en los problemas resueltos los estudiantes se encontraron en el nivel de Visualización o Reconocimiento (Nivel 0) o en una fase inicial del nivel de Análisis (Nivel 1), según Van Hiele (1954).

3.2. Análisis sobre el progreso de los estudiantes (contraste pre-test y postest)

En esta etapa de los resultados se analizó una comparación de los hallazgos en los pretest1 y postest1, así como pretest2 y postest2; realizando un contraste entre ellos, mismo que permitió establecer las diferencias en el aprendizaje de la demostración antes y después de la aplicación la propuesta didáctica.

Entre los hallazgos encontrados en el análisis de los tests fue que los estudiantes E1, E2, E3, y E4 lograron reconocer cuadriláteros cíclicos en los problemas #1, #2, #3 y #4 del pretest1, sin mostrar habilidad para establecer una relación matemática entre estos ángulos y los demás conceptos matemáticos implicados en cada uno de los problemas. En contraste con ello, en el postest1 estos mismos estudiantes evidenciaron haber desarrollado otras habilidades de razonamiento matemático que a continuación se enumeran: 1) Construir una figura sobre cuadriláteros inscritos de acuerdo con el problema planteado; 2) Realizar los arrastres correspondientes para encontrar y validar propiedades y conjeturas sobre el tema de cuadriláteros cíclicos. El estudiante E3 además logra completar la demostración deductiva para cada uno de los problemas, exceptuando el #2 (problema menos comprendido por los estudiantes). El estudiante E6 no evidenció poseer el logro de la habilidad en la construcción de una figura conducente a la resolución del problema después de la aplicación del postest1.

En relación al tema de cuadriláteros circunscritos, se encontró en la propuesta de intervención que al inicio (problemas #5, #6 y #7 del pretest2) los estudiantes únicamente evidenciaron la habilidad matemática 1) Dibujan cuadriláteros circunscritos; sin embargo, en contraste a este hecho se debe apuntar que entre algunas de las habilidades de razonamiento que los estudiantes desarrollaron después de haberse sometido a la intervención y la aplicación del postest2 fueron: 1) La elaboración de cuadriláteros circunscritos, 2) Identificación de los lados tangentes a la circunferencia inscrita en los cuadriláteros. Los investigados E3 y E5 además lograron habilidades como: 3) Identifican que los radios son perpendiculares a los lados de los cuadriláteros en sus puntos de tangencia, 4) Identifican que los pares de tangentes trazados desde un punto exterior a la circunferencia son congruentes. E4 logra habilidades como: 5) realizar una demostración empírica (Gutiérrez, 2005) en al menos uno de los problemas, es decir, no presenta mayores argumentos que conduzcan a una deducción formal. Finalmente, E5 fue capaz de mostrar habilidades argumentativas: 6) Aplica las diferentes propiedades sobre cuadriláteros circunscritos y argumenta su uso y aplicación en los procesos de resolución de los problemas planteados, 7) Construye una demostración formal acerca de cuadriláteros circunscritos.

En síntesis, se pudo notar que uno de los investigados (E3) logró un promedio de superación de 2 niveles y en fase de alcanzar el nivel 3, dos de ellos, (E1 y E4) avanzaron en promedio 1 nivel, mientras que el resto (E2, E5 y E6) mostró un leve avance, en menos de un nivel de Van Hiele en promedio.

Por otro lado, considerando que uno de los objetivos de esta investigación fue detectar el nivel de progreso de los estudiantes en el aprendizaje de la demostración en geometría según el modelo Van Hiele, los datos evidenciaron que dichos estudiantes en promedio lograron un avance de 1 nivel durante el proceso.

Conclusiones

Según los resultados obtenidos en los pretest (Tabla 8 y tabla 9) los estudiantes se encontraron en el nivel de Visualización o Reconocimiento (Nivel 0) o en una fase inicial del nivel de Análisis (Nivel 1), según Van Hiele (1954), no obstante, se pudo constatar algunos casos aislados en los cuales los investigados mostraron ciertos rasgos no determinantes de alguno de los niveles 1, 2 o 3 de Van Hiele, lo cual no garantiza el logro completo del nivel indicado.

Uno de los objetivos de esta investigación fue describir el progreso de los estudiantes en el aprendizaje de la demostración en geometría según el modelo Van Hiele, respecto a ello, luego de haberse sometido a la propuesta didáctica sobre el aprendizaje de los cuadriláteros cíclicos y circunscritos se encontró que dichos estudiantes en promedio lograron un avance de 1 nivel durante el proceso. Es claro que este avance podría parecer algo poco significativo, sin embargo, cuando se trata del aprendizaje de la demostración, la argumentación y la deducción formal es sabido que no es tarea fácil.

Referencias

- Corberan, R. (1989). *Didáctica de la Geometría: Modelo Van Hiele*. Universidad de Valencia. España.
- De Villers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Revista Épsilon* No. 26.
- Fetisov, A. (1980). *Acerca de la demostración en Geometría*. (Traducción del ruso por Antonio Molina García). Editorial MIR. Moscú.
- Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración: Implicaciones para la educación Matemática. Recuperado el 16 de Enero del 2019. Disponible en: <http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php>? ISSN: 005200230323
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. Córdoba. España.
- Gutiérrez, A.; Camargo, L. y Fiallos, J. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración, Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander* Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 181–205.
- Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. *La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral)*. Universidad de Valencia, España.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo. Los giros. *Revista Educación Matemática*. Vol. 3 – No. 2.
- Pozo J. I. (2006). *Teorías Cognitivas del aprendizaje*. Novena Edición. Ediciones Morata. Madrid.
- Sánchez, R. (2012). Conductismo vs. Constructivismo: Sus principales aportes en la pedagogía, Diseño Curricular e Instruccional en el Área de las Ciencias Naturales. *Revista Ensayos Pedagógicos* Vol. VII, N° 2, 67-83, ISSN 1659-0104, julio-diciembre.
- Schunk, D. (1997). *Teorías del aprendizaje*. Segunda Edición. México. (Traducción de José Francisco Dávila Martínez).
- Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría [Tesis Doctoral. Países Bajos]