Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

Tesis de Maestría

"Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo"

Tesista

José Antonio Elvir Ramírez

Asesor de Tesis

Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C., agosto, 2020

“Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo”

Universidad Pedagógica Nacional

Francisco Morazán

Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Dirección de Postgrado

Maestría en Matemática Educativa

“Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo”

Tesis para obtener el título de Máster en Matemática Educativa

Tesista

José Antonio Elvir Ramírez

Asesor de Tesis

Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia

Tegucigalpa, M.D.C., agosto, 2020

AUTORIDADES

Dr. HERMES ALDUVÍN DÍAZ LUNA
Rector

M.Sc. BARTOLOMÉ CHINCHILLA CHINCHILLA
Vicerrector Académico

M.Sc. JOSÉ DARÍO CRUZ ZELAYA
Vicerrector Administrativo

Dr. JOSÉ HERNÁN MONTÚFAR CHINCHILLA
Vicerrector de Investigación y Postgrado

Dra. JENNY MARGOTH ZELAYA MATAMOROS
Vicerrectora del CUED

M.Sc. JOSÉ WILMER GODOY ZEPEDA
Secretario General

Dr. ROGERS DANIEL SOLENO
Director de Postgrado

Tegucigalpa, M.D.C., agosto, 2020

Terna Examinadora

Esta tesis fue aceptada y aprobada por la terna examinadora nombrada por la Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, como requisito para optar al grado académico de máster en Matemática Educativa.

Tegucigalpa M.D.C., agosto, 2020

Grado académico, nombres y apellidos completos
Presidente(a) Examinador(a)/Tribunal

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Examinador(a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

Grado académico, nombres y apellidos completos
Tribunal (a)

José Antonio Elvir Ramírez
Tesista

Dedicatoria

El presente trabajo de investigación es dedicado especialmente a la memoria de mi padre José Elvir.

A mis hijos David y José.

A todos los amigos, compañeros y profesores que me han motivado a seguir adelante.

Agradecimiento

Un gran agradecimiento a Dios por haberme dado la oportunidad de realizar esta investigación.

A mi familia por el apoyo y comprensión que me han dado para poder culminar mis estudios de maestría de manera exitosa.

Gracias a la Escuela Happy Summer School por abrirme las puertas de su institución y permitirme realizar mi investigación dentro de su campus.

Gracias a los compañeros y catedráticos de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán por el apoyo académico que me han dado todo este tiempo.

Finalmente, quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al Ph.D. Marvin Roberto Mendoza, principal colaborador durante todo este proceso, quien con su dirección, conocimiento y enseñanza permitió el desarrollo de este trabajo investigativo.

Índice General

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

Hoy en día las matemáticas juegan un papel muy importante en el desarrollo de las sociedades y aún más, en esta era digital, en donde la tecnología cuyo desarrollo ha sido gracias a los avances de la ciencia y las aplicaciones de las matemáticas en muchos temas, que ha permitido que este desarrollo sea apreciado por muchas sociedades a nivel mundial. Además, las matemáticas permiten el desarrollo intelectual de las personas; proporcionándoles habilidades como razonar y criticar de manera más lógica sobre diferentes tópicos, no solo de los objetos matemáticos, sino que también en diferentes situaciones de la vida misma. En este sentido, la Matemática Educativa desde los comienzos se ha ocupado de estudiar los problemas que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y así brindar alternativas de mejora para la comunidad educativa.

Honduras siendo un país en vías de desarrollo presenta en gran medida debilidades en el área de las matemáticas, según los informes presentados por la Secretaría de Educación. De esta manera la población hondureña no está exenta, de los problemas de rendimiento en el área de la aritmética, sobre todo en las fracciones cuya problemática es reflejada a nivel internacional según los datos estadísticos reflejados por el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) el cual es desarrollado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, 2012:32) en el cual, Honduras participó en el año 2011 y mostró un bajo rendimiento en matemáticas.

Es por ello, que el presente trabajo de investigación abordó el análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales. Dicha temática fue desarrollada en estudiantes de séptimo grado del Tercer Ciclo pertenecientes a la escuela privada bilingüe Happy Summer School ubicada en Tegucigalpa, M.D.C., Honduras, donde se pudo apreciar la necesidad y relevancia de estudiar dicho concepto implementando la visualización como método didáctico de enseñanza aprendizaje. El estudio está bajo el paradigma cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo.

La investigación se orientó al diseño e interpretación de los modelos visuales, que según Kajender y Roland (2014:8) “un modelo visual puede ser un diagrama, un bosquejo, un gráfico, una imagen mental o cualquier otra ayuda visual que contribuya al desarrollo de la comprensión conceptual”. En este sentido, se emplearon los modelos visuales de área, longitud y conjunto a través del diseño de sesiones de trabajo para la comprensión del concepto de la fracción.

Los resultados muestran que los modelos visuales fomentaron la visualización de las fracciones en los estudiantes, ya que se evidenció una mejoría con respecto a los conocimientos previos que los estudiantes tenían con relación a la etapa diagnóstica. Es importante mencionar, que los estudiantes evidenciaron un mayor desempeño en el modelo de conjunto que en el modelo de área y longitud.

Cabe señalar que la investigación está en concordancia con la línea de investigación: “Estudios Disciplinares” de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM). (UPNFM, 2017)

Para tener un mejor panorama y comprensión del desarrollo del presente trabajo de investigación se ha hecho la siguiente estructuración:

En el primer capítulo se aborda el planteamiento del problema que menciona el objetivo, las preguntas de investigación vinculadas a los objetivos y la justificación.

En el segundo capítulo se presenta un panorama histórico de las fracciones, la comprensión de un concepto matemático, los registros de representación semiótica, las diferentes interpretaciones de las fracciones para su comprensión, el enfoque constructivista, la visualización matemática, la representación en matemáticas y los modelos visuales para la enseñanza de las fracciones.

En el tercer capítulo se expone la metodología de la investigación, el enfoque, tipo de investigación y diseño, las categorías de análisis, la población y muestra; la estrategia de recolección de datos, los instrumentos aplicados como ser la prueba diagnóstica, seis sesiones de trabajo y una prueba final con su respectiva validación por juicio de expertos.

En el cuarto capítulo se abordó el análisis de los datos de la prueba diagnóstica, las sesiones de trabajo y la prueba final; todo en ello en concordancia con los objetivos planteados en la investigación y la rúbrica de evaluación de cada uno de los instrumentos diseñados.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones obtenidas con base a los objetivos planteados en la investigación, las recomendaciones realizadas a Happy Summer School, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, entre otros.

Capítulo 1

Construcción del objeto de estudio

1.1 Planteamiento del problema

1.2 Formulación del problema de investigación

1.2.1 Objetivo general

1.2.2 Objetivos específicos

1.3 Preguntas de investigación

1.4 Justificación

Capítulo 1

Construcción del objeto de estudio

1.1 Planteamiento del problema

En esta sección se presenta el planteamiento del problema, el cual motivó a la realización de esta investigación, el objetivo general, los objetivos específicos y la justificación del tema de estudio.

En el Diseño Curricular para la Educación Básica (DCNB) elaborado por la Secretaría de Educación de Honduras (SE), se plantea en el bloque 1 de **números y operaciones**, el tema de fracciones en séptimo grado, cuyo tópico matemático es estudiado desde el cuarto grado, II Ciclo del sistema educativo hondureño, pero los estudiantes tanto en la estadística internacional como nacional han presentado un bajo rendimiento en esta área de la **aritmética**, que incluye las fracciones y sus operaciones elementales. Con respecto a la estadística internacional, IEA (2012:36, 39, 41) menciona que las pruebas TIMSS, las cuales son aplicadas a estudiantes del último año de 4° y 8° grado; en las cuales Honduras participó en el año 2011 y se le sugirió que los estudiantes sometidos a dicha evaluación fuesen de 6° y 9° grado. Los puntajes alcanzados fueron 432 y 369, respectivamente. Esta puntuación según la escala de evaluación de TIMSS está por debajo del promedio que es de 500 puntos.

En las pruebas del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) realizadas por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), en el año 2015, muestra que existe un bajo rendimiento en matemáticas en los países participantes de América Latina (OECD, 2016:44).

En ese mismo sentido, Neagoy (2016) expone que existen dificultades en el concepto de fracción y se obtienen puntajes entre 30% y 50% de aprovechamiento en este objeto matemático en las pruebas internacionales tanto en PISA como en TIMSS. Los resultados de la evaluación PISA y TIMSS demuestran que las fracciones juegan un rol muy importante en la vida de los estudiantes y las consecuencias de no comprender las operaciones con ellas en los salones de clases repercuten en la actitud que los niños tienen hacia las matemáticas.

En relación con lo anterior, el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) que se encarga de realizar pruebas comparativas entre los estudiantes de los diferentes países de América Latina, muestra que existe un bajo nivel en el **campo numérico** en toda la región y, Honduras se sitúa en uno de los puestos más bajos de la evaluación realizada en los cursos del tercer y sexto grado en el área de matemáticas, estos grados los básicos (Primer y Segundo Ciclo) son la piedra angular para el buen desempeño de los estudiantes en séptimo grado (Flotts, Manzi, Barrios y Mejías, 2016).

Cabe agregar que una de las dificultades para comprender el concepto de fracción, radica en la rapidez que el docente introduce el algoritmo antes de la comprensión de este. En este sentido, Aksu (1997:375) afirma que uno de los errores comunes en la enseñanza de las fracciones se debe a que el estudiante empieza muy temprano con los algoritmos antes de tener una formación adecuada. Una razón por la cual las fracciones causan tanta dificultad en la escuela primaria es debido al enfoque. Los estudiantes deben comprender el concepto de fracción antes de realizar las operaciones.

Por su parte Freudenthal (1983:144) expone:

> Los estudiantes con habilidades para digerir algoritmos aprenden a operar las fracciones de todos modos, los estudiantes que tienen menos o no tienen ningún talento de esta manera específica lo aprenden por ensayo y error o no lo hacen en absoluto. Después de uno o dos años de fracciones, algunos alumnos dominan los algoritmos, aunque no tienen idea de qué

significan las fracciones y qué se puede hacer con ellos; otros ni siquiera saben los nombres de las fracciones particulares.

Por otra parte, en el Informe Nacional de Rendimiento Académico publicado por la Secretaría de Educación en los años 2010 al 2016 expone un bajo rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes de séptimo grado y se observa un bajo desempeño en los temas relacionados con las fracciones que pertenecen al bloque de **números y operaciones** (S.E., 2010, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016). Se evidencia un rendimiento porcentual promedio en los siguientes componentes sobre las fracciones:

Tabla 1.1
Rendimiento Promedio Porcentual, Matemáticas 7°

Bloque	***Componentes***	**Año**	**Promedio porcentual**
Números y Operaciones	Numeración, adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones	2010	38%
		2012	43%
		2013	52%
		2014	44%
		2015	50%
		2016	53%

Fuente: Elaboración propia a partir de S.E. (2010-2016) Informes de rendimiento académico

En este mismo sentido, es importante mencionar que las fracciones son un tema fundamental para tener éxito en álgebra y otros temas. La falta de **comprensión del concepto de fracción** se traduce en dificultades con las **operaciones elementales con fracciones**, decimales, porcentajes y en otras áreas que requieren el uso de las fracciones, particularmente en álgebra (Van de Walle, Karp & Williams, 2010). Por su parte, Fazio y Siegler (2011:7) afirman que “las dificultades de los estudiantes con fracciones usualmente se derivan de una falta de **comprensión conceptual**. Muchos estudiantes ven las fracciones como símbolos sin sentido”.

En lo que se refiere a toda la problemática mencionada, en la escuela privada bilingüe Happy Summer School, los estudiantes y maestros no están eximidos de las dificultades que se tienen con este objeto matemático y se han observado problemas de rendimiento en los exámenes de admisión y en las evaluaciones parciales en séptimo grado en esta área tan importante de la matemática. Se evidenciaron dificultades al resolver algunos ítems de las evaluaciones del año 2018, donde se les presentan ejercicios como: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ cuya respuesta proporcionada por los estudiantes es $\frac{2}{6}$ y otros respondieron que la respuesta es $\frac{3}{5}$. En este mismo sentido, los estudiantes presentan un bajo rendimiento sobre todo en el concepto de fracción y este se potencializa cuando las fracciones están presentes en otros tópicos.

Las dificultades están presentes en el Tercer Ciclo como también en el Nivel Medio. Como docente de la escuela siento la necesidad de contribuir al aprendizaje y comprensión de este tema que tiene bajos índices de puntuación en lo internacional, nacional e institucional.

En séptimo grado es cuando los estudiantes presentan más dificultades en el área de matemáticas debido al proceso de transición de sexto a séptimo grado. Las fracciones son un tema que limita el aprendizaje de los estudiantes y es uno de los obstáculos que el estudiante encuentra en los cursos de matemáticas. Según el DCNB (2000) del Tercer Ciclo se deben estudiar los números racionales y sus operaciones elementales en este curso, y es aquí donde incrementan las debilidades que los estudiantes tienen desde los niveles anteriores que son reflejados en el informe nacional de desempeño y que implican problemas posteriores en los futuros cursos de los estudiantes.

En relación con los párrafos anteriores, Según Lamon & Lawson (como se citó en Ervin, 2017:278) en las investigaciones sostienen que los estudiantes tienen problemas con la comprensión de las fracciones y se muestra que no tienen clara la idea del concepto de fracción, ya que al realizar las operaciones elementales con fracciones como ser la multiplicación y la división, por ejemplo, los estudiantes tienen el hábito de aplicar en la multiplicación y la división el mismo algoritmo y de hacer de la primera algo grande y de lo segundo algo pequeño . También hay estudios que muestran y concluyen que los maestros tienen muchas dificultades al comprender dicho concepto, lo cual dificultaba la correcta enseñanza de las operaciones elementales con fracciones en los salones de clase.

En este sentido, González y Eudave (2018:109) resaltan que “las fracciones y los decimales son temas en que los docentes y los estudiantes para profesores presentan dificultades, tanto en su comprensión como para la enseñanza”. Lo anterior refleja grandes repercusiones en los salones de clases. Por su parte Fandiño (2009) menciona que “alguien propuso hace algunos años no dar a los estudiantes explicaciones sobre $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, sino únicamente la regla para efectuarla; lo cual fue un fracaso en el aprendizaje del sentido que se le da a lo que se está haciendo”.

Basados en la experiencia empírica y en los resultados de estudios realizados con estudiantes de séptimo grado, los cuales consideran el tema de las fracciones como un tema difícil de comprender, así como para los maestros de enseñar (Matute, 2010:10). Se ha observado que este problema lo acarrean desde el **Segundo Ciclo** según los informes de desempeño académico presentados por Secretaría de Educación (S.E., 2017:71). Además, se ha observado empíricamente que los estudiantes se vuelven muy dependientes del uso de la calculadora para realizar las operaciones básicas con las fracciones. Todo lo anterior viene a dificultar el desempeño del estudiante en las operaciones elementales, por lo tanto, se necesita poner en funcionamiento métodos didácticos que faciliten y creen un sentido matemático más amplio y mejorar así la comprensión de este concepto.

1.2 Formulación del problema de investigación

Por toda la problemática expuesta anteriormente sobre la comprensión del concepto de fracción, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Comprenderán los estudiantes del Tercer Ciclo, el concepto de fracción mediante la interpretación de diferentes modelos visuales?

1.2.1 Objetivo general

El estudio pretende:

1. Analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes del Tercer Ciclo, mediante la interpretación de modelos visuales.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes del Tercer Ciclo vinculados al concepto de fracción.
2. Diseñar sesiones de trabajo que incluyan los modelos de área, longitud y conjunto relacionadas con el concepto de fracción.
3. Reconocer las dificultades presentadas en los estudiantes sobre la representación del concepto de fracción en los diferentes modelos.
4. Identificar qué modelo visual evidencian los estudiantes para la comprensión del concepto de fracción.
5. Analizar de qué manera la implementación de diversos modelos visuales coadyuva a la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes del Tercer Ciclo.

1.3 Preguntas de investigación

Vinculando a cada objetivo específico se formulan las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué conocimientos previos poseen los estudiantes del Tercer Ciclo vinculados al concepto de fracción?
2. ¿Qué sesión de trabajo fomenta la mejora de la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes?
3. ¿Qué dificultades presentan los estudiantes en la representación del concepto de fracción en los diferentes modelos?
4. ¿Qué modelo evidencian los estudiantes para la comprensión del concepto de fracción?
5. ¿De qué manera la implementación de diversos modelos visuales coadyuva a la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes del Tercer Ciclo?

1.4 Justificación

El estudio del concepto de fracción ha sido un tema de mucho interés para los investigadores en Matemática Educativa. Se puede observar que las fracciones son utilizadas en las actividades cotidianas de los estudiantes, en especial al referirse a la repartición de un objeto como un pastel, pizza o la fracción del volumen de un líquido. Hasta la fecha el tema de las fracciones ha sido uno de los más estudiados por diversos autores y en diversas áreas del conocimiento y esto se debe a que cada vez existen muchas dificultades en la comprensión de este objeto matemático (Zarzar, 2013:34, 35). Sobre este objeto matemático se pueden mencionar algunos estudios realizados por Matute (2010) y Pérez (2019) del Programa de Maestría de la UPNFM, donde se abarcan las concepciones de los estudiantes sobre las fracciones y los manipulativos para su enseñanza.

Es por ello, que para realizar la presente investigación se consideraron a los estudiantes de séptimo grado, ya que, en este curso del Tercer Ciclo, según los datos mostrados por la Secretaría de Educación (ver tabla 1.1), es donde se presentan dificultades en la comprensión del concepto de fracción, las operaciones y sus diferentes interpretaciones. El estudio abarca actividades que incluyan los diferentes modelos para visualizar el concepto de fracción, para lo cual se implementan los modelos de área, longitud y conjunto con el propósito de fortalecer el concepto mediante la visualización del objeto matemático.

Una vez revisado DCNB (2000) se puede apreciar la forma recomendada de la enseñanza de las fracciones y este propone, el uso del algoritmo tradicional y no sugiere alguna otra actividad innovadora para la enseñanza del concepto de fracción en séptimo grado. Por lo tanto, la investigación que se propone apunta a la implementación de modelos visuales para representar el concepto de fracciones y sus diferentes interpretaciones.

Esta consideración tiene base en los Estándares Estatales Comunes para Matemáticas (CCSSM), la cual es una iniciativa que detalla lo que los estudiantes de kínder al duodécimo grado en los Estados Unidos deben saber al final de cada grado escolar y hace énfasis en la enseñanza conceptual de las fracciones por medio de los modelos visuales desde el tercer grado y los incorpora en su Currículo Nacional desde hace algunos años (CCSSM, 2010).

Por lo que se refiere, al objeto matemático fracciones el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM 2000:215) manifiesta que:

> Los estudiantes 7° grado deben ser capaces de trabajar con fracciones, decimales y porcentajes. Los maestros pueden ayudar a los estudiantes a profundizar su comprensión en los números racionales presentando problemas que requieren un pensamiento flexible. Los estudiantes pueden desarrollar una comprensión profunda de números racionales a través de experiencias con una variedad de modelos.

Según los señalamientos del NCTM (2000:215) expuestos, la temática de las fracciones debe ser enseñada con la implementación de diversos modelos visuales. En ese sentido, los estudiantes deberían experimentar diferentes representaciones de las fracciones y no solo utilizar el algoritmo tradicional que se aprende en algunas instituciones educativas y en la mayoría de los libros de texto, incluyendo los que Happy Summer School utiliza.

Por otra parte, el NCTM recomienda que los niños desde edades tempranas hasta el duodécimo grado estén preparados para organizar, grabar y comunicar ideas matemáticas; seleccionar, aplicar y traducir representaciones, modelar y resolver problemas (NCTM, 2000). Las recomendaciones de esta entidad son muy útiles en el estudio del aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Los modelos son útiles únicamente si los estudiantes pueden hacer conexiones entre las ideas que realmente están siendo representados y las ideas que se pretendían representar (Zazkis & Liljedahl, 2004).

Lo anterior mencionado demuestra la importancia del estudio del concepto de fracción, implementando diferentes modelos visuales para su representación y comprensión de este objeto matemático.

En contraposición a lo anterior mencionado, se puede apreciar que en el libro de matemática de séptimo grado elaborado por miembros del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (PROMETAM FASE III) propuesto por la Secretaría de Educación, se puede observar que en la unidad 1 en la página 16 de la sección de números positivos y negativos tiene como objetivo definir el conjunto de los números racionales. Se presenta un ejemplo que va de conformidad con el objetivo de la sección que es; identificar a que conjunto pertenece un conjunto de números dados.

A continuación, se presenta el ejemplo 1.14 sugerido en el libro del maestro.

Ubique los siguientes números en el conjunto al cual pertenecen.

$$-5, 1.5, -0.6, -7, -13, -0.4, 6, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{5}, 2$$

Figura 1.1 Diversos conjuntos de los números
Fuente: Tomado de libro del maestro PROMETAM FASE III, séptimo grado

Solución:

Dado el diagrama vamos a ubicar los números al conjunto al cual pertenecen.

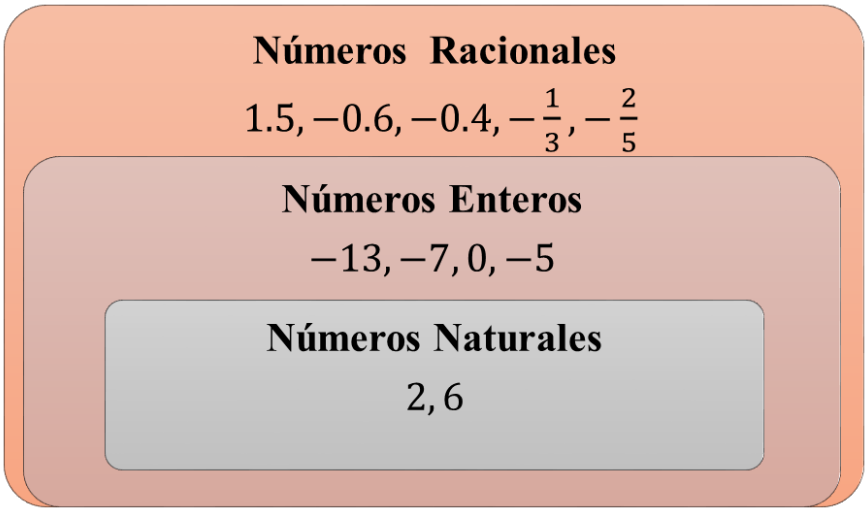


Figura 1.2 Respuesta sobre el conjunto dado
Fuente: Tomado de libro del maestro PROMETAM FASE III, séptimo grado

En la sección 6 de la página 17, se les proporciona algunos ejemplos a los estudiantes sobre la representación gráfica de un conjunto de números dado. Se presentan las siguientes actividades:

1. ¿Dónde se ubican los números negativos en la recta numérica?

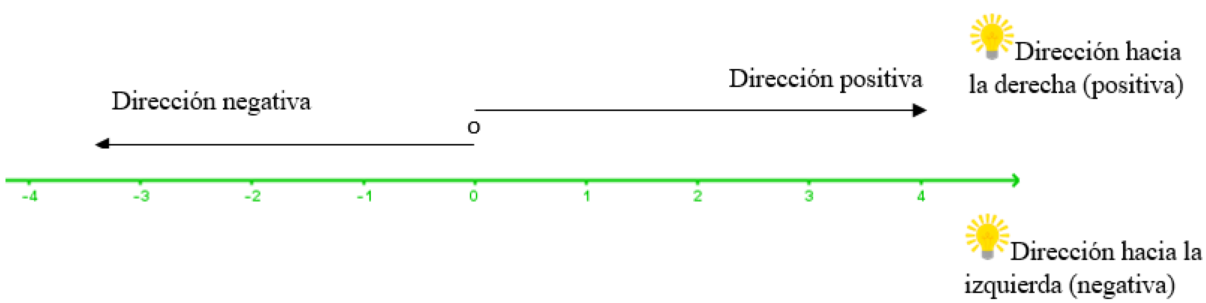


Figura 1.3 Representación de los números positivo y negativos en la recta numérica
Fuente: Tomado de libro del maestro PROMETAM FASE III, séptimo grado

2. Escriba los números que corresponden a las flechas.

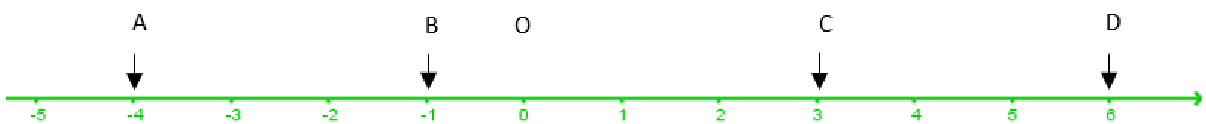


Figura 1. 4 Escribir los números que corresponden a las flechas
Fuente: Tomado de libro del maestro PROMETAM, séptimo grado

Respuesta: $\mathrm{A} = -4,\ \mathrm{B} = -1,\ \mathrm{C} = +3,\ \mathrm{D} = +6$

3. Representar en la recta numérica $A = +2,\ B = -4,\ C = -2.5,\ D = \frac{3}{2}$.

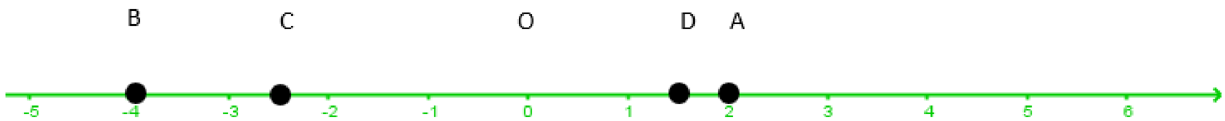


Figura 1.5 Conversión del lenguaje numérico al gráfico
Fuente: Tomado de libro del maestro PROMETAM, séptimo grado

Se puede evidenciar que el libro de texto de 7° grado se enfoca en la parte de la conversión del lenguaje numérico al gráfico y viceversa. No obstante, no se observa un enfoque profundo en el concepto de fracción, sino un enfoque general de diferentes conjuntos de números. Se observa que no existen actividades de representación en el modelo de área y conjunto. Además, no hay problemas que involucren los diferentes significados del concepto de fracción.

Cabe mencionar que los libros propuestos por la Secretaría de Educación llevan una secuencia de los contenidos relacionados con las fracciones que se empiezan a estudiar desde el cuarto grado.

A continuación, se presenta una revisión de los libros de matemáticas de cuarto, quinto y sexto grado propuestos por la Secretaría de Educación, PROMETAM.

- **Cuarto grado**

En este grado se tiene como expectativa de logro el desarrollo del concepto de fracción y reconocer el numerador y el denominador de una fracción. Se puede observar que el libro se enfoca en la representación de las fracciones empleando los modelos de longitud y área.

- **Quinto grado**

Con relación a este grado, se identifica la introducción al concepto de fracción propia, impropia, la relación de orden, las fracciones equivalentes, suma y resta de fracciones con igual denominador. En el libro se evidencia el empleo del modelo de área y longitud.

- **Sexto grado**

En este grado, se identifican conversiones entre fracciones y decimales; las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con diferentes denominadores. Se utilizan los modelos de área y longitud en algunos ejemplos.

Con relación a la revisión de los grados antes mencionados, se evidencia usan los mismos modelos de área y longitud. El modelo de conjunto aparece en cuarto grado, pero no hay un enfoque profundo de este modelo. Lo anterior, no sigue los señalamientos del NCTM (2000) en la implementación de diversos modelos visuales para la enseñanza de las fracciones.

Tomando en cuenta lo anterior, la investigación aspira al empleo de cierta tipología de modelos visuales, orientados a la comprensión del concepto de fracción, involucrando sesiones de trabajo que abordan las diferentes interpretaciones y representaciones de las fracciones; proporcionando al estudiante diferentes actividades innovadoras para mejorar el aprendizaje del objeto matemático fracciones.

En conexión con lo expuesto anteriormente, la temática está centrada en aspectos vinculados al aprendizaje de un objeto matemático específico al interior de la Matemática Educativa, esto implica la conexión con una de las líneas de investigación del programa de maestría de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM, 2017:14) Estudios Disciplinares, cuyo desarrollo tiene como objetivo la potencialización de las capacidades instaladas, así como del personal especializado en campos específicos de las ciencias (humanas o naturales) y la tecnología, buscando impulsar la investigación, desarrollo e innovación nacional, así como la prestación de servicios especializados y la generación de conocimientos aplicados.

El presente tema de investigación favorece a los estudiantes de séptimo grado y docentes del Instituto privado bilingüe Happy Summer School, a los cuales se les propone incluir en su planificación interna de clases la implementación de modelos visuales no solo en el tema de las fracciones sino también en los demás temas de las diversas áreas de las matemáticas.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Un panorama histórico de las fracciones

2.2 La comprensión de un concepto matemático

2.3 Los registros de representación semiótica

2.4 Diferentes interpretaciones de las fracciones para su comprensión

2.5 Dificultades y errores en las fracciones

2.6 El enfoque constructivista

2.7 La visualización matemática

2.8 Las representaciones en matemáticas

2.9 Modelos visuales para la enseñanza de las fracciones

2.10 Estándares básicos de competencias en fracciones

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Un panorama histórico de las fracciones

En esta sección se aborda la evolución de la génesis de las fracciones en las distintas civilizaciones de la historia de la matemática, con el objetivo de llegar a comprender el concepto de fracción que se ha venido desarrollando desde la antigüedad.

2.1.1 Fracciones en la cultura egipcia

La cultura egipcia es protagonista de muchos avances de la humanidad, en el área de las matemáticas tienen muchos aportes, especialmente en la geometría, en el concepto de números y fracciones.

Según Fandiño (2009:38) afirma que:

> La historia de las fracciones se remonta al tiempo de los egipcios y proviene del latín tardío "fractio", "parte obtenida rompiendo", es decir "romper". Por lo tanto, es erróneo pensar que, en el significado original etimológico de "fracción", ya esté comprendida la solicitud (que es especifica sólo para la matemática) de que las partes obtenidas con la acción de romper sean "iguales".

El símbolo $\frac{m}{n}$ tiene un origen incierto, pero si se sabe que fue utilizado por Leonardo Fibinacci Pisano en su Liber Abaci del 1202; los números fraccionarios también son llamados "rupti" (rotos) o también "fracti" (pedazos) y la rayita horizontal que está colocada entre el numerador y el numerador se llama "vírgula" es decir "bastoncillo". También se dice que el termino numerador y denominador tienen su origen incierto, pero se conoce que fueron aceptados en curso del siglo XV en Europa. Los egipcios eran constructores consumados, tenían un sistema muy desarrollado de creencias y ceremonias religiosas y eran registradores obsesivos (Fandiño, 2009:38).

Con referencia al párrafo anterior se dice que las fracciones provocaban graves dolores de cabeza a los egipcios. En diversos períodos utilizaron varias notaciones diferentes para fracciones. En el Reino Antiguo (2.700-2.200 a.C.), una notación especial para nuestras fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$ se obtenía por división por dos repetida. Estos símbolos utilizaban partes del jeroglífico "ojo de Horus" u "ojo de la cobra" (figura 2.1). El sistema egipcio más conocido para las fracciones fue ideado durante el Reino Medio (2.200-1.700 a.C.). Empieza con una notación para cualquier fracción de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un entero positivo. El símbolo (el jeroglífico para la letra R) se escribe sobre los símbolos egipcios estándares para n. Por ejemplo, $\frac{1}{n}$ se escribe. Las demás fracciones se expresan entonces añadiendo varias de estas "fracciones unidad". Por ejemplo, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (Stewart, 2008:16-17).

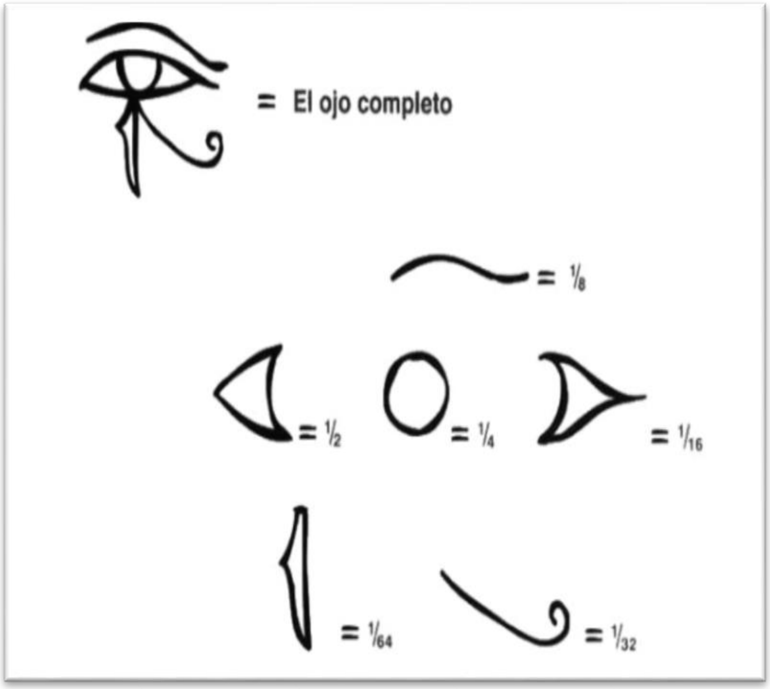


Figura 2.1 Ojo de cobra
Fuente: Tomado de Stewart (2008:18)

Los hallazgos que se han encontrado sobre las matemáticas que se utilizaron en la cultura egipcia están en el papiro Rhind (figura 2.2). Por lo que respecta al papiro Rhind es un documento que data mediados del siglo XVI a.C. fue adquirido por Alexander Henry Rhind en 1858, es un documento que explica de manera didáctica problemas resueltos sobre la matemática egipcia.

Figura 2.2 Extracto del papiro Rhind
Fuente: https://historiadeafrica.com/papiro-de-rhind-y-papiro-de-moscu-las-fuentes-africanas-de-las-matematicas/

2.1.2 Fracciones en la civilización babilónica

Los babilónicos utilizaron fracciones cuyos denominadores eran potencias de 60, ya que la base utilizada era la sexagesimal y no la decimal como lo hacemos hoy en día. De esta forma se representaban las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$. Basaron su sistema en signos correspondientes a los números del 1 al 59 sin un signo de "cero" (figura 2.3). Los signos eran hechos al combinar símbolos para "diez" y "uno". Este sistema era muy práctico, lo único que se necesitaba era un sistema comprensible de 59 signos (Hodgkin, 2005).

Así mismo, la investigación realizada por Fandiño (2009) mencionó que los babilonios de alguna manera inventaron el cero, pero no como cifra, como en nuestro sistema actual. Ellos lo utilizaron como indicador de un espacio vacío.

En una tableta babilónica que data alrededor del siglo III a.C se encontró una escritura que es similar a nuestros caracteres actuales. En ella se encuentran ejemplos de fracciones, todas con denominador 60 o 60^2. Por ejemplo, la fracción $\frac{30}{3600}$ en otras palabras, $\frac{30}{60^2}$.La fracción está escrita en la escritura sexagesimal asiro-babilones, es decir 0; 0; 30 lo cual significa:$0\ x\ 1 + 0\ x\ \frac{1}{60} + 30\ x\ \frac{1}{60^2}$.

En este mismo sentido, los asirios no fueron los creadores de los símbolos de las fracciones, pero si utilizaron un sistema sexagesimal que hoy en día se siguen utilizando en nuestra hora que tiene 60 minutos o 3600 segundos y el círculo completo que tiene 360°.

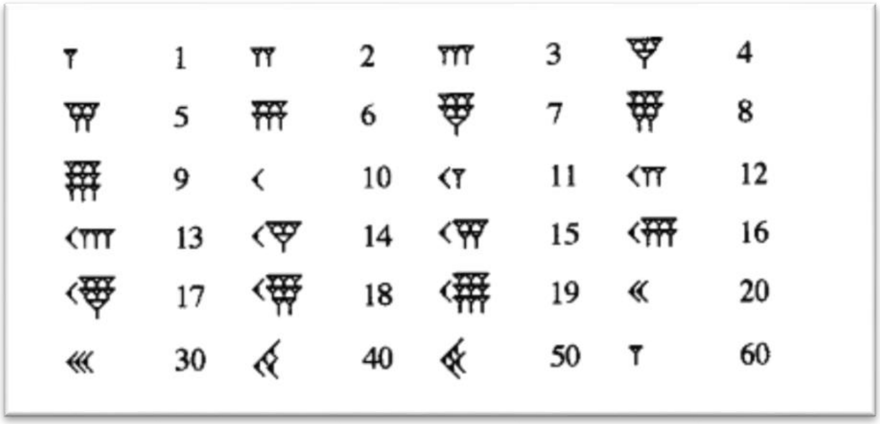


Figura 2.3 Ejemplos matemáticos Babilónicos
Fuente: Hodgkin (2005:23)

2.1.3 Fracciones en la civilización griega

La cultura griega tuvo un aporte significativo sobre filosofía, literatura y matemática. Sin embargo, su sistema numérico era poco eficaz y tuvieron muchas dificultades al representar las fracciones. Al igual que los egipcios, los griegos prefirieron utilizar las fracciones con numerador unitario. Utilizaron las letras minúsculas del alfabeto griego para representar los números. Por ejemplo, la primera letra del alfabeto griego α indicaba el 1, β el 2, γ el 3, δ el 4 y así sucesivamente (Tabla 2.1). Para indicar las fracciones, escribían el denominador seguido del acento alto “ ' ” para no confundir las letras con el alfabeto (Fandiño, 2009).

Tabla 2.1
Los números griegos

Unidades	**Decenas**	***Centenas***
α'=1	τ'=10	ρ'=100
β'=2	κ'=20	σ'=200
γ'=3	λ'=30	T'=300
δ'=4	μ'=40	υ'=400
ε'=5	ν'=50	φ'=500
ô '=6	ξ'=60	χ'=600
ζ'=7	o'=70	ψ'=700
η'=8	π'=80	ω'=800
θ'=9	ϟ= 90	$\sigma\pi'$=900

Fuente: Elaboración propia a partir de Fandiño (2009)

Mediante el empleo de las letras griegas se expresaban fracciones como $\frac{1}{23}$ que se escribían de la forma $\kappa\gamma'$, $\frac{1}{34}$ de la forma $\lambda\delta'$, y así sucesivamente.

De esta forma se ha estudiado el desarrollo de las fracciones en diversas civilizaciones del mundo, con el fin de tener un panorama general del concepto de fracción que nuestros antepasados han tenido a través de los años. Este panorama sobre las fracciones permitirá tener un estudio más amplio sobre la temática y conocer más a profundidad sobre su enseñanza en los salones de clases y así, mejorar la comprensión del concepto.

2.1.4 Definición del concepto de fracción

A continuación, se presentan algunas definiciones del concepto de fracción que han surgido del desarrollo de las culturas antiguas.

Por su parte Swokowski (2009:8) expone que “usamos ${}^{a}\!/_{b}$ o $\frac{a}{b}$ por $a \div b$ y nos referimos a ${}^{a}\!/_{b}$ como el **cociente de a y b** o la fracción **a sobre b. Los números a y b son el numerador** y **denominador,** respectivamente, de ${}^{a}\!/_{b}$”.

Por otra parte, Palmer y Bibb (2003:11) la fracción es una división indicada, en general $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros, e indica una o más de las partes en que se ha dividido la unidad. El divisor, número que se encuentra debajo de la raya de la fracción, recibe el nombre de denominador de la fracción y si es entero, indica en cuántas partes se ha dividido la unidad. El dividendo, número sobre la raya de la fracción, se llama numerador de la fracción, e indica, si es entero, el número de partes de la unidad dividida que se toman.

Desde otro punto de vista, a la fracción si se le considera como una relación parte-todo, hay una gran diferencia dependiendo de si el “todo” (la unidad) está constituido por algo **continuo** o **discreto**. En otras palabras, la unidad puede ser continua, por ejemplo: Un rectángulo, una pizza, la longitud de un segmento o el volumen de un cuerpo. Por otra parte, la unidad puede ser una cantidad discreta, por ejemplo: 4 canicas, 6 personas, etc., En otro orden de ideas, la unidad puede ser 1, a veces más de 1. (Fandiño, 2009)

2.2 La comprensión de un concepto matemático

En esta sección se aborda lo que significa comprender un concepto matemático desde el punto de vista de diversos autores de la Matemática Educativa, con el fin de aportar un marco referencial que respalde la investigación.

Con relación a lo anterior mencionado, Sierpinska (1990:12) hace una reflexión de lo que es comprender un concepto: “comprender un concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la estructura del concepto". En este sentido, se sabe que las fracciones tienen diferentes significados por lo que los estudiantes deben estar inmersos en actividades que impliquen cada uno de ellos.

En este mismo orden de ideas, Fandiño (2009:132) afirma que "el aprendizaje de conceptos es preliminar a cualquier otro y no hay duda de que en matemática tiene un papel importante". En este caso, es fundamental ahondar en el concepto de fracción ya que la falta de comprensión de un concepto matemático trae consigo muchas repercusiones negativas al realizar operaciones elementales.

Con relación a los autores anteriores, Pirie y Kieren (como se citó en Meel, 2003) proponen un marco teórico para la comprensión de conceptos matemáticos que es basado en una teoría constructivista. En el modelo de comprensión matemática en donde se puede observar la evolución de la comprensión en distintos niveles que ascienden de manera gradual. En este modelo, la comprensión surge a través de 8 niveles.

En este sentido, la comprensión matemática se puede caracterizar por niveles, pero no es lineal. Es un fenómeno recursivo y se ve que la recursividad ocurre cuando el pensamiento se mueve entre niveles. Es decir, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel en particular depende de las formas y procesos internos. En otras palabras, a medida que el estudiante progresa en su conocimiento, su comprensión es más sólida. (Pirie y Kieren, 1989)

Para efecto de esta investigación y de los objetivos que se desean alcanzar solamente se consideran los primeros cuatro niveles del modelo; ya que según Guzmán (como se citó Rendon y Londeño, 2013:112) los primeros cuatro niveles nos permiten usar la visualización como herramienta para mejorar la comprensión. En este sentido, usaremos la visualización a través de los modelos visuales para mejorar la comprensión del concepto de fracción. Los demás niveles conllevan un nivel de abstracción superior a lo que la investigación persigue.

- Nivel 1

El primero es el nivel del **conocimiento primitivo**, que se localiza en la base del modelo que es donde el estudiante posee toda la información de aprendizaje que se le conoce como conocimiento intuitivo o conocimiento previo. La acción en este nivel puede involucrar objetos físicos, figuras, gráficos o símbolos. En este nivel el estudiante utiliza, el conocimiento de los cursos previos y de su experiencia del diario vivir. En este nivel se encuentran los **conocimientos internos**, que puede ser objetos matemáticos que se han estudiado con antelación. Cabe mencionar que el conocimiento primitivo no es un nivel bajo, sino que es el comienzo del crecimiento de la comprensión matemática.

- Nivel 2

En el segundo nivel se trata de la **creación de la imagen**, ya en este nivel el estudiante tiene la capacidad de hacer distinciones basándose en capacidades y conocimientos previos. En este estrato, los estudiantes realizan acciones que están relacionadas con algo mental o físico para adquirir la idea de un determinado concepto y se busca desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos.

- Nivel 3

El tercer nivel, se refiere a la **comprensión de la imagen**, en donde las imágenes relacionadas en una sola tarea se reemplazan por una imagen mental, y es aquí en donde el estudiante crea imágenes de conceptos. En este sentido, Delgado et al. (2014:29) menciona que “en este nivel el estudiante está liberado de acciones particulares y de ejemplos concretos y puede elaborar y llevar a cabo un plan mental sobre las acciones que debe realizar". Por lo tanto, el estudiante se encuentra en la necesidad de sustituir una imagen relacionada al concepto por una imagen mental del mismo.

- Nivel 4

En el cuarto nivel se considera la **observación de la propiedad,** que consiste en examinar una imagen mental y basándose en esta observación puede determinar los distintos atributos relacionados con la imagen. Delgado et al. (2014:29) expone que "este es el primer paso hacia la generalización matemática". En este nivel, el estudiante es capaz de discernir las propiedades de un objeto matemático.

- Nivel 5

En el quinto nivel, llamado **formalización**, el estudiante es capaz de abstraer las propiedades comunes de las imágenes, generalizar y trabajar con el concepto como un objeto formal. Meel (2003:238) afirma que "en este nivel el estudiante puede hablar de las fracciones como objetos formales no conectados con ejemplos específicos". Por lo tanto, el estudiante ya se hace referencia a una imagen mental.

- Nivel 6

A este nivel se le denomina **observación**, permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. En este nivel es donde el estudiante puede formalizar la comprensión de los objetos matemáticos y reflejarlos en forma de teoremas.

- Nivel 7

El siguiente nivel es llamado la **estructuración**, donde la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Por su parte Delgado et al. (2014:35) sostiene que "el estudiante comienza o trata de pensar en sus observaciones formales como una teoría y justifica o verifica una declaración a través de un argumento lógico o metamatemático”.

- Nivel 8

Este nivel de la comprensión matemática se le llama **invención**, cuando el estudiante lo ha alcanzado tiene la capacidad de desvincularse de las situaciones concretas y determinadas del concepto, ya que tendrá una comprensión completa del mismo, para luego emprender otras perspectivas que lo conduzcan a realizar hipótesis de otro problema o concepto. (Delgado et al., 2014:35)

Una de las características fundamentales de este marco teórico es el **“redoblado”** (volver hacia atrás) que le permite al estudiante regresar a un nivel interno, aunque este ya esté en un nivel externo; con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos u obtener una retroalimentación del concepto en los que no profundizó. De esta manera, el estudiante podrá continuar con los demás niveles perfeccionando su comprensión.

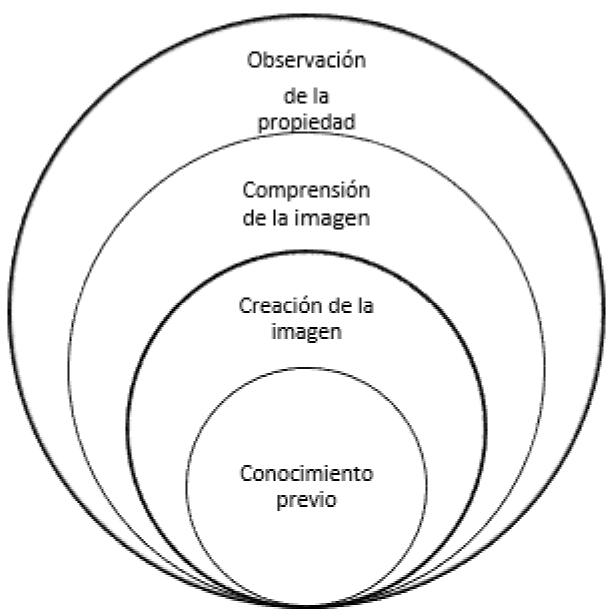


Figura 2.4 Modelo de la comprensión matemática
Fuente: Adaptado de Pirie y Kieren (1989)

A continuación, se presenta una tabla que contiene los cuatro niveles de la comprensión de Pirie y Kieren adaptado al constructo fracción.

Tabla 2.2
Ejemplo del constructo fracción en el modelo de la comprensión matemática de Pirie y Kieren

Nivel	Descripción	Ejemplo
Nivel 1	Conocimiento previo.	El estudiante reconoce la palabra fracción manifestando una idea intuitiva del concepto.
Nivel 2	Creación de la imagen.	El estudiante crea una imagen mental del término fracción y lo asocia con una pizza mencionando características de esta.
Nivel 3	Comprensión de la imagen.	El estudiante relaciona la imagen mental de la pizza con la repartición equitativa y las partes que se toman.
Nivel 4	Observación de la propiedad.	El estudiante observa que se comió dos rebanadas de la pizza y que esa cantidad representa $\frac{2}{8}$ y que es igual a $\frac{1}{4}$. Luego explica su desarrollo.

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

2.3 Los registros de representación semiótica

Para el tema de investigación sobre el objeto matemático fracción se considera la teoría de registros de representación semióticas de Raymond Duval. Ya que, el tema propuesto de investigación está ligado a tareas de tratamientos y conversiones entre los diferentes modelos visuales de representación.

Según Duval (como se citó en Mendoza, 2013) la semiótica es la ciencia de los modos de producción, funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades y por representaciones semióticas a las producciones constituidas por el empleo de signos que pueden estar en el lenguaje natural, aritmético o numérico, analítico o algebraico, gráfico o geométrico y figural.

En ese mismo sentido, Duval (2017:1) enfatiza que:

> El aprendizaje de las matemáticas presenta problemas de comprensión que no se observan en otras áreas del conocimiento. Durante un período de varias semanas, o a veces en una clase, o en varios años existen dificultades relacionadas con la introducción de un nuevo concepto o procedimiento.

Significa entonces, que existen dificultades locales y globales en el aprendizaje y representación de un nuevo concepto el cual se puede identificar en nuestros salones de clases y puede llegar a ser una dificultad identificada a nivel mundial, según las investigaciones anteriormente mencionadas. Es por ello, que la investigación cuyo enfoque es la comprensión del concepto de fracción está sustentada por las teorías de representaciones semióticas y el empleo de diversos modelos visuales.

Sobre las representaciones semióticas y el conocimiento de los individuos Duval (2006:22) enfatiza que "no existe un conocimiento que pueda ser comprendido por un individuo sin una actividad de representación". Las representaciones de los objetos abstractos en matemáticas tienen que ser identificados en su representación, ya que estos objetos pueden tener una variedad de representaciones.

Por su parte, D´Amore, Fandiño y Lori (2013:130) sostienen que “no existe un aprendizaje conceptual, algorítmico, estratégico o comunicativo sin aprendizaje semiótico”. Si deseamos que nuestros estudiantes adquieran un aprendizaje conceptual en la matemática, los registros de representación semiótica son una alternativa para fortalecer los conceptos.

En ese mismo orden de ideas, se puede observar que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012:30)

Las representaciones semióticas son un conjunto de signos que tienen un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y permiten su acceso por medio de los esquemas mentales que el estudiante posee. Por lo tanto, el empleo de los registros de representación semiótica es propicio para el desarrollo de la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes.

2.3.1 Las transformaciones en las representaciones semióticas

En las representaciones semióticas existen dos tipos de transformaciones que son completamente diferentes, las cuales involucran actividades cognitivas, el tratamiento y la conversión que nos ayudan a la comprensión del objeto matemático.

2.3.1.1 Los tratamientos

Los tratamientos son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro: por ejemplo, realizar un cálculo mientras se mantiene estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura utilizando criterios perceptivos de conectividad o simetría, eso da importancia al papel intrínseco de los sistemas semióticos en procesos matemáticos. Los tratamientos, que se pueden realizar, dependen de principalmente sobre las posibilidades de transformación semiótica, que son específicas al registro utilizado (Duval 2006:111).

A continuación, se presenta un ejemplo de un tratamiento de la fracción $\frac{2}{4}$ dentro de un registro pictórico.

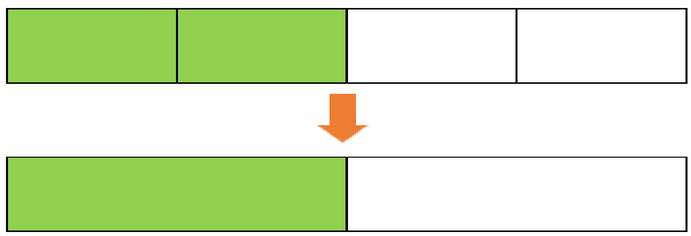


Figura 2.5 Ejemplo de un tratamiento dentro de un registro pictórico
Fuente: Elaboración propia a partir de Duval (2006)

2.3.1.2 La conversión

Las conversiones son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado (Duval, 2006: 112).

Se presenta un ejemplo de una conversión de la fracción $\frac{1}{3}$, dada en un registro numérico a uno pictórico.

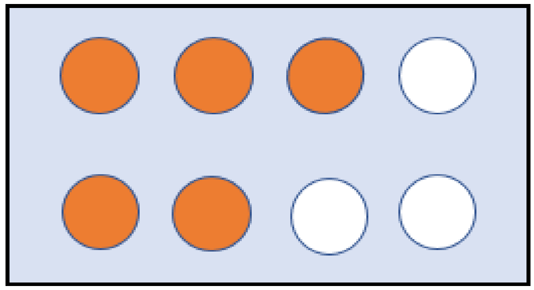


Figura 2.6 Ejemplo de una conversión de un registro numérico a uno pictórico
Fuente: Elaboración propia a partir de Duval (2006)

2.3.1.3 Ejemplo de tratamiento y conversión

En la siguiente figura se presenta un ejemplo de las transformaciones de conversión y tratamiento del objeto matemático fracción, una adaptación de Duval.

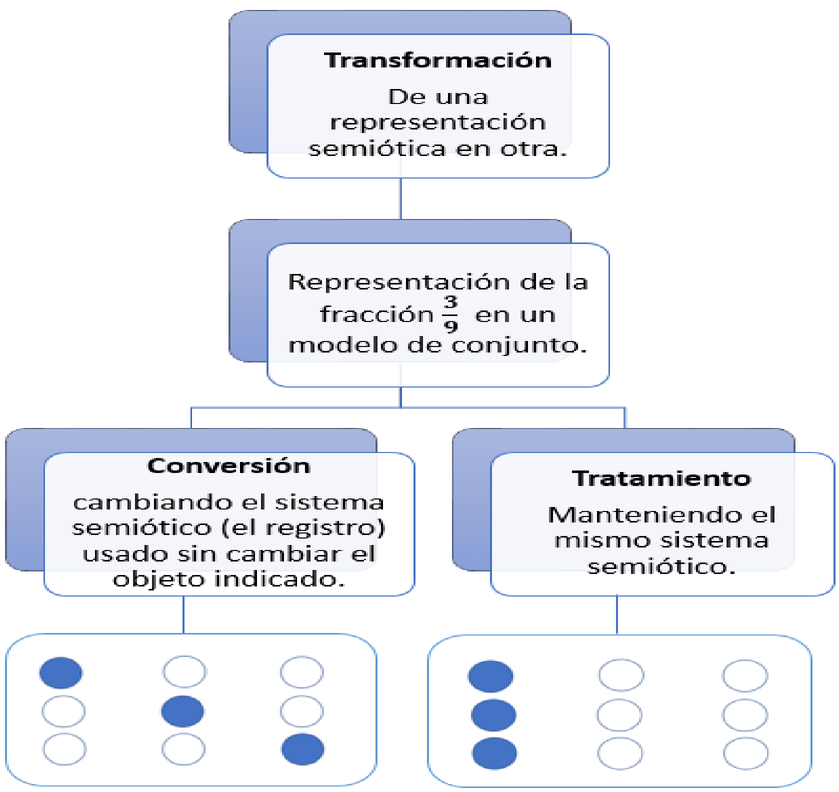


Figura 2.7 Ejemplo de conversión y tratamiento
Fuente: Adaptado de Duval (2006)

Es evidente entonces, que para que exista una construcción conceptual de un objeto matemático tiene que haber una relación en la implementación de varios registros de representación semiótica de estos objetos: seleccionar los rasgos distintivos de cada objeto a representar y utilizar un registro determinado; realizar dichas representaciones dentro de un mismo registro y convertir dichas representaciones de un determinado registro en otro (Fandiño, 2009).

2.4 Diferentes interpretaciones de las fracciones para su comprensión

En este apartado se analizarán las diferentes interpretaciones que tienen el concepto de fracción y la relación que tiene cada uno de los subconstructos del número racional.

Inicialmente, el concepto de fracciones consistió en cuatro subconstructos interrelacionados entre sí: la fracción como razón, operador, cociente, y medida. Según estudios iniciales la conceptualización de la fracción como parte-todo estaba inmersa en cada uno de los cuatro subconstructos antes mencionados. Por esta razón no se consideró a la relación parte- todo como un quinto subconstructo. Además, se mostró, que para que exista una comprensión del concepto de fracción, se necesita comprender cada uno de estos significados, relación entre ellos y su construcción (Kieren, 1976).

En ese mismo sentido, las ideas de Kieren fueron expandidas, y se recomendó que la relación parte-todo comprende un subconstructo diferente. Este subconstructo fue conectado al proceso de partición. También se propuso un modelo teórico que vincula las diferentes interpretaciones de fracciones con las operaciones básicas de fracciones, la equivalencia de fracciones y la resolución de problemas (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983).

A continuación, se presenta un diagrama que explica el subconstructo parte-todo como el más básico para la comprensión de los demás subconstructos, y así mismo las operaciones básicas que trata cada subconstructo.

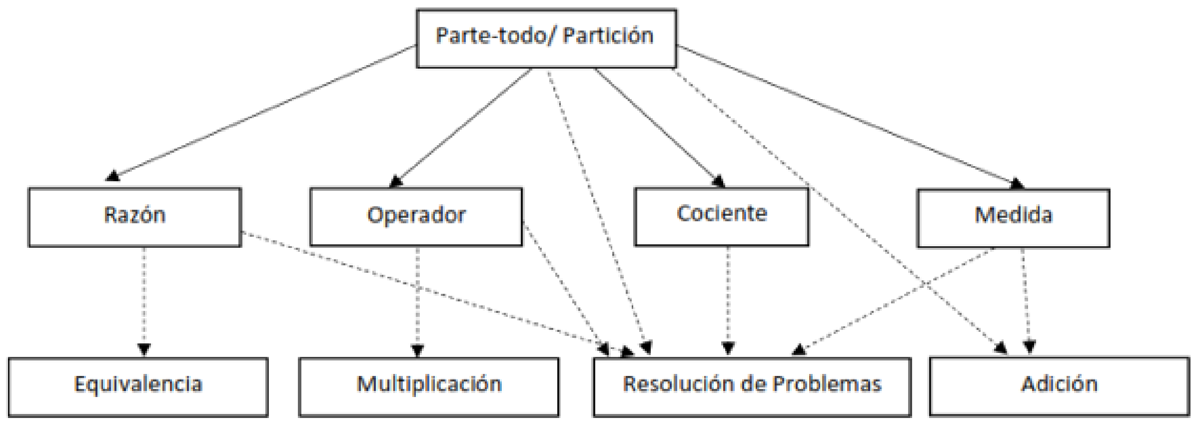


Figura 2.8 Esquema conceptual de los números racionales
Fuente: Elaboración propia a partir de Kieren (1976)

2.4.1 La fracción como parte-todo

Al significado como parte todo también denominada subárea, concibe al todo dividido en partes iguales, donde el denominador indica las partes en que se divide del total y el numerador las que se toman; en este sentido, se puede entender que el numerador permite contar algunas partes en que se ha dividido del total (Ríos, 2008:147). En la concepción de la fracción como parte-todo se pueden considerar si las cantidades son continuas o discretas. Así mismo, se consideran las fracciones propias e impropias dentro de este significado.

Aunque, los estudiantes tienen experiencias limitadas con fracciones fuera del contexto de la escuela, existen muchos que entienden el concepto de fracción como parte-todo, sobre todo si el objetivo es formar partes iguales en una figura. Por ejemplo, dividir un chocolate en $\frac{1}{4}$ o un pastel en $\frac{1}{2}$. Los estudiantes tienen más dificultades cuando tienen que identificar las partes de un conjunto (Neaogoy, 2016).

Al iniciar la enseñanza de las fracciones existen actividades en las que el estudiante tiene que reconocer la relación parte-todo en una fracción. El estudiante debe hacer transferencias entre gráficas y representaciones simbólicas, de tal modo que pueda interpretar el todo y las partes destacadas en la gráfica. El estudiante realiza un doble recuento de las partes iguales que componen el "todo" y las partes destacadas. Luego el estudiante realiza de manera simbólica el recuento del "todo" de ambas partes y las escribe en forma de fracción (Vizcarra y Sallán, 2005).

A continuación, se presenta un modelo con tareas asociadas a la identificación de la parte-todo. El estudiante debe hacer el conteo de la parte-todo y las partes destacadas.

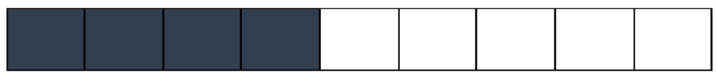


Figura 2.9 La fracción como significado parte todo
Fuente: Elaboración propia a partir de Ríos (2008)

En este ejemplo el estudiante identifica a partir de una gráfica el concepto de la fracción como parte todo, establece la relación entre el numerador y el denominador. Así mismo, identifica por medio del conteo del "todo" y las partes que se destacan que el numerador es 4 y el denominador son 9, por lo tanto, la fracción representada es $\frac{4}{9}$. El estudiante pasa de la forma gráfica a una forma simbólica, haciendo un cambio de registro de representación semiótica.

2.4.2 La fracción como cociente

La escritura $\frac{a}{b}$ fue propuesta precediendo a los términos de parte-todo: dada una unidad, dividirla en b partes (iguales, congruentes, que puedan sobreponerse, consideradas en últimas intercambiables) y tomar a; la unidad de partida podía ser continua y por lo tanto producir pocos problemas; o también podía ser discreta es decir un conjunto de c elementos y por lo tanto producir problemas de "compatibilidad" entre b y c (Fandiño, 2009:109).

Kieren (como se citó en Rebollo, 2001:454) señala que:

> Para el niño que está aprendiendo a trabajar con fracciones, el dividir una unidad en cuatro partes y tomar tres ($\frac{3}{4}$) resulta ser un problema diferente del hecho de dividir tres unidades entre cuatro personas, aunque la porción resultante sea del mismo tamaño. La

representación más general de $\frac{a}{b}$ conduce a la idea inmediata de cociente de dos números: “a unidades en b partes iguales” con lo cual aparece la noción de “reparto” en cantidades iguales.

A continuación, se presenta un ejemplo de una investigación usado en Fandiño (2009) de la fracción como cociente en donde los estudiantes tienen que identificar una serie de figuras que representan **la unidad** y en donde se evidencian las distintas interpretaciones que el estudiante puede tener sobre las fracciones.

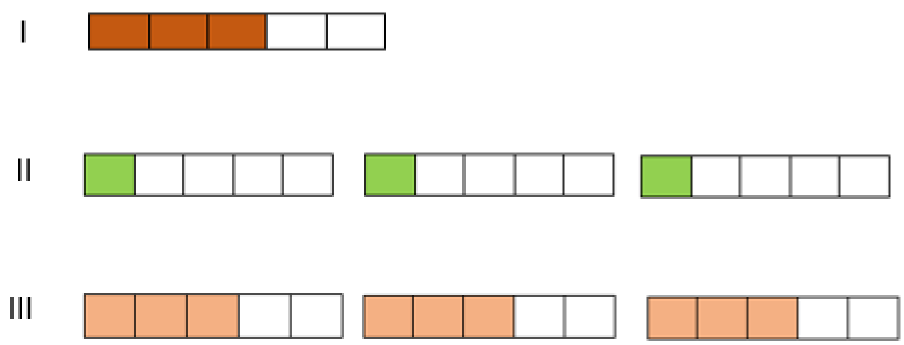


Figura 2.10 La fracción como cociente
Fuente: Elaboración propia a partir de Fandiño (2009)

En este ejemplo se está interpretando la fracción $\frac{3}{5}$ en donde los estudiantes tienen que identificar que figura es la que representa al número racional 0.6. En las figuras I y III los estudiantes tienen representada la fracción $\frac{3}{5}$, pero en la figura II ya los estudiantes se enfrentan a un obstáculo donde la mayoría dicen que tienen la fracción $\frac{3}{5}$, pero en realidad tiene la fracción $\frac{3}{15}$, la cual representa a $\frac{1}{5}$. Los estudiantes interpretan la figura II como 3 veces $\frac{1}{5}$ en otras palabras $\frac{3}{5}$ (Fandiño, 2009).

2.4.3 La fracción como razón

Sobre este significado de la fracción Fandiño (2009:110) afirma:

> A veces la fracción $\frac{a}{b}$ se usa explícitamente para indicar la relación entre a y b y entonces se escribe $a:b$ el signo ":" sustituye "–" no tanto y no solo indicando la operación de división (indicada solamente o por efectuar) sino también al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes que están entre ellas como a está a b.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, Ríos (2008:153) menciona "Se entiende la razón de un número a otro como un valor de comparación o de relación entre dos números". Lo anterior significa que la comparación parte-todo se le puede dar otro significado, en este caso, es una comparación entre dos cantidades. Las fracciones son siempre comparaciones de la parte y el todo, pero una razón puede ser la comparación entre la parte y el todo o puede ser una comparación de dos partes. Cuando se presenta una fracción como razón significa que existe una relación entre a y b, y que todo cambio que pueda ocurrir en **a** tendrá repercusiones en **b**.

Seguidamente, se presenta un ejemplo de la fracción como razón propuesta por Neagoy, (2016).

Por ejemplo, supongamos que un total de 12 personas asistieron a un día de campo: 3 adultos y 9 niños. Al menos cuatro razones pueden ser creadas a partir de esta información, dos relaciones de parte a todo, similares a las fracciones, y dos relaciones de parte a parte, que son diferentes de las fracciones.

Usaremos la letra A para el número de adultos, N para los niños y P para el total de personas en el día de campo.

Tabla 2.3
Cuatro razones derivadas del problema del día de campo

Razones de parte a todo	***Razones de parte a parte***
$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	$\frac{A}{N}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$\frac{N}{A}=\frac{9}{3}=\frac{3}{1}$

Fuente: Elaboración propia a partir de Neagoy (2016)

- La proporción de niños con respecto al número total de personas es un ejemplo de una relación parte-todo y se puede denotar de varias maneras, incluyendo 9 niños a 12 personas, 9 a 12, 9: 12 y $\frac{9}{12}$.
- La proporción de niños por adulto, por otro lado, es una proporción de parte por parte. Esta relación, que puede expresarse como 9 niños por 3 adultos, 9 a 3, 9: 3 o $\frac{9}{3}$.

2.4.4 La fracción como operador

Kieren (1980:136) afirma "El subconstructo operador describe a los números racionales como los mecanismos que mapean un conjunto o una región multiplicativamente en otro conjunto". Este es uno de los significados más usados en las escuelas, podemos ver ejemplos como: "encontrar los $\frac{3}{5}$ de 10 aguacates" el cual significa: (10 ÷ 5) x 3 aguacates.

Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross (como se citó en Neagoy, 2016:39) expone "el sentido de $\frac{a}{b}$ cambia o transforma otro número o cantidad al reducirla o ampliarla. Dependiendo la naturaleza de la cantidad en la que se está operando". La operación puede ser la ejecución de la multiplicación y división o la operación opuesta.

En ese mismo sentido, Lamon (2008) también define a los operadores como transformadores que alargan o acortan los segmentos de línea, aumentan o disminuyen el número de tareas en un conjunto de objetos discretos, o tomar una figura en el plano geométrico y mapéelo en una figura más grande o pequeña de la misma forma.

A continuación, se considera el ejemplo de la fracción como operador que se encuentra en la investigación de Neagoy (2016).

Considérese una tira de cinta de largo l y la fracción $\frac{2}{3}$. ¿Qué efecto tiene $\frac{2}{3}l$ desde una perspectiva de operador?

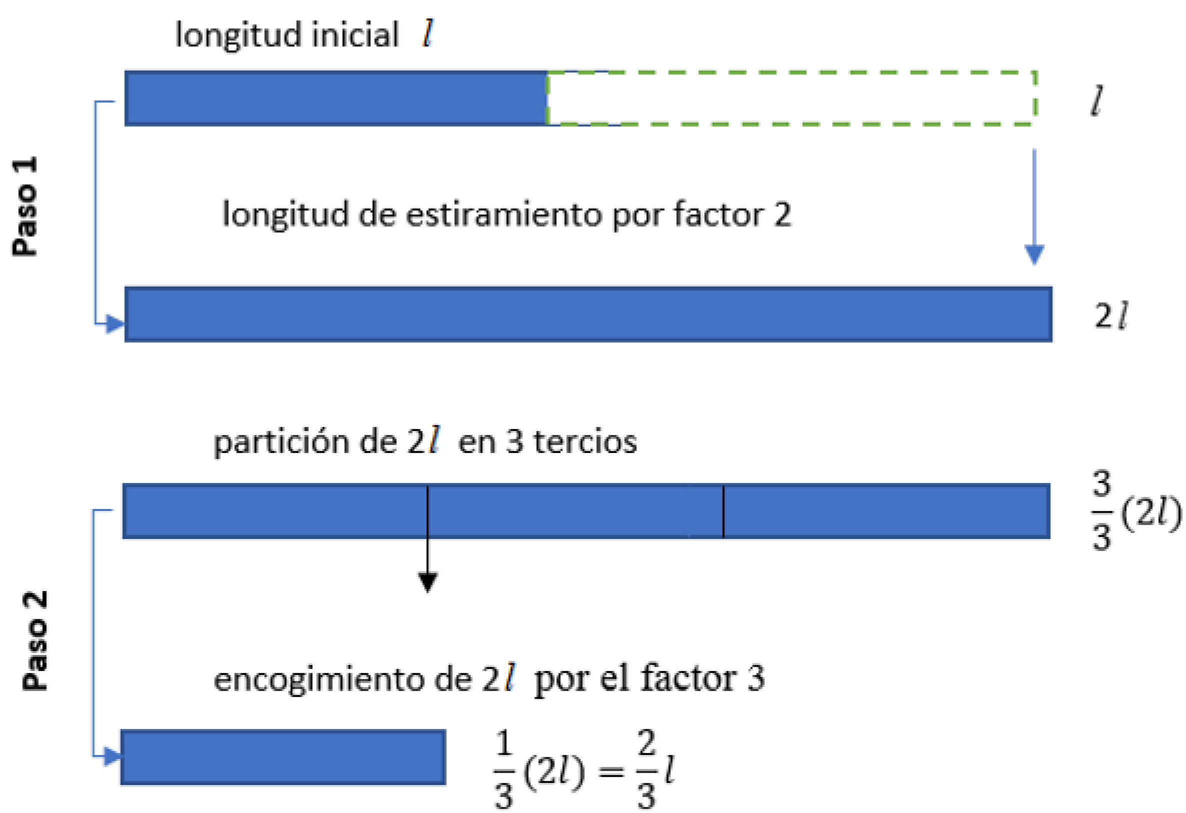


Figura 2.11 El estiramiento y encogimiento de la fracción $\frac{2}{3}$ en l
Fuente: Elaboración propia a partir de Neagoy (2016)

2.4.5 La fracción como medida

Los estudiantes del Primer Ciclo tienen una noción de lo que significa la fracción como medida, en este nivel se introducen ejemplos como: "camino medio kilómetro desde su casa" donde el estudiante hace la comparación de la unidad que es un kilómetro y la fracción representa una distancia o desplazamiento. (Lamon, 2012)

En el subconstructo medida de la fracción, los estudiantes aprenden a contar, decir la hora, medir con una regla, pero al momento de comenzar la enseñanza de las fracciones, este concepto de medida que obtuvieron no es aplicado al dividir la unidad en una recta numérica y representar una fracción (Lamon, 2008:41).

En este mismo sentido, Kieren (1976:131) expresa:

> "La interpretación de la fracción como medida son los puntos en la recta numérica y un aspecto fundamental es saber que la unidad una vez es escogida puede ser dividida en un sinnúmero de partes congruentes".

Por lo tanto, el concepto de fracción se debe abordar desde todas sus interpretaciones, y la noción de medida se debe incluir en las actividades al momento de enseñar las fracciones para que el estudiante comprenda este concepto tan relevante de las matemáticas.

Seguidamente se presenta un ejemplo de la fracción como medida donde se presenta la unidad que es inversamente proporcional a la longitud de las subdivisiones de la misma unidad.

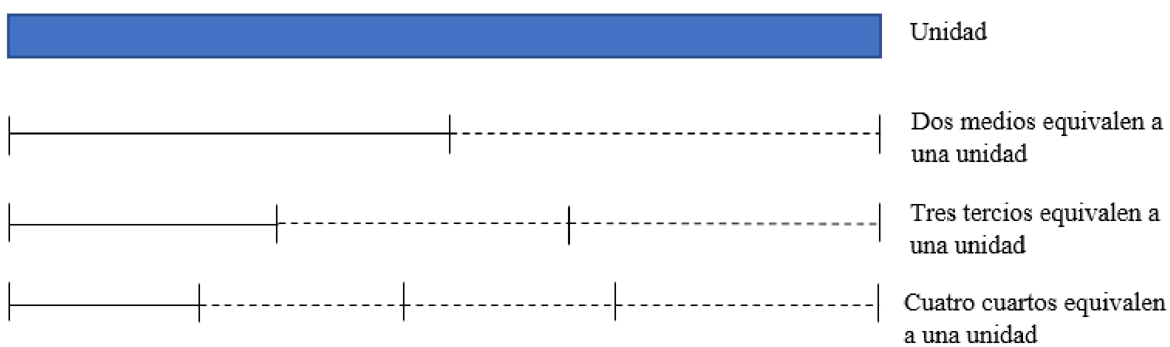


Figura 2.12 Ejemplo de la fracción como medida unidimensional
Fuente: Elaboración propia con base a Neaogy (2016)

2.5 Dificultades y errores en las fracciones

En esta sección se presentan algunos de los errores y dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con fracciones, mismos que están relacionados con el concepto del término. Los ejemplos que se presenta son en función de investigaciones que se han hecho del tema de fracciones o de otro tema en particular en donde se han observado ciertas dificultades y errores en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Con relación a los errores en matemática Rico (1995:1) menciona que un error es "una posibilidad y una realidad permanente del conocimiento científico". Entonces, es común encontrar errores presentes en las respuestas de los diferentes objetos matemáticos y en este caso, en las fracciones desarrolladas por los estudiantes. Los errores son una brecha hacia el aprendizaje una oportunidad de mejora del proceso de enseñanza de los docentes de matemáticas.

A continuación, se presentan algunos de los errores y dificultades presentes en los estudiantes sobre conceptos matemáticos realizado por Radatz (como se citó en Rico, 1995) entre ellos se encuentra errores debido a dificultades de lenguaje; errores debido a las dificultades para obtener información espacial; errores debido a un aprendizaje deficiente de conceptos previos; errores debido a asociaciones incorrectas; errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

En ese mismo orden de ideas, Neagoy (2016) menciona que entre algunas de las dificultades y errores encontrados en las investigaciones se pueden reconocer:

- Dificultad en ver la fracción como números, en este sentido, muchos estudiantes tienen dificultades al realizar operaciones como sumar, restar, multiplicar o dividir con fracciones, ya que en la escuela primaria esta operación no se definió para las fracciones.

- Aplicación memorizada o incorrecta de algoritmos; cuando los estudiantes aprenden algoritmos de memoria sin ninguna conexión, estos no proporcionan ningún significado. Por ejemplo, muchos estudiantes confunden el algoritmo de la multiplicación $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ con el algoritmo de la suma, en cual produce respuestas erróneas como $\frac{3}{4} + \frac{7}{3} = \frac{10}{7}$.
- Las partes no necesitan ser iguales; este error es típico en la repartición de una figura, ya que para muchos estudiantes dividir una figura en tercios no implica que cada tercio tenga la misma área.

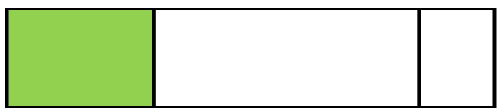


Figura 2.13 Error en la repartición de una figura
Fuente: Elaboración propia a partir de Ríos (2008)

- Cuando las partes no están claramente delineadas; muchos estudiantes tienen dificultades al interpretar una fracción que no está delineada totalmente.

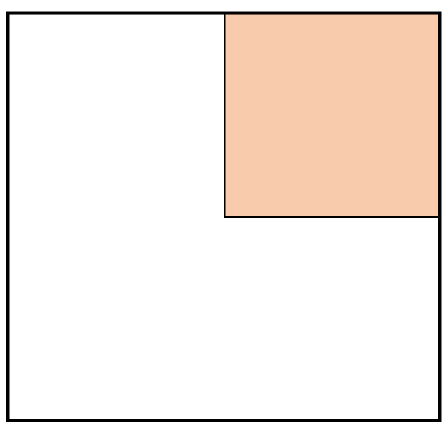


Figura 2.14 Figura no delineada totalmente que representa $\frac{1}{4}$
Fuente: Elaboración propia a partir de Fandiño (2009)

- Las partes deben tener la misma forma. Muchos piensan que igual área significa la misma figura, lo cual hace que se dificulte la conversión de algunas figuras.

La siguiente figura muestra el caso antes mencionado.

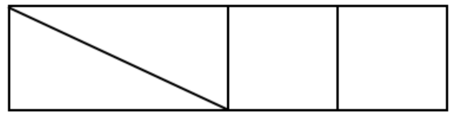


***Figura 2.*15** Partes no congruentes que significan $\frac{1}{4}$
Fuente: Elaboración propia a partir de Fandiño (2009)

2.6 El enfoque constructivista

La educación de hoy en día es más globalizada y se requiere que los estudiantes aprendan de una manera más proactiva y estén a la vanguardia con los nuevos cambios educativos. Los estudiantes deben de aprender utilizando sus conocimientos previos adquiridos para construir sus propias estructuras mentales y mejorar la forma de concebir el aprendizaje.

Es por ello, que el constructivismo, el cual es una corriente pedagógica, donde el conocimiento no es una copia de la realidad, sino que es una construcción del conocimiento donde se utilizan los saberes previos que el estudiante posee. La construcción del conocimiento que se elabora de manera constante depende de dos aspectos: de los esquemas mentales previos y la actividad externa o interna que se desarrolla al respecto (Carretero, 2005). En este caso, los estudiantes pueden llegar a construir su conocimiento basándose en los saberes previos o esquemas mentales que tienen de las fracciones según experiencias anteriores en las clases de matemáticas y la involucración con fracciones que sean representadas en diversos modelos visuales para su comprensión.

En otro orden de ideas, se enfatiza que los errores son una vía hacia el conocimiento y en el proceso de la construcción del conocimiento matemático surgen errores de manera sistemática, entonces, las actividades de los estudiantes deben estar enfocadas, en el diagnóstico, detención, corrección y superación por medio de tareas que promueven la construcción propia de su conocimiento (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1998). Por lo tanto, las actividades sobre el concepto de un determinado tema matemático deben estar orientadas a que el estudiante construya su propio conocimiento, por medio de ejercicios que involucran el razonamiento y así su comprensión.

2.7 La visualización matemática

En la presente sección se aborda la visualización como uno de los aspectos que permite que los objetos matemáticos sean comprendidos a través de una manera visual mediante figuras o dibujos.

En ese mismo sentido Hitt (1998) sostiene que la visualización en matemáticas conlleva habilidades que requieren de convertir de un sistema de representación semiótico a otro. Existen investigaciones que sostienen que los sistemas de representación semióticas tienen un papel importante en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y para que un estudiante diferencie un objeto matemático de su representación es necesario que sea representado en al menos dos registros diferentes. Por lo tanto, el estudiante debe estar sometido a actividades que no solamente son algorítmicas, sino que dentro de los salones de clases debe existir la oportunidad de la representación visual de los objetos matemáticos.

Con relación a lo anterior, Cantoral y Montiel (2003:694) destacan que la visualización es la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar la información visual en el pensamiento y en el lenguaje del que aprende. Al realizar la actividad de visualización se requiere la utilización de nociones matemáticas asociadas al ámbito numérico, gráfico, algebraico o verbales, pero exige también el uso del ámbito gestual.

Existen investigaciones que sostienen que existe por parte de los estudiantes una resistencia al uso de las consideraciones visuales y se observa un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual. Lo anterior se debe a que existe una mayor demanda cognitiva al emplear el pensamiento visual sobre el pensamiento algorítmico (Vinner, 1989).

Aunado a lo anterior, la visualización está estrechamente relacionada con las estructuras cognitivas en función de los esquemas que los estudiantes poseen de los objetos matemáticos, considerando la cultura o el contexto en el que se desenvuelve el estudiante. En la cultura norteamericana, se emplean como sinónimos los términos de representación visual y visualización matemática.

2.8 Las representaciones en matemáticas

La enseñanza efectiva de las matemáticas incluye un fuerte enfoque en el uso de diversas representaciones matemáticas. El NCTM resalta el importante papel de las representaciones en matemáticas sobre su enseñanza y aprendizaje al incluir el Proceso Estándar para la Representación en Principios y Estándares para la Matemática Escolar. Las representaciones incluyen características críticas de construcciones y acciones matemáticas, como dibujar diagramas y usar palabras para mostrar y explicar el significado de fracciones, razones, o la operación de multiplicación (NCTM, 2014: 24).

A continuación, se presenta un diagrama de las diversas conexiones que se pueden emplear en las representaciones matemáticas.

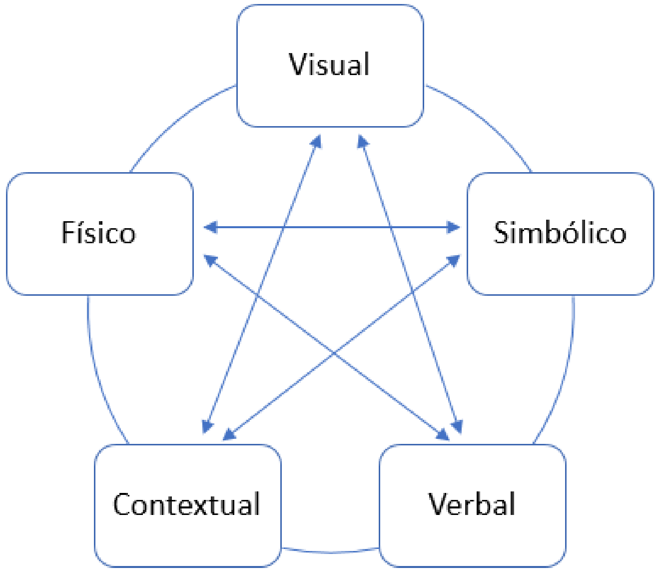


Figura 2.16 Las diversas representaciones matemáticas
Fuente: Elaboración propia a partir de NCTM (2014)

Boaler (2016:185) enfatiza sobre la importancia de involucrar a los estudiantes en diferentes actividades que involucren el pensamiento visual en lugar de solamente aplicar los procedimientos algorítmicos en los tópicos matemáticos. La representación visual permite un amplio acceso en la comprensión de los estudiantes.

Lo anterior mencionado, está relacionado con los modelos visuales que son los pilares fundamentales que se consideraron para llevar a cabo el presente estudio.

2.9 Modelos visuales para la enseñanza de las fracciones

En esta sección se consideran los diferentes modelos que se deberían utilizar para la enseñanza de las fracciones en los estudiantes del Tercer Ciclo. Estos modelos tienen como finalidad, mejorar la comprensión del concepto de fracción y crear conexiones de los conceptos abstractos a los que los estudiantes se pueden enfrentar.

Van de Walle, Karp & Bay-William (2010:288) exponen en que el uso de diferentes modelos visuales ayuda a ver de una manera más clara los conceptos abstractos:

> "Los modelos usados de manera apropiada pueden ayudar a los estudiantes a entender las ideas que se confunden frecuentemente en un modo simbólico".

Esto significa que, la implementación de los modelos visuales en la enseñanza de las fracciones puede mejorar la comprensión de las diferentes interpretaciones que tiene este objeto matemático.

En ese mismo sentido, Lamon (2012:149) menciona:

> En la enseñanza de las fracciones es importante que se empleen diferentes modelos visuales para que los niños no se acostumbren a pensar en una sola manera cuando se les mencione este objeto matemático y no fracasen al momento de transferir ese conocimiento de un modelo a otro.

Así mismo, Van de Walle et al. (2010), Lamon (2012) y Neagoy (2016) que sustentan su teoría basándose en las directrices del NCTM (2,000) en implementar diversos modelos visuales en la enseñanza de las fracciones proponen la implementación de tres modelos visuales: modelo de área, longitud y conjunto.

2.9.1 Modelo de área

En el tema de reparto, todas las tareas que involucran compartir algo que podría ser dividido en partes más pequeñas. Las fracciones se basan en partes de un área o región. El modelo de área es muy pertinente y casi imprescindible a la hora de repartir tareas.

A continuación, se presenta ejemplos de los modelos de área que se pueden implementar en la enseñanza del concepto de fracción y no solo el típico modelo de la pizza o el pastel que tradicionalmente se enseña en algunos salones de clases sino el uso de modelos que vayan más allá de la visualización y ayuden a los estudiantes a comprender este concepto.

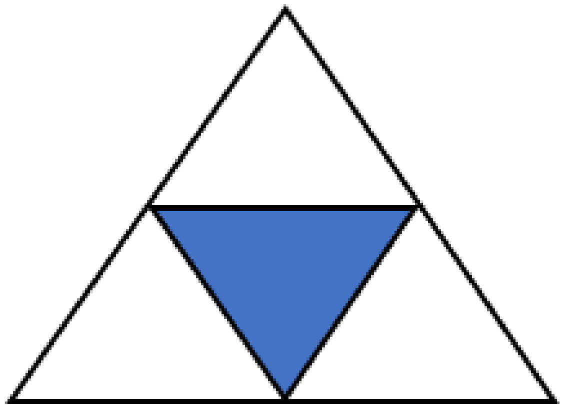


Figura 2.17 Ejemplo de la representación de la fracción $\frac{1}{4}$ en un modelo de área
Fuente: Elaboración propia a partir de Neagoy (2016)

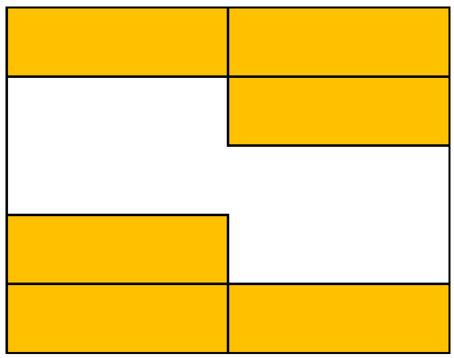


Figura 2.18 Ejemplo de la representación de la fracción $\frac{3}{5}$ en un modelo de área
Fuente: Elaboración propia a partir de Fandiño (2009)

Figura 2.19 Ejemplo de la representación de la fracción $\frac{1}{4}$ en un geoplano
Fuente: Elaboracion propia a partir de Neagoy (2016)

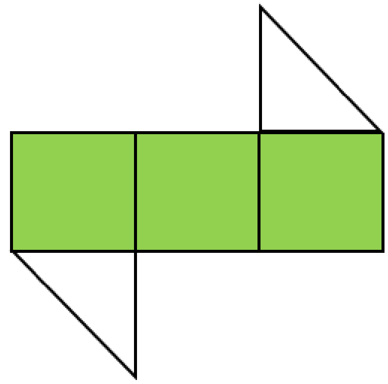


Figura 2.20 Ejemplo de la representación de la fracción $\frac{3}{4}$ en un geoplano
Fuente: Elaboracion propia a partir de Fandiño (2009)

2.9.2 Modelo de longitud

En el modelo de longitud, longitudes o medidas son comparadas en lugar de áreas. Cualquier línea está dibujada y subdividida o materiales físicos se comparan sobre la base de la longitud. Hay una variedad de modelos de longitud como las varillas Cuisenaire que tienen longitudes de 1 a 10 medidas en términos de la tira o varilla más pequeña. Cada longitud o medida puede tener un color diferente para una mejor identificación (Neagoy, 2017:59). Este modelo tiene muy poco uso en el Primer Ciclo y tiene un efecto negativo en el Segundo y Tercer Ciclo ya que, es aquí donde se empieza a modelar en la recta numérica y en el plano cartesiano.

Seguidamente, se presentan ejemplos del modelo de longitud para cantidades continuas.

Figura 2.21 Ejemplo de la representación de la fracción $\frac{1}{5}$ en un modelo de longitud
Fuente: Elaboracion propia a partir de Van de Walle et al. (2010)

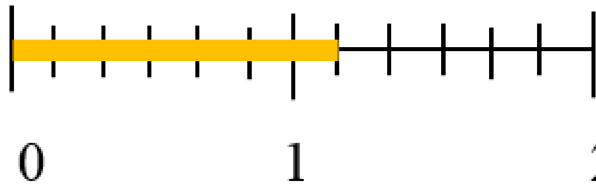


Figura 2.22 Ejemplo de la representación de la fracción impropia $\frac{7}{6}$ en un modelo de longitud
Fuente: Elaboracion propia a partir de Van de Walle et al. (2010)

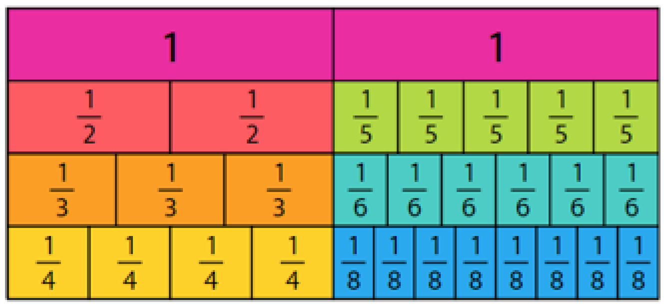


Figura 2.23 Representación de la unidad en un modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia a partir de Van de Walle et al. (2010)

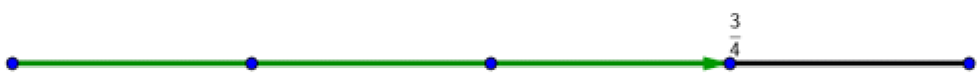


Figura 2.24 Representación de la fracción $\frac{3}{4}$ en la recta numérica
Fuente: Elaboración propia a partir de Van de Walle et al. (2010)

2.9.3 Modelo de conjunto

En el modelo de conjunto o modelo discreto, la parte entera se considera como un conjunto de objetos y los subconjuntos de la parte entera forman la parte fraccionaria. Por ejemplo, 3 objetos son un cuarto de un conjunto de 12 objetos. El conjunto de 12, en este ejemplo representa la unidad.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de modelos de cantidades discretas utilizados para la representación de las fracciones.

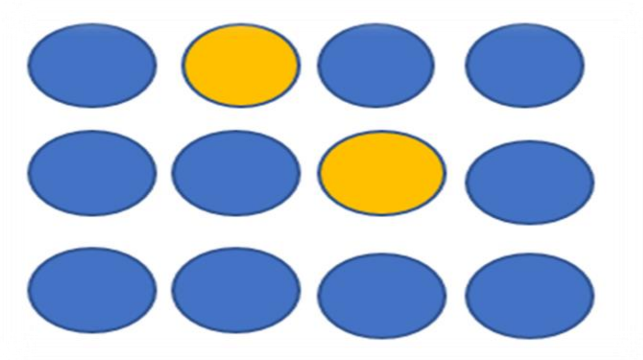


Figura 2.25 Ejemplo de la representación de la fracción propia $\frac{1}{6}$ en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboracion propia a partir de Lamon (2012)

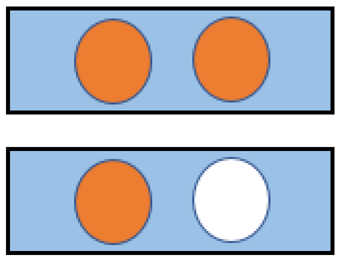


Figura 2.26 Ejemplo de la representación de la fracción impropia $\frac{3}{2}$ en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboracion propia a partir de Lamon (2012)

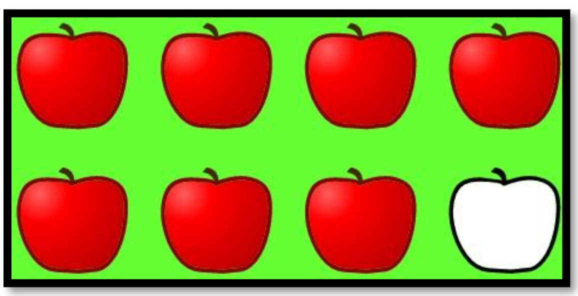


Figura 2.27 Representación de la fracción $\frac{7}{8}$ en un modelo de conjunto
Fuente: Elaborado por medio de actividades interactivas del NCTM en https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/

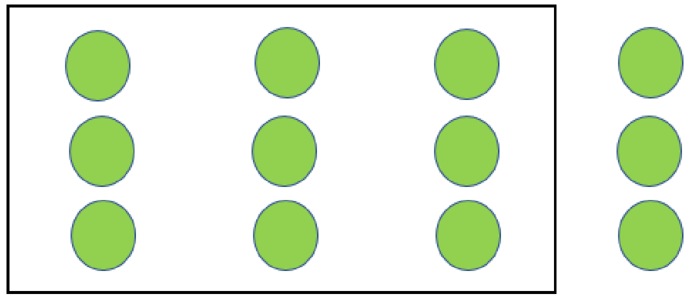
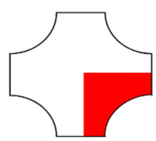
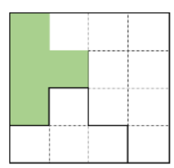
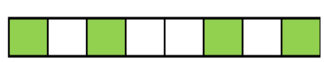


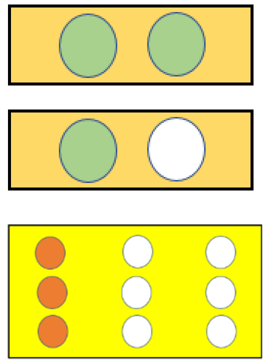
***Figura 2.*28** Representación de la fracción $\frac{3}{4}$ en un modelo de conjunto
Fuente: Elaborado a partir de Neagoy (2016)

2.9.4 Resumen de los modelos visuales para la representación de las fracciones

A continuación, se presenta un breve resumen de cada uno de los modelos sugeridos para la enseñanza del concepto de fracción y el significado de la fracción en el modelo.

Tabla 2. 4
Resumen de los modelos visuales y el significado de la fracción

Modelo	Representación visual	Significado de la fracción en el modelo
Área	 	La parte del área cubierta en lo que respecta a toda la unidad.
Longitud	 	La ubicación de un punto en relación con 0 y otros valores en la recta numérica.

Conjunto		la parte entera se considera como un conjunto de objetos y los subconjuntos de la parte entera forman la parte fraccionaria

Fuente: Elaboración propia con base a Van de Walle et al (2010)

2.10 Estándares básicos de competencias en fracciones

En este apartado se presentan los estándares que marcan las competencias que los estudiantes del Sistema Educativo hondureño deben tener sobre las fracciones.

Los Estándares Educativos Nacionales son objetivos educativos que señalan lo que los alumnos tienen que saber (conocimientos) y saber hacer (destrezas), independientemente de su contexto geográfico, cultural o social. Un estándar es tanto un objetivo (estándar de contenido) como un indicador de medida de progreso hacia el logro de ese objetivo. (S.E, 2011)

A continuación, se presentan los estándares básicos de competencias relacionados con las fracciones que los estudiantes de **séptimo grado** deben reunir, entre ellos se mencionan: Encuentran el valor absoluto de un número racional, realizan adiciones con números racionales, realizan sustracciones con números racionales, resuelven problemas de la vida cotidiana que requieran la sustracción de números racionales, realizan multiplicaciones con números racionales, resuelven problemas de la vida cotidiana que requieran la multiplicación de números racionales, realizan divisiones de números racionales, resuelven problemas de la vida cotidiana que requieran la división de números racionales, realizan estimaciones en la resolución de problemas que impliquen el uso de números racionales, comparan y ordenan números racionales.

En este capítulo se presentó un breve panorama de las fracciones en algunas culturas antiguas y su definición. Seguidamente, se enfatizó en la comprensión de un concepto matemático, los registros de representación semiótica de Raymond Duval como medio para la representación en los modelos visuales. Posteriormente se presentaron los diferentes significados de las fracciones, algunos de los errores comunes encontrados en las investigaciones y de cómo los estudiantes construyen su propio conocimiento a través del enfoque constructivista. Luego, se trata de la visualización y de las representaciones en matemáticas. Se presentaron los modelos visuales como mecanismo de enseñanza para la comprensión de la fracción y un resumen de cada uno de ellos, finalmente los estándares educativos en la enseñanza de las fracciones en séptimo grado.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

3.1 Enfoque

3.2 Tipo de investigación

3.3 Tipo de diseño

3.4 Categorías de análisis

3.5 Población y muestra

3.6 Estrategias de recolección de datos

3.7 Diagnóstico y sesiones de trabajo

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

En este capítulo se aborda la metodología que fundamentó la investigación tales como el enfoque, el tipo de investigación, diseño, las categorías de análisis, la población a la que va dirigido el estudio y la estrategia de recolección de los datos.

3.1 Enfoque

Debido al constructo matemático fracciones y a su análisis de la comprensión desde un punto de vista epistémico, la investigación se realizará bajo un paradigma cualitativo ya que persigue analizar la comprensión que los estudiantes tienen del objeto matemático fracciones. La investigación cualitativa tiene como propósito "describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Hernández Sampieri, Fernández y Baptista 2014:11) por lo tanto, la investigación está en armonía con los objetivos y las preguntas de investigación.

El propósito de la investigación es analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes mediante la implementación de modelos visuales, cuyo propósito se realizará por medio de sesiones de trabajo. Dichas sesiones están orientadas a las conversiones de su registro pictórico, numérico y gráfico. Así mismo, la implementación de un tratamiento dentro de un registro dado. Es por ello, que la implementación de los modelos visuales es el punto álgido de la investigación, a través de ellos se busca analizar la comprensión que los estudiantes adquieren del objeto matemático fracción.

3.2 Tipo de investigación

Basados en los objetivos que se desean alcanzar y las preguntas de investigación propuestas previamente, se debe realizar un estudio de tipo descriptivo-interpretativo, pues "con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (Hernández et al., 2014:92). En este mismo orden de ideas, la investigación que pretende realizar un análisis de la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes de séptimo grado de Happy Summer School cumple con las características antes mencionadas sobre la investigación de tipo descriptivo.

Con relación a lo anterior, el estudio es interpretativo ya que intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen (Hernández, et al., 2014:9). En vista de que el estudio pretende analizar la comprensión del concepto de fracción de los estudiantes mediante la interpretación de modelos visuales. En este sentido, se aspira a encontrar sentido a las producciones que los estudiantes otorguen a través del análisis de cada una de las sesiones de trabajo diseñadas para este propósito.

3.3 Tipo de diseño

El diseño es fenomenológico ya que se busca comprender el concepto que los estudiantes tienen de un determinado fenómeno matemático, dicho diseño está enmarcado dentro del enfoque cualitativo de la investigación. Según Hernández et al. (2014:493) el propósito de los diseños fenomenológicos es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias. Por lo tanto, la investigación se llevó a cabo en el aula de clases de los estudiantes de séptimo grado en su respectivo horario de clases. Posteriormente, se aplicaron los instrumentos de recolección de datos, los cuales fueron analizados mediante la implementación de una rúbrica de evaluación.

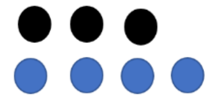
Lo anterior mencionado, va de acorde a los objetivos de la investigación y a las categorías de análisis planteadas.

3.4 Categorías de análisis

A continuación, se presentan las categorías de análisis consideradas en este estudio que encuentra bajo el paradigma cualitativo. Las categorías de análisis son la comprensión del concepto de fracción, modelos visuales y las representaciones semióticas.

Tabla 3.1
Matriz de categorías de análisis

Categorías de análisis	Definición conceptual	Definición operacional	Indicadores	Ítems para evaluar los indicadores
Comprensión del concepto de fracción.	Comprender el concepto de fracción es manejar los diferentes significados que estas tienen. (Kieren, 1976)	Para el estudio, se abordan las fracciones desde los diferentes significados como ser: La fracción como parte-todo, medida, operador, cociente y razón, mediante la interpretación de los modelos de área, longitud y conjunto.	Al expresar una fracción $\frac{a}{b}$ los estudiantes pueden comprender el concepto que tiene la fracción en un modelo visual.	La mesada de Vivian es de 500 lempiras. Si ha gastado $\frac{1}{4}$ de esa cantidad en la cafetería. Represente esa cantidad en un modelo de área.

Modelos visuales.	Estos modelos ofrecen a los estudiantes representaciones concretas de ideas abstractas y apoyan el uso significativo de la representación de los estudiantes para resolver problemas. (NTCM, 2000)	Los estudiantes representan e interpretan las fracciones con diferentes modelos visuales como ser: El modelo de área, longitud y conjunto.	Identificar y representar fracciones en modelos de área. Interpretar las fracciones y representarlas en una recta numérica. Lectura y representación de una fracción desde un modelo de conjunto.	 ¿Cuál es la relación numérica entre las bolas negras y azules? Argumente su respuesta. Redacte un ejemplo de la vida real de esta situación.
Representaciones semióticas.	Las representaciones pueden ser símbolos y sus asociaciones complejas, las cuales son producciones de acuerdo con las reglas en donde las representaciones semióticas, incluyendo el lenguaje, surgen como herramientas comunes para producir un nuevo conocimiento. (Duval, 2006)	En el presente estudio, se realizan conversiones del lenguaje numérico, pictórico y gráfico. Como también su tratamiento en cada uno de los lenguajes mencionados.	Los estudiantes realizan una conversión o un tratamiento en cada uno de los significados de las fracciones.	Se presenta un entero. Explique de forma numérica la fracción que representan. 

Fuente: Elaboración propia partir de Kieren (1976), NCTM (2000) y Duval (2006)

3.5 Población y muestra

En este sentido, Hernández et al. (2014:175) define "la muestra como un subgrupo de la población. En otras palabras, es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población".

La presente investigación se realizó con estudiantes entre 12 y 13 años que cursan el séptimo grado en el Instituto Privado Bilingüe Happy Summer School, en la ciudad de Tegucigalpa, Honduras. El centro educativo cuenta con el Primer, Segundo y Tercer Ciclo y con un Bachillerato en Ciencias y Humanidades. La institución tiene una jornada de 7:30 a.m. a 2:30 p.m. y un año lectivo de febrero a noviembre. La institución cuenta con una matrícula de aproximadamente 230 estudiantes. La muestra que se seleccionó es una muestra intencionada, con 18 estudiantes de séptimo grado, sección única, de la clase de matemática del primer parcial del año lectivo 2019. Es importante mencionar que los 18 estudiantes fueron formados en grupos de estudio aleatorio de 3 integrantes cada uno para las 6 sesiones de trabajo.

Como una fuente de información secundaria se utilizó bibliografía de investigaciones que se han realizado en países de América Latina, Estados Unidos y Canadá, donde se han encontrado problemas similares con las fracciones y se han abordado desde diferentes puntos de vista. Para la investigación se consultaron revistas indexadas, tesis y libros proporcionados de manera gratuita en repositorios universitarios virtuales tanto del ámbito nacional como internacional.

A continuación, se detallan las fuentes de información secundaria consultadas para la obtención de información del presente trabajo investigativo. Respecto a la revisión de tesis, revistas, y libros digitales se consultaron los siguientes repositorios: Redalyc, Scielo, Dialnet, EBSCOHOST, Google Scholar y ResearchGate. Así mismo, se hizo la revisión de páginas nacionales como ser: La Secretaría de Educación de Honduras, el repositorio de la UPNFM, entre otras.

La investigación se llevó a cabo dentro de las horas laborales que las autoridades de la Institución me han asignado como parte de mi carga académica como docente de planta y a la vez han avalado la realización del presente trabajo de investigación para beneficio de los estudiantes y futuros docentes del centro educativo.

3.6 Estrategias de recolección de datos

Para la recolección de los datos, se empleó **la técnica de grupos focales** la cual según Kitzinger (1995:299) "es una forma de entrevista grupal que utiliza la comunicación entre investigador y participantes, con el propósito de obtener información". Por medio de esta técnica, se logró hacer una discusión sobre las fracciones y sus experiencias previas con los modelos de representación, lo cual condujo a una intervención didáctica sobre este objeto matemático, sus significados y los diferentes modelos de representación visual.

Seguidamente, se efectuó una **observación de campo**, en donde se observó las deficiencias que poseen los estudiantes del séptimo grado en el tópico fracciones, se aplicó una prueba diagnóstica a los estudiantes en la cual se consideran los temas propuestos por DCNB en los grados previos. Posteriormente, se aplicaron seis sesiones de trabajo y una prueba final que incluían los diferentes modelos visuales para la representación de las fracciones.

Los instrumentos fueron **validados por juicio de expertos**, por lo cual Corral (2009:231) enfatiza que "la validez de contenido no se evalúa cuantitativamente es más bien una cuestión de juicio". En este sentido, se diseñó una plantilla en la que el docente argumentaba si los ítems eran pertinentes o se debían mejorar (ver anexos 11 y 12). El proceso de validación se realizó por docentes con una amplia experiencia en el área de la enseñanza de las matemáticas y docentes de universidades del extranjero. Los docentes participantes en la validación de los instrumentos fueron: Ph.D. Yaneth Ríos García de la Universidad de Zulia, Venezuela, Ph.D. Marvin Roberto Mendoza Valencia de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras y Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras, y el M.Sc. José Ramón Flores Triminio del Instituto Hondureño de Educación por Radio y el Instituto Gustavo Adolfo Alvarado, Tegucigalpa, Honduras.

La prueba diagnóstica, las sesiones de trabajo y la prueba final fueron aplicados durante los meses de marzo y abril durante la hora clase. En dichas sesiones de trabajo se empezaba con la realización de los cuestionarios, donde los estudiantes tenían ítems relacionados con las conversiones y los tratamientos entre los diferentes modelos empleados en el estudio y los diferentes significados de las fracciones.

La tarea del profesor, durante la aplicación de las sesiones consistió en asegurarse de que todos los estudiantes participaran de manera activa en cada una de las sesiones, implementaran los modelos sugeridos de acuerdo con la sesión, e interferir en el momento pertinente para la clarificación, reflexión y comprensión de los problemas presentes. En ese mismo sentido, el profesor tomó fotografías y realizó observaciones durante todo el proceso.

A continuación, se presenta cada uno de los instrumentos aplicados, su descripción y objetivos a alcanzar.

3.7 Diagnóstico y sesiones de trabajo

En esta sección se presentan los instrumentos utilizados para llevar a cabo la investigación, la descripción de cada ítem, los objetivos, la descripción por ítem de cada una de las sesiones de trabajo.

3.7.1 Prueba diagnóstica

3.7.1.1 Objetivo general

Explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes vinculados al concepto de fracción.

3.7.1.2 Descripción general

La prueba diagnóstica consiste en 8 ítems que están enfocados en la exploración del concepto de fracción, que los estudiantes de séptimo grado tienen. El ítem 1) explora el conocimiento previo de los estudiantes. Los ítems 2) y 3) están enfocados en la interpretación parte-todo de la fracción y la congruencia que tiene que existir entre sus partes divididas. En el ítem 4) el estudiante realiza una conversión del lenguaje numérico al pictórico. El ítem 5) se enfoca en la interpretación parte-todo con cierta dificultad en identificar el numerador. Los ítems 6) y 7) son problemas del contexto del estudiante, que necesitan pasar de un registro numérico al pictórico y el ítem 8) requiere que se haga una conversión del lenguaje numérico al gráfico (Ver anexo 1).

3.7.1.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.2
Objetivo y descripción de los ítems de la prueba diagnóstica

Prueba diagnóstica	Objetivos	*Descripción*
Ítem # 1	Explorar la concepción de fracción mediante la explicación del estudiante y su representación.	Se realiza una pregunta directa sobre la noción de la fracción $\frac{a}{b}$ y se le pide al estudiante que explique con sus palabras, luego que realice una representación mediante el uso de una figura de lo que entiende por fracción.

Ítem # 2	Clasificar diversas figuras que están divididas en cuartos.	Se presentan 5 figuras, de la cuales los estudiantes tendrán que clasificarlas, considerando que algunas están correctamente divididas en cuartos y otras no.
Ítem # 3	Aplicar el concepto de fracción a un problema del contexto del estudiante.	El problema presenta la fracción $\frac{3}{5}$ y se proporciona un rectángulo que es el patio de la casa del estudiante. Él tendrá que hacer la limpieza de este. Hasta el momento solo tiene los $\frac{3}{5}$ del total terminado. El estudiante tendrá que colorear como está el patio hasta el momento. Luego tendrá que argumentar su respuesta.
Ítem # 4	Representar una fracción impropia del lenguaje numérico al lenguaje pictórico.	Se presenta la fracción $\frac{5}{3}$ en la cual se tiene que hacer una conversión del lenguaje numérico al pictórico.
Ítem # 5	Identificar, dada una figura la parte del todo.	El problema presenta una figura con 16 cuadrados congruentes, de los cuales hay 4 que están sombreados del total. El ítem consiste en extraer la parte que esta sombreada del total de los cuadrados.

Ítem # 6	Explorar la interpretación de la fracción como cociente.	Se proporciona un problema del contexto del estudiante, en el cual se presentan 7 baleadas y se tienen que repartir de manera equitativa entre cuatro niños.
Ítem # 7	Interpretar la fracción como operador en un problema del contexto.	Se presenta un problema donde el estudiante tendrá que realizar una multiplicación y división de la cantidad dada.
Ítem # 8	Representar una fracción del lenguaje numérico al gráfico mediante un modelo de longitud.	El problema consiste en una fracción propia que el estudiante tiene que graficar en la recta y explicar porque marcó ese punto.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.2 Sesión de trabajo # 1

3.7.2.1 Objetivo general

Expresar una fracción del lenguaje pictórico al numérico implementando el modelo de área.

3.7.2.2 Descripción general

La sesión de trabajo # 1 consiste en 5 ítems que están enfocados en la comprensión del concepto de fracción aplicando diferentes modelos visuales de área. El estudiante realizará una conversión del registro pictórico al numérico (Ver anexo 2).

3.7.2.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.3
Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 1

Sesión de trabajo # 1	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Identificar la fracción parte-todo representada.	El problema consiste en un modelo de área rectangular que está dividido en 6 rectángulos congruentes y dos de ellos están sombreados. El estudiante tiene que identificar la parte y el todo.
Ítem # 2	Expresar una fracción del lenguaje pictórico al numérico a través de un geoplano.	El ejercicio presenta un geoplano que está dividido en cuatro partes congruentes y una de ellas está sombreada. El estudiante tiene que realizar una conversión y dar su argumento.
Ítem # 3	Identificar fracciones equivalentes a través de un modelo de área.	El problema consiste en un rectángulo que está dividido en 5 partes congruentes y 3 de ellas están sombreadas. El estudiante tiene la tarea de dividir la figura en 15 partes iguales y decir que fracción tiene ahora, luego comparar la primera fracción con la segunda.

Ítem # 4	Comparar entre dos fracciones mediante el tratamiento de un modelo visual.	Se presenta una figura en forma de hexágono que está dividida en 6 partes iguales. El estudiante tiene la tarea de pintar dos regiones y decir que fracción tiene. Luego, el estudiante tiene que dividir la figura en 12 partes iguales y colorear un triángulo más. Se tiene que comparar la primera fracción con la segunda.
Ítem # 5	Identificar una fracción impropia en un modelo visual de área.	El ejercicio consiste en dos rectángulos divididos en 6 partes iguales de los cuales 8 están pintados. El estudiante tiene que llegar al concepto de fracción impropia mediante el modelo de área.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.3 Sesión de trabajo # 2

3.7.3 .1 Objetivo general

Representar una fracción de un registro numérico a un registro pictórico a través del modelo visual de área.

3.7.3.2 Descripción general

Esta sesión de trabajo contiene 4 ítems que están orientados a la comprensión del concepto de fracción por medio de la implementación del modelo visual de área. Los ítems están orientados a realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico (Ver anexo 3).

3.7.3.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.4

Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 2

Sesión de trabajo # 2	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Comprender el concepto de fracción equivalente al realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico.	El problema consiste en realizar una comparación de dos fracciones mediante un modelo de área. El estudiante realizará una comparación entre ambos dibujos.
Ítem # 2	Comparar fracciones mediante el modelo de área.	El ejercicio consta de dos fracciones que el estudiante tiene que representar en uno o dos modelos de área y decir que fracción es mayor.
Ítem # 3	Determinar mediante un modelo de área una fracción desconocida al realizar un tratamiento en un registro pictórico.	El problema trata de un rectángulo donde hay dos fracciones que representan el área cultivada. El estudiante tiene que deducir al realizar un tratamiento la fracción que representa el repollo cultivado.
Ítem # 4	Interpretar la fracción como operador.	Se presenta un problema del contexto del estudiante. El estudiante tendrá que representar el comportamiento de la fracción en un modelo de área.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.4 Sesión de trabajo # 3

3.7.4 .1 Objetivo general

Realizar una conversión de una fracción en un registro pictórico al lenguaje numérico mediante la implementación del modelo de longitud.

3.7.4.2 Descripción general

Se presentan 4 ítems que están relacionados con el modelo de longitud. El estudiante tiene que pasar del lenguaje pictórico al lenguaje numérico (Ver anexo 4).

3.7.4.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.5
Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 3

Sesión de trabajo # 3	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Convertir una fracción del lenguaje pictórico al numérico.	El problema consiste en un modelo de longitud que tiene 5 cubos de los cuales 1 está sombreado. El estudiante tiene que argumentar cuanto representa la parte sombreada del total.
Ítem # 2	Identificar una fracción señalada en un modelo de longitud.	El modelo de longitud utilizado es una regla. El problema consiste en identificar la fracción señalada a partir de la visualización.

Ítem # 3	Interpretar mediante un modelo de longitud la representación de una fracción impropia.	El problema consiste en dos rectángulos divididos en 3 partes iguales que representan la unidad. Las partes sombreadas del rectángulo son 5. El estudiante tiene que identificar una fracción impropia al realizar una conversión de un registro figural al numérico.
Ítem # 4	Identificar una fracción impropia mediante el uso del modelo de longitud.	El ejercicio consiste en el reconocimiento de una fracción impropia a partir del lenguaje pictórico al numérico.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.5 Sesión de trabajo # 4

3.7.5.1 Objetivo general

Representar una fracción del lenguaje numérico al lenguaje pictórico y gráfico mediante la aplicación del modelo de longitud.

3.7.5.2 Descripción general

Esta sesión de trabajo presenta 4 ítems que están orientados a la conversión del objeto matemático fracción mediante la interpretación del modelo visual de longitud. El estudiante tendrá que realizar una conversión de un lenguaje numérico al pictórico o del numérico al gráfico, así mismo realizar ejercicios que involucren la comparación e igualdad de dos fracciones (Ver anexo 5).

3.7.5.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.6
Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 4

Sesión de trabajo # 4	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Representar una fracción en la recta numérica.	El problema presenta una fracción que el estudiante tiene que convertir del lenguaje numérico al lenguaje gráfico.
Ítem # 2	Comparar dos fracciones mediante el empleo del modelo de longitud.	Se presenta un ejercicio que contiene dos fracciones propias que el estudiante tiene que graficar en un modelo de longitud, luego realizará una comparación entre ambas fracciones.
Ítem # 3	Construir una fracción equivalente mediante la aplicación del modelo visual de longitud.	El problema presenta una fracción que el estudiante tiene que representar en un modelo visual de longitud y luego construir otro modelo con una fracción equivalente a la dada.
Ítem # 4	Interpretar el concepto de fracción como operador mediante el uso del modelo de longitud.	Se presenta un problema del contexto del estudiante, el cual tiene que ser representado en un modelo de longitud. El estudiante tiene que realizar un tratamiento dentro del mismo registro hasta llegar a lo solicitado en el problema.

Ítem # 5	Interpretar el concepto de fracción como razón en un modelo de longitud.	El problema presenta la razón de dos cantidades. El estudiante tiene que representar su argumento en un modelo visual de longitud.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.6 Sesión de trabajo # 5

3.7.6.1 Objetivo general

Convertir una fracción del lenguaje pictórico al lenguaje numérico mediante la implementación del modelo visual de conjunto.

3.7.6.2 Descripción general

Esta sesión de trabajo contiene 4 ítems que están relacionados con el modelo de conjunto. Los estudiantes tienen que interpretar las fracciones presentadas y realizar una conversión del lenguaje pictórico al numérico (Ver anexo 6).

3.7.6.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.7

Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 5

Sesión de trabajo # 5	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Identificar la parte del todo mediante la implementación de un modelo de conjunto.	Se presenta un modelo de conjunto con 12 círculos que representan el todo, de los cuales tres son de color naranja. Los estudiantes tienen que identificar la fracción representada.

Ítem # 2	Identificar la fracción como razón mediante el modelo de conjunto.	Se presenta un conjunto de 7 objetos. El estudiante tiene que identificar la relación existente mediante una fracción. Luego, redactar un ejemplo con sus palabras de la aplicación de esta fracción.
Ítem # 3	Identificar una fracción impropia y equivalente en un modelo de conjunto.	El problema consiste en 7 elementos, de los cuales 4 son amarillos y 3 son azules. El estudiante tiene que identificar la fracción impropia y luego dibujar un nuevo conjunto para formar una fracción equivalente.
Ítem # 4	Identificar una fracción propia en un modelo de conjunto.	El ejercicio contiene 12 mariposas, de las cuales 6 son de color naranja y 6 blancas. El estudiante tiene que identificar la parte del todo y realizar un tratamiento al reordenar el conjunto e identificar una fracción equivalente.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.7 Sesión de trabajo # 6

3.7.7.1 Objetivo general

Convertir una fracción del lenguaje numérico al pictórico mediante la implementación del modelo de conjunto.

3.7.7.2 Descripción general

La presente sesión de trabajo contiene 4 ítems que están orientados a la conversión e interpretación del concepto de fracción mediante la implementación del modelo de conjunto (Ver anexo 7).

3.7.7.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.8
Objetivo y descripción de los ítems de la sesión de trabajo # 6

Sesión de trabajo # 6	Objetivos	*Descripción*
Ítem # 1	Comparar dos fracciones con interpretación de razón cada una, mediante el modelo de conjunto.	El ejercicio presenta dos marcadores que pueden ser escritos como una razón. El estudiante tiene que realizar una comparación de ambas fracciones al usar un modelo de conjunto. Luego el estudiante explicará su argumento.
Ítem # 2	Identificar fracciones equivalentes utilizando un modelo de conjunto.	El problema presenta dos fracciones, una equivalente de la otra. El estudiante tiene la tarea de representar las fracciones en diferentes modelos de conjunto y luego hacer sus observaciones de los resultados visuales.
Ítem # 3	Representar una fracción impropia en un modelo de conjunto.	Se plantea una fracción impropia. El estudiante tiene que representar la fracción en un modelo de conjunto de su propia construcción. Luego, el estudiante explicará sus observaciones.

Ítem # 4	Representar una fracción impropia en un modelo de conjunto dado.	El ítem consiste en una fracción impropia que el estudiante tiene que representar en el modelo y luego dar un argumento.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

3.7.8 Prueba final

3.7.8.1 Objetivo general

Analizar el concepto de fracción que adquieren los estudiantes al implementar diversos modelos visuales y las diferentes interpretaciones de las fracciones.

3.7.8.2 Descripción general

La prueba final consiste en dos partes, la primera consiste en representar las fracciones dadas en cada uno de los modelos visuales de área, longitud y conjunto. La segunda en representar las fracciones del lenguaje numérico al figural, considerando las diferentes interpretaciones de las fracciones para comprender su concepto (Ver anexo 8).

3.7.8.3 Objetivo y descripción por ítem:

Tabla 3.9
Objetivo y descripción de los ítems de la prueba final

Prueba final	**Objetivos**	***Descripción***
Ítem # 1	Representar una fracción en un modelo de área.	El problema presenta una fracción y un modelo visual de área. El estudiante tiene que representar en la figura la fracción dada.

Ítem # 2	Representar una fracción en un modelo de conjunto.	El ejercicio consiste en una fracción y un modelo de conjunto. En el problema, el estudiante tiene que representar la fracción dada.
Ítem # 3	Representar una fracción en un modelo de longitud.	El problema presenta una fracción y un modelo de longitud. El estudiante tiene que representar la fracción proporcionada en el modelo de longitud.
Ítem # 4	Convertir del lenguaje numérico al pictórico o gráfico el subconstructo parte-todo de una fracción.	El ejercicio presenta una fracción parte- todo que el estudiante tiene que representar en un modelo visual de su elección.
Ítem # 5	Convertir del lenguaje numérico al pictórico el subconstructo medida de una fracción.	El problema presenta una fracción que es una medida de longitud. El estudiante elegirá el modelo más pertinente para su representación visual.
Ítem # 6	Convertir el subconstructo operador de una fracción, pasando del lenguaje numérico al pictórico.	El ítem consiste en un problema del contexto del estudiante. Se seleccionará un modelo para su representación visual.
Ítem # 7	Convertir del lenguaje numérico al figural el subconstructo cociente de una fracción.	El problema trata de 3 paletas que serán repartidas de manera equitativa entre 5 niños. El estudiante representará esta situación en un modelo visual de su selección.

Ítem # 8	Convertir del lenguaje numérico al figural el subconstructo razón de una fracción.	Se presenta un problema que contiene la interpretación de la fracción como razón, el estudiante empleará un modelo visual para su representación.

Fuente: Elaboración propia a partir de validación por juicio de expertos

En el actual capítulo, se ha tratado de la metodología empleada en la investigación cuyo enfoque está bajo el paradigma cualitativo. Se aplicó una investigación de tipo descriptivo ya que se buscó especificar las propiedades y características de un grupo de estudiantes. El diseño es fenomenológico ya que se busca comprender un concepto por medio de los modelos visuales. Luego, se presentan las categorías de análisis que son: la comprensión del concepto de fracción, los modelos visuales y las representaciones semióticas. Posteriormente, se especifica la población y la muestra tomada, la estrategia de recolección de datos, los instrumentos utilizados con la descripción y objetivos por cada uno de los ítems.

Capítulo 4

Resultados y Análisis de datos

4.1 Resultados y análisis de la prueba diagnóstica

4.2 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 1

4.3 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 2

4.4 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 3

4.5 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 4

4.6 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 5

4.7 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 6

4.8 Resultados y producciones de la prueba final

4.9 Síntesis de resultados

Capítulo 4

Resultados y Análisis de datos

En el análisis de los datos recolectados del presente trabajo de investigación, que se enfoca en el paradigma cualitativo, se realizó una revisión minuciosa de los instrumentos de recolección de datos aplicados a los estudiantes del Tercer Ciclo, séptimo grado. De los cuales se analizaron, las observaciones realizadas durante la aplicación de la prueba diagnóstica, las seis sesiones de trabajo y la prueba final.

Seguidamente de la aplicación de los instrumentos, se registró cada uno de los ítems de la prueba diagnóstica en tablas (ver anexos), de acuerdo con la rúbrica de evaluación que tenía diversos criterios para su evaluación. En ese mismo sentido, se aplicaron y registraron las seis sesiones de trabajo para su posterior análisis. La prueba diagnóstica fue aplicada de manera individual con el propósito de revisar los conocimientos previos que los estudiantes tenían del nivel anterior sobre el concepto de fracción. Las sesiones de trabajo fueron aplicadas de manera grupal, los 18 estudiantes fueron agrupados en 6 grupos de 3 integrantes cada uno para una mejor recolección de los datos. Se realizó un gráfico de cada uno de los ítems de la prueba diagnóstica, las sesiones de trabajo y de la prueba final.

4.1 Resultados y análisis de la prueba diagnóstica

En el ítem # 1, el cual es una exploración del concepto de fracción que el estudiante debería tener según el DCNB de los cursos previos, consiste en preguntar al estudiante sobre el uso de las fracciones y realizar una representación visual de la misma. Se observa que el 72% de los estudiantes respondió de manera adecuada, de acuerdo con la rúbrica de evaluación, sobre el concepto de fracción empleando, según la teoría de las representaciones semióticas propuesta por Duval (2006), una conversión de un registro pictórico a un registro numérico. Además, se observa que los estudiantes tienen la idea de que una fracción también puede significar una división, según Kieren (1976) para comprender una fracción se tienen que entender cada uno de sus significados.

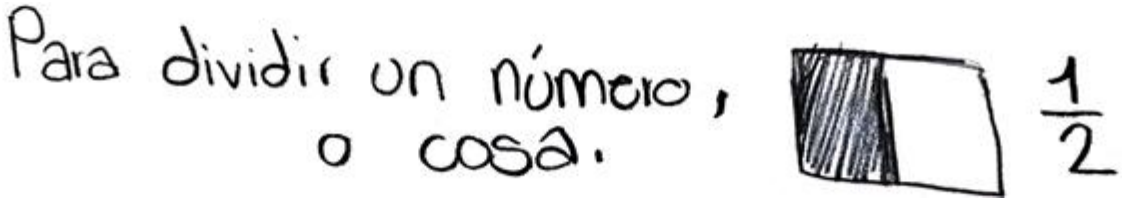


Figura 4.1 Desarrollo adecuado del significado parte-todo del concepto de fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En la siguiente figura se puede observar que el 28% de los estudiantes respondió de manera inadecuada sobre el empleo de las fracciones y obtuvo errores en su representación visual. En la figura se evidencia un error en la conversión del registro pictórico al numérico que según Radatz (1980:16) se debe a un aprendizaje deficiente de los conceptos. Por otra parte, se evidencia que los estudiantes tienen un esquema mental del concepto de fracción de los cursos previos y puede llegar a construir su conocimiento si es sometido a actividades externas o internas para su desarrollo (Carretero, 2005).

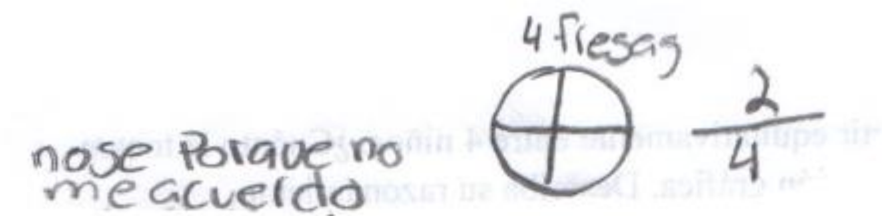


Figura 4.2 Error en la representación del concepto de fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En el ítem # 2 consiste en clasificar las figuras dadas según estén correcta o incorrectamente divididas en cuartos. Entre los hallazgos encontrados que se pueden resaltar que el 44% de los estudiantes comprendía el subconstructo parte todo de la fracción y argumentaban sus respuestas. El 17% de los estudiantes alcanzó esta categoría parcialmente adecuada, en el que se pueden observar que comprenden el concepto de denominador, pero no logran argumentar dicha clasificación. El 39% respondió de manera inadecuada resaltando un error reincidente en el inciso c); cuya figura fue clasificada como correctamente dividida en cuartos. En este mismo sentido, Neagoy (2016) enfatiza que este es un error común en los estudiantes sobre la división con diferente área.

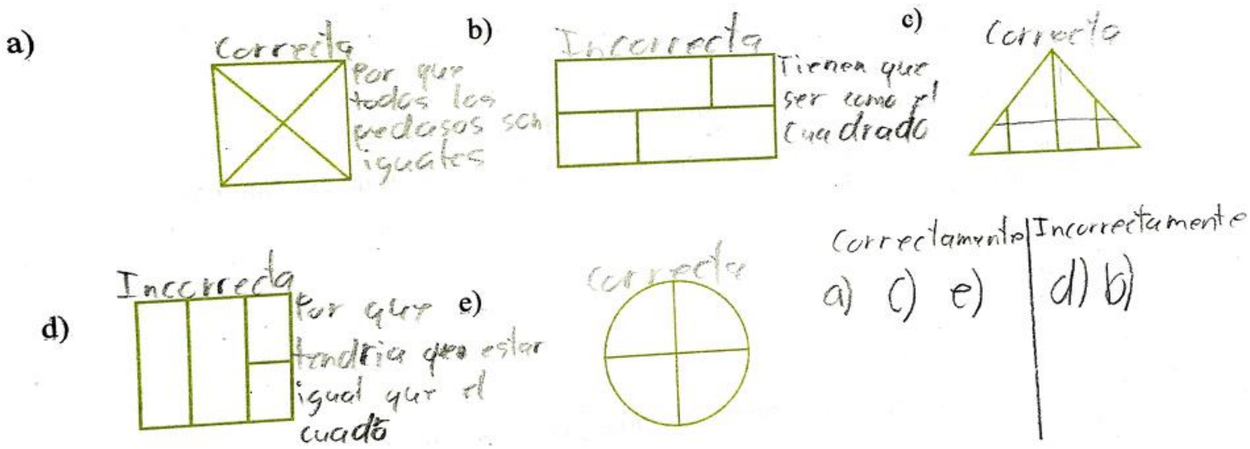


***Figura 4.*3** Error en el concepto de denominador en un triángulo
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En el ítem # 3 se puede observar que el 17% de los estudiantes hizo la correcta aplicación del concepto de fracción a un problema del contexto del estudiante. El 28 % contestó parcialmente adecuado al representar la fracción correctamente, pero no pudo argumentar su respuesta. El 55% de los estudiantes no pudo hacer la correcta representación de la fracción $\frac{3}{5}$, encontrando errores en el concepto de denominador

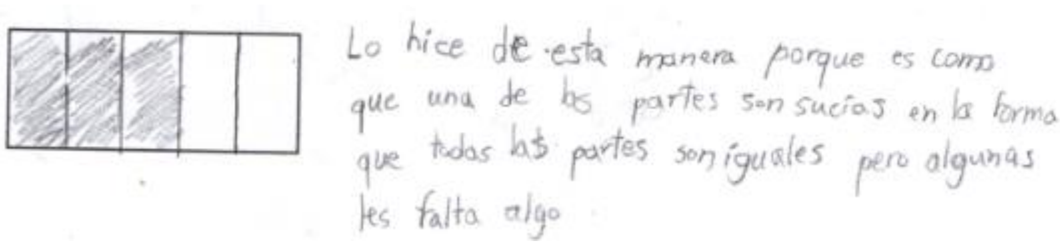


Figura 4.4 Correcta representación de la fracción $\frac{3}{5}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

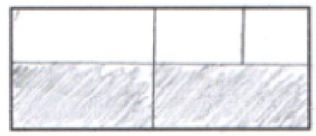


Figura 4.5 Error en la división de las partes
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En el ítem # 4 cuyo objetivo es representar una fracción impropia del lenguaje numérico al pictórico (Duval, 2006), se observa que de acuerdo con la rúbrica de evaluación el 22% respondió de manera adecuada y el 78% respondió de manera inadecuada, resaltando hallazgos como: errores en el concepto de fracción impropia; errores en la representación visual de una fracción impropia.

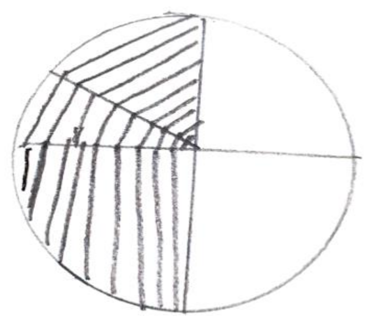


Figura 4.6 Error en la comprensión y representación de una fracción impropia
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En el ítem # 5 cuyo objetivo es identificar la parte del todo, se puede observar que el 72% de los estudiantes lograron responder de forma adecuada argumentando la parte y el todo de la figura. El 11% respondió de forma parcialmente adecuada sin argumentar su respuesta. El 17% respondió de forma inadecuada presentando errores en la identificación del numerador y denominador. Se encontraron errores como; $\frac{4}{12}$ o $\frac{16}{4}$ en vez de la fracción $\frac{4}{16}$ o $\frac{1}{4}$.

El ítem # 6 que tiene como propósito explorar la interpretación como cociente que según Kieren (1976) es necesario para la comprensión del concepto de fracción, se observa que el 17% respondió adecuadamente, de acuerdo con la rúbrica de evaluación. El 83% respondió de manera inadecuada presentando un error recurrente del subconstructo cociente de la interpretación del concepto fracción; error en la repartición equitativa del objeto matemático (Neagoy,2016).

Figura 4.7 Error en la comprensión de la interpretación de cociente de la fracción $\frac{7}{4}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

En el ítem # 7 cuyo objetivo es la identificación de la fracción como operador, que según Kieren (1976) es necesario este significado de la fracción para comprender su concepto. Se puede observar que el 11% de los estudiantes contestó de forma parcialmente adecuada. El 89% respondió de manera inadecuada presentando errores recurrentes en la conversión y el tratamiento del problema.

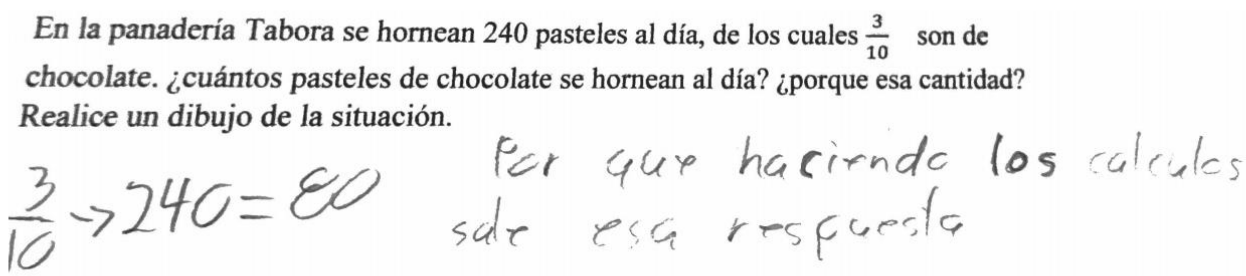


Figura 4.8 Error en el tratamiento del subconstructo operador de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

El ítem # 8 tiene como propósito realizar una representación del lenguaje numérico al lenguaje gráfico, se observa que el 100% de los estudiantes, según la rúbrica respondió de manera inadecuada la tarea. Se encuentra un error recurrente en la ubicación de la fracción en un modelo de longitud. Por otro lado, (Kilpatrick, et al., 1998) mencionan que los errores son una vía para la construcción del conocimiento. Por lo tanto, este error es una oportunidad de crear una sesión involucrando el modelo de longitud.

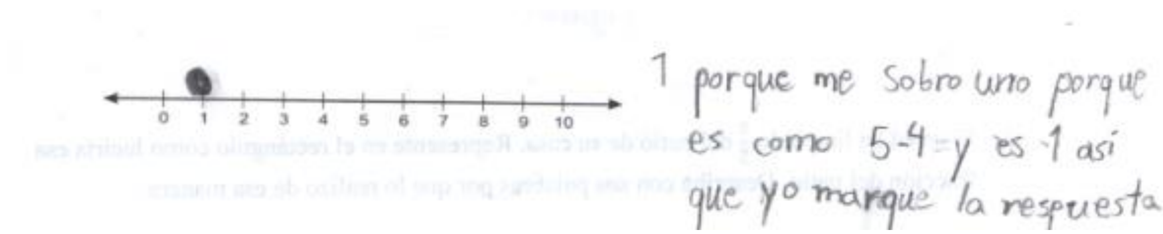


Figura 4.9 Error donde la fracción $\frac{4}{5}$ es interpretada como una resta
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

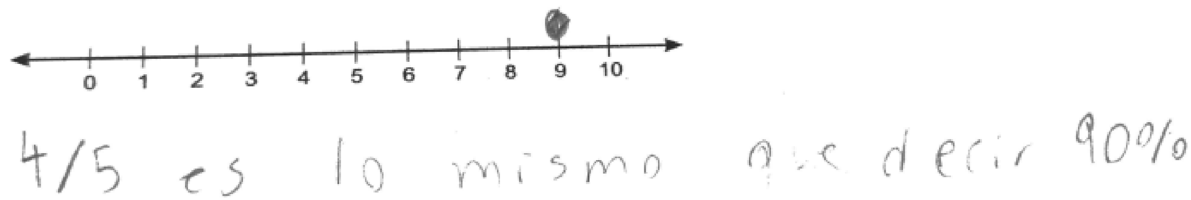


Figura 4.10 Error en la conversión y tratamiento de la fracción $\frac{4}{5}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

4.1.1 Resumen de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica

A continuación, se presenta un gráfico, el nivel de comprensión alcanzado y un resumen de los resultados de la prueba diagnóstica.

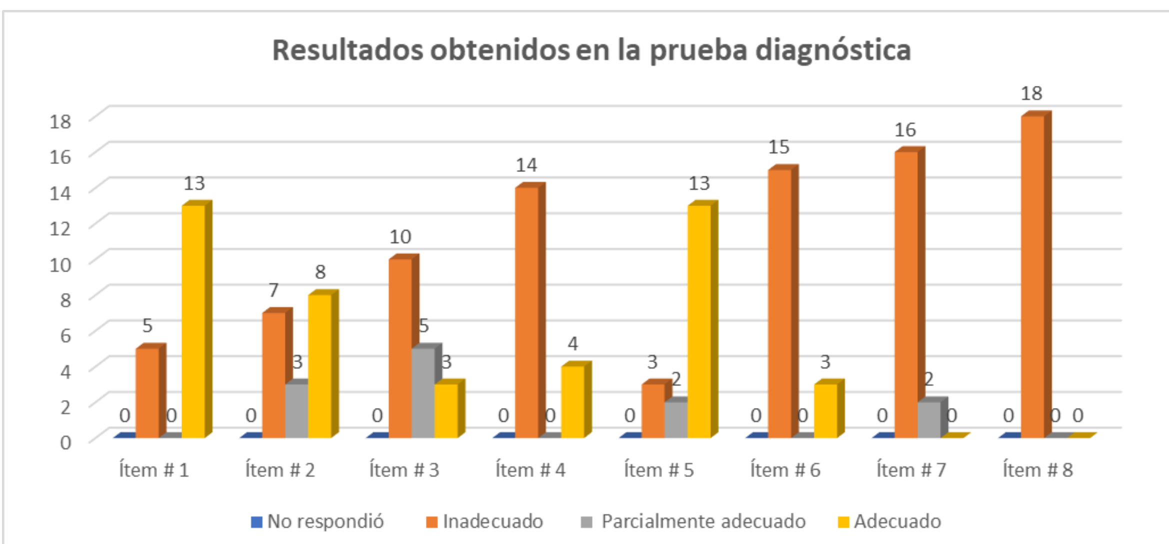
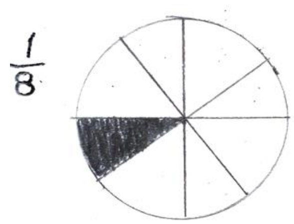


Figura 4.11 Resultados obtenidos en la prueba diagnóstica
Fuente: Elaboración propia con base a resultados obtenidos en la prueba diagnóstica

Tabla 4.1
Nivel de comprensión matemática de la prueba diagnóstica

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 2		El 72% de los estudiantes está en el nivel de la creación de la imagen. Se observa que este porcentaje de estudiantes asoció las fracciones con los esquemas mentales y crearon una conexión entre el referente y el símbolo (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

Con respecto a la prueba diagnóstica, se evidencia que en relación con el significado parte todo de cantidades continuas, gran parte de los estudiantes lograron realizar una correcta conversión del ítem 1. Sin embargo, se observa que cuando se les proporciona un registro del lenguaje pictórico al numérico tiene ciertas debilidades al clasificar las figuras que no están correctamente divididas, como es en el caso del ítem 2 y 3. En el ítem 4 se puede evidenciar que hay dificultades en el concepto de la fracción impropia, al realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico. En el ítem 5 se puede observar que la mayoría de los estudiantes lograron identificar la parte del todo, en especial cuando el numerador no tiene un orden. Se evidenció en el ítem 6 y 7 que la mayoría de los estudiantes tiene dificultades al interpretar el significado de cociente y operador de una fracción. Finalmente, se evidencia que el 100% de los estudiantes no logró realizar una conversión del lenguaje numérico al gráfico por medio del modelo de longitud. Por todo lo anterior, se observa que el 72% de los estudiantes se encuentra en un nivel 2 del modelo de la comprensión matemática propuesto por Pirie y Kieren.

A continuación, se presentan los resultados y el análisis de cada una de las seis sesiones realizas en grupos de trabajo.

4.2 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 1

En la presente sesión de trabajo se presentaron 5 problemas relacionados con la conversión del lenguaje pictórico al numérico en los cuales se implementó el modelo de área en cada uno de los ítems.

4.2.1 Resultados y análisis del ítem # 1

En el ítem # 1 cuyo ejercicio fue resuelto de manera adecuada en conformidad con la rúbrica de evaluación por los grupos 1, 2, 4, 5 y 6 logrando hacer la correcta conversión del lenguaje pictórico en un modelo de área a un lenguaje aritmético, modelo que según Lamon (2012) es necesario para la representación de las fracciones. Ellos realizaron la conversión, aunque no hicieron la simplificación de la fracción, pero argumentaron la respuesta del ítem y lograron cumplir con el objetivo propuesto.

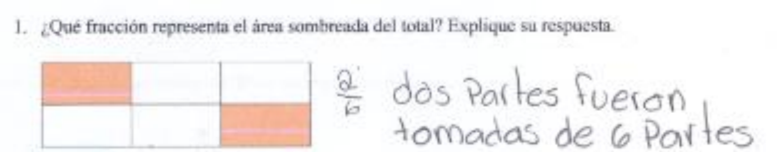


Figura 4.12 Respuesta adecuada del ítem # 1
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

El grupo # 3 logró realizar el ítem de manera parcial, realizaron la correcta conversión con base en la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (2006), pero en la justificación realizaron una comparación entre el numerador y el denominador, siendo el problema propuesto acerca del subconstructo parte todo de la fracción. Según Neagoy (2016), esta dificultad se debe a que los estudiantes ven las fracciones como números.

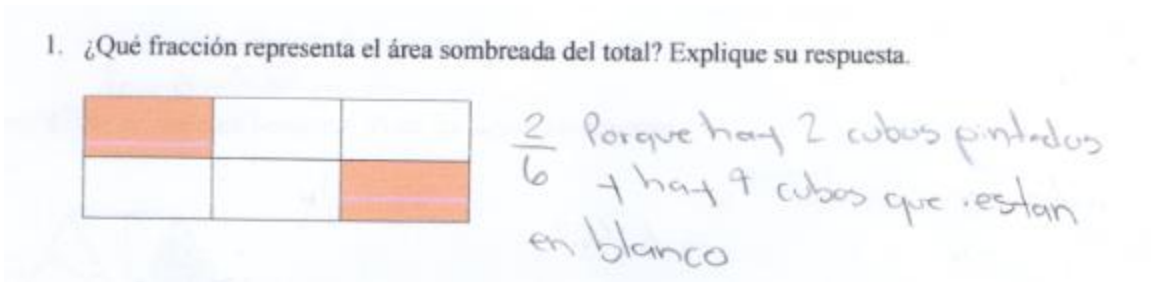


Figura 4.13 Error en la comprensión de la fracción parte todo
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

4.2.2 Resultados y análisis del ítem # 2

En el ítem 2 se presenta un geoplano donde los estudiantes tienen la tarea de realizar una conversión del lenguaje pictórico al aritmético y cuya tarea está centrada en el significado parte todo de la fracción según Kieren (1976), se encontró que los grupos 1, 3, 4, 5 y 6 realizaron la tarea de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica, dejando evidencia de la parte y el todo que el modelo de área representa. Muchos de los estudiantes hicieron énfasis en las partes iguales que existen en la figura, haciendo referencia el concepto denominador de la fracción.

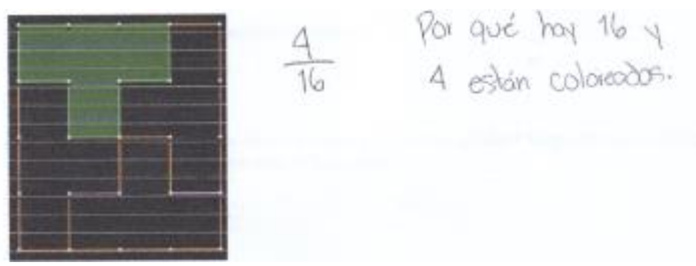


***Figura 4.*14** Desarrollo correcto de la tarea
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

Sin embargo, el grupo 2 presenta un error al interpretar el concepto de denominador de la fracción, mencionando que el modelo de área tiene 12 partes, error que según Lamon (2012) enfatiza que es recurrente en los estudiantes.

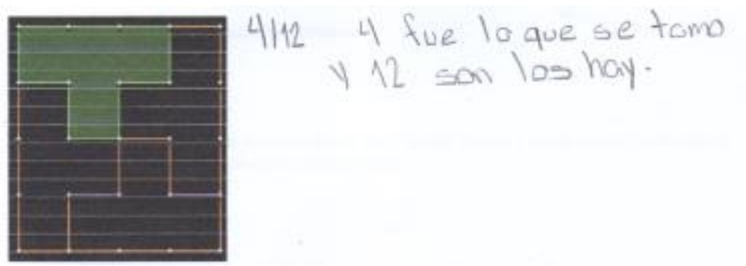


Figura 4.15 Error en la comprensión del concepto de denominador
Fuente: Elaboración propia con base a respuesta de los estudiantes

4.2.3 Resultados y Análisis del ítem # 3

En el ítem tres cuyo propósito es identificar fracciones equivalentes mediante la implementación del modelo de área, se observa que el grupo 3 fue capaz de realizar el correcto tratamiento, que según Duval (2006) es necesario para que se logre la comprensión de un concepto. Se evidencia que, al dividir la figura dada, se implementó la correcta conversión del modelo de área al lenguaje numérico, resaltando que las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$ son equivalentes. El grupo visualmente pudo identificar la equivalencia entre ambas fracciones.

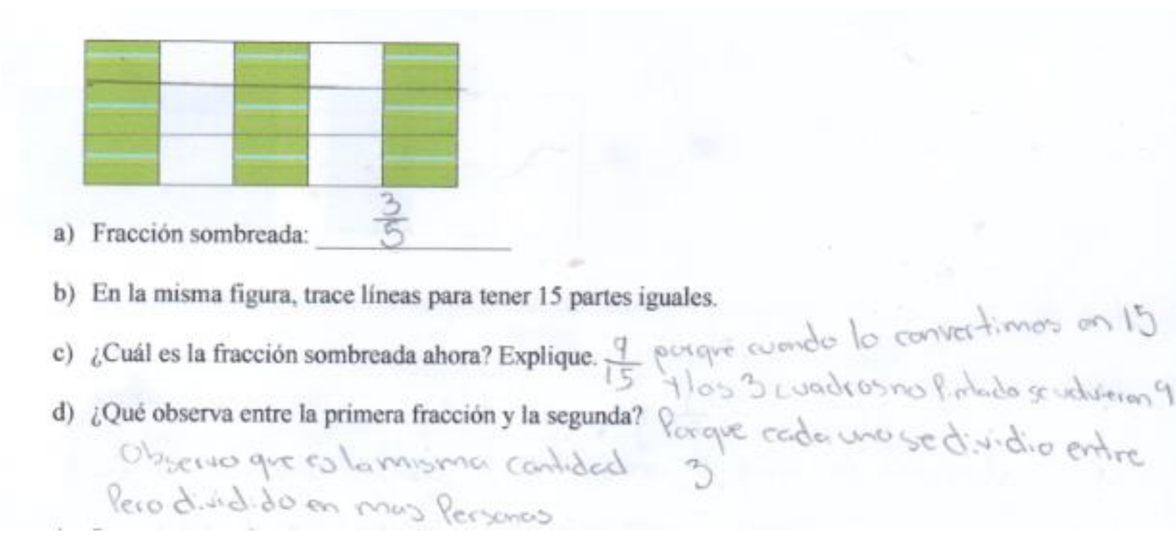


Figura 4.16 Correcta conversión y tratamiento mediante la implementación del modelo visual de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

No obstante, los grupos 1, 2, 4, 5 y 6 respondieron todos los ítems de manera parcialmente adecuado en conformidad con la rúbrica de evaluación, obteniendo dificultades en la argumentación de la conversión y el tratamiento del modelo propuesto. No lograron observar que las fracciones resultantes eran equivalentes. Pero si realizaron la correcta conversión y tratamiento de los incisos propuestos.

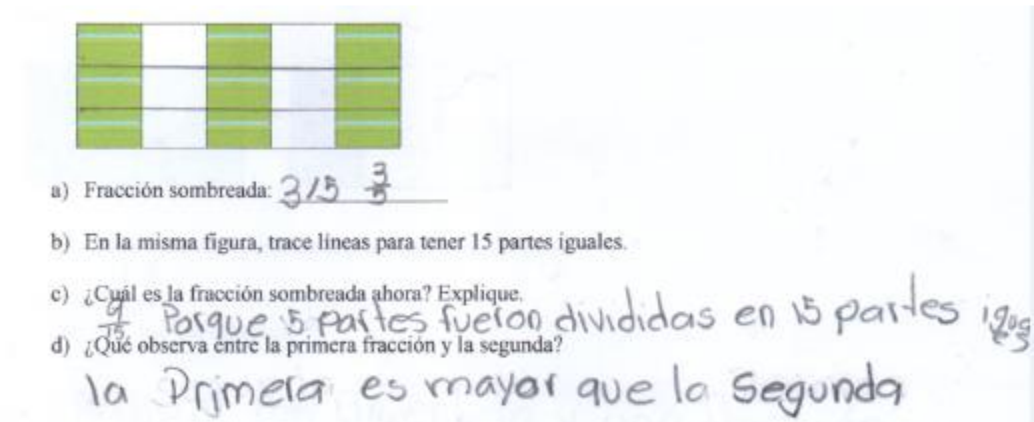


Figura 4.17 Error en la comprensión de la fracción equivalente
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.2.4 Resultados y análisis del ítem # 4

En la tarea número 4 se presenta un hexágono dividido en seis partes iguales. El trabajo de los estudiantes consistía en la realización de tratamientos en la figura, luego hacer una conversión del lenguaje pictórico al numérico, posteriormente comparar las fracciones resultantes. En los hallazgos encontrados se puede evidenciar que el grupo 2 y 6 lograron realizar el tratamiento, la conversión y comparación de las fracciones de manera correcta, presentando que la fracción $\frac{5}{12} > \frac{1}{3}$. Aunque se puede observar que no simplificaron la fracción $\frac{2}{6}$ que es equivalente a $\frac{1}{3}$.

De igual forma, los grupos 1, 3, 4 y 5 realizaron la correcta conversión del inciso a), pero algunos estudiantes manifestaron errores al realizar el tratamiento del inciso b), observando errores como; $\frac{3}{12}$ en lugar de la fracción $\frac{5}{12}$ que corresponde a la conversión del inciso. En ese mismo sentido, se observa que hay un error recurrente en la comparación de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$. El 83% de los estudiantes mencionó que la fracción $\frac{5}{12} < \frac{1}{3}$, lo cual es incorrecto.

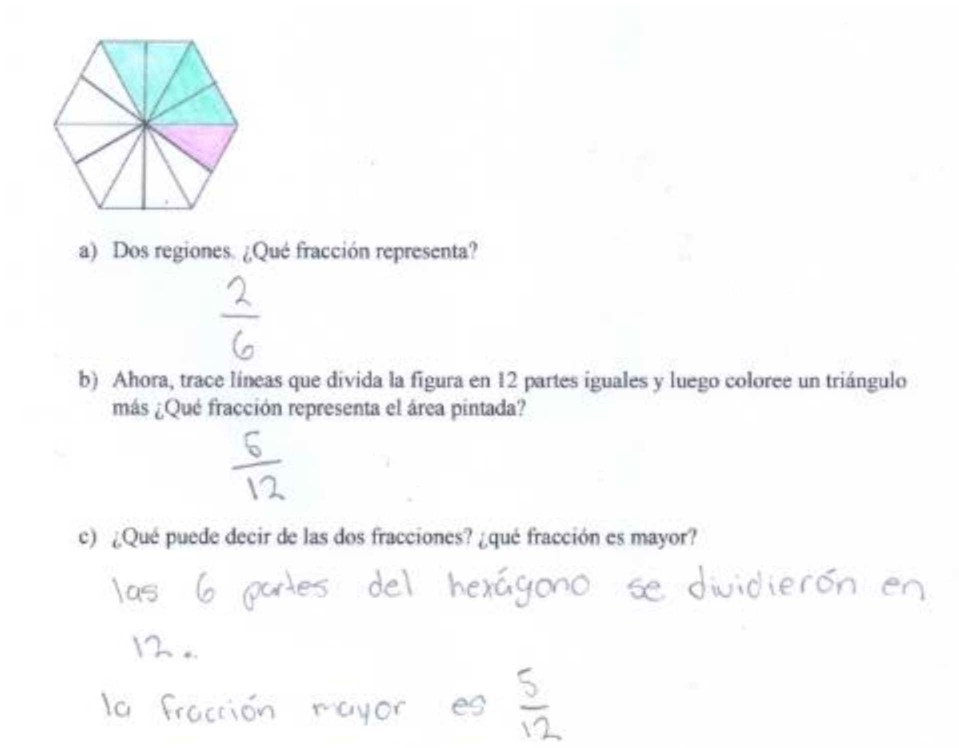


Figura 4.18 Correcto tratamiento y conversión de los estudiantes implementando el modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.2.5 Resultados y análisis y del ítem # 5

En el ítem 5 se presenta un modelo de área propuesto, donde el estudiante tiene la tarea de identificar la fracción impropia presentada en el modelo. Se puede observar que los estudiantes del grupo 1 y 2 lograron realizar el ítem de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica, identificando la fracción impropia $\frac{8}{6}$. Ellos lograron identificar mediante el modelo de área que la fracción era mayor que la por lo tanto se requiere de un modelo mayor a uno.

Sin embargo, los grupos 3, 4, 5 y 6 obtuvieron el ítem de forma inadecuada. Se pueden observar errores como: $\frac{8}{12}$; $\frac{8}{6^2}$; y $2\frac{8}{6}$, en lugar de la fracción $\frac{8}{6}$ o la simplificación de esta que es $\frac{4}{3}$.

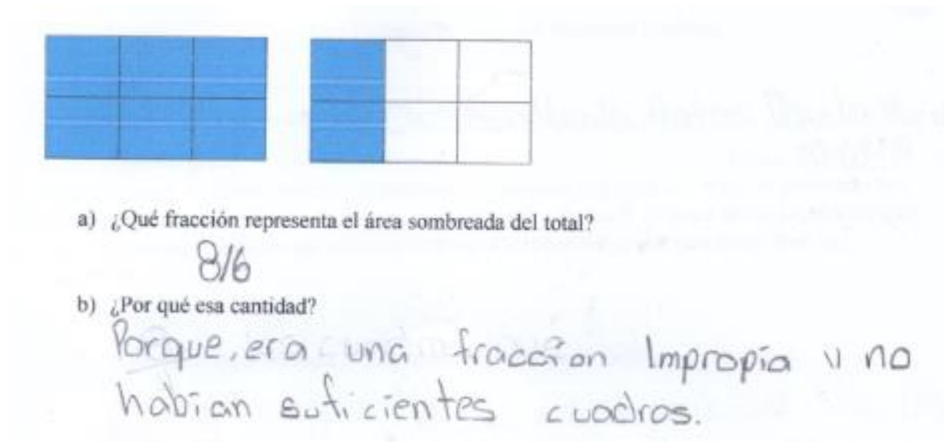


Figura 4.19 Correcta conversión del lenguaje pictórico al numérico mediante la implementación del modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En ese mismo sentido se puede observar que un grupo de estudiantes utilizó la fracción mixta como una segunda alternativa de realizar la conversión del modelo.

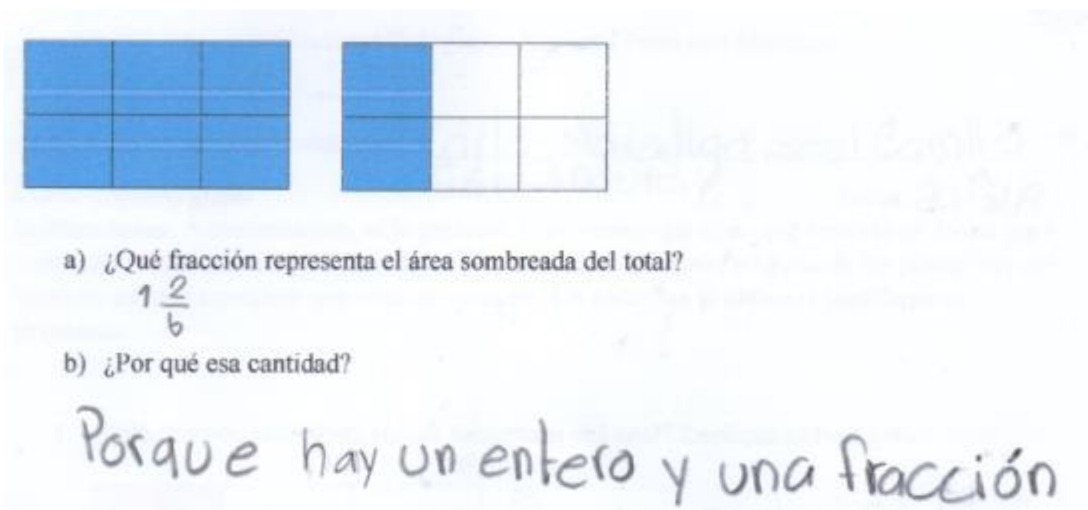


Figura 4.20 Empleo de una fracción mixta para la conversión del modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.2.6 Resumen de la sesión de trabajo # 1

A continuación, se presenta un resumen de los resultados de la sesión # 1.

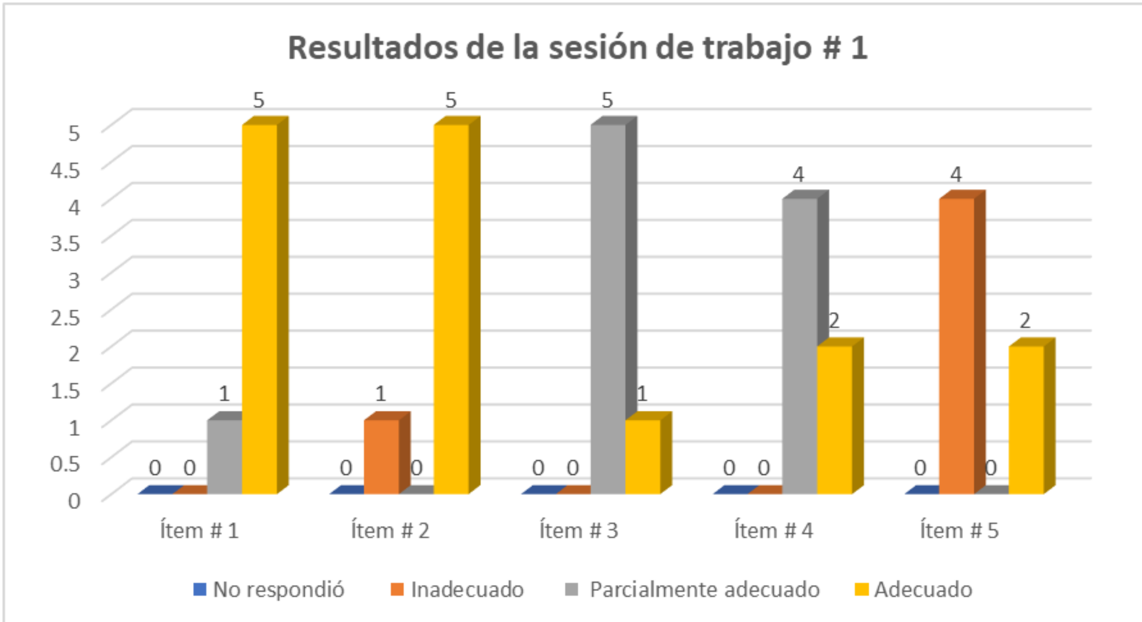
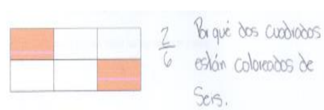


Figura 4.21 Resultados de la sesión de trabajo # 1
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de la sesión de trabajo # 1

Tabla 4.2
Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 1

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 3		En este ítem, el 83% de los estudiantes creó un concepto a partir del modelo de área propuesto. Este porcentaje de estudiantes logró realizar la conversión de un registro pictórico al numérico (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la sesión de trabajo número 1, cuyo objetivo es la conversión, de un registro pictórico al numérico por medio del modelo de área que según los señalamientos del NCTM (2000) es uno de los modelos necesarios para la enseñanza de las fracciones, se observa lo siguiente: En los ítems 1 y 2 la mayoría de los estudiantes pudo realizar la conversión del registro pictórico al numérico;

se observó que dos grupos tuvieron dificultades en la argumentación del ítem y otro grupo tuvo dificultades en el concepto de denominador. El ítem número tres fue parcialmente resuelto por la mayoría de los estudiantes al realizar un tratamiento dentro del registro pictórico; sin embargo, se encontraron errores en el concepto de la fracción equivalente. En el ítem 4 se observa que algunos estudiantes tuvieron dificultades en la relación de orden de dos fracciones. Finalmente, se evidencia que la mayoría de los estudiantes tuvo dificultades en el ítem 5 referente a una fracción impropia en un modelo de área. Por otro lado, se observa que los estudiantes llegaron al nivel 3 del modelo de la comprensión matemática propuesto por Pirie y Kieren.

4.3 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 2

En la presente sección se muestran los resultados y el análisis de la sesión de trabajo número 2 que consta de 4 ítems, cuyo propósito fue la representación de la fracción, empleando la conversión del registro numérico al pictórico mediante la implementación del modelo de área.

4.3.1 Resultados y análisis del ítem # 1

En este ítem, se presentaron las fracciones $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{2}$ cuyo objetivo era la representación en un modelo visual de área, los estudiantes tenían la tarea de realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico, según los señalamientos realizados por Duval (2006) sobre la teoría de los registros de representación semiótica para que haya comprensión matemática, se deben incorporar actividades de conversión de al menos dos registros. Se puede observar que los grupos 1, 2 y 5 respondieron el ítem de forma adecuada de acuerdo con la rúbrica, lograron hacer la conversión correcta de las fracciones y fueron capaces de argumentar que ambas fracciones son equivalentes por medio del modelo de área. Entre los hallazgos se observa que el grupo 3, 4 y 6 resolvieron el ítem de manera parcialmente adecuado ya que no pudieron realizar la comparación de ambas fracciones y llegar al concepto de fracción equivalente. Sin embargo, lograron realizar la conversión de ambas fracciones correctamente.

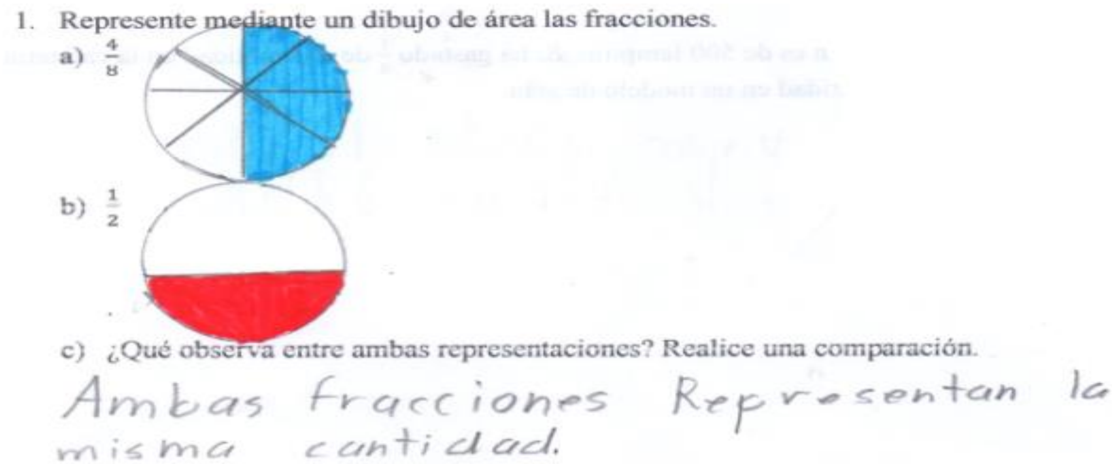


Figura 4.22 Representaciones del lenguaje numérico al pictórico empleando el modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.3.2 Resultados y análisis del ítem # 2

En el ítem 2 los estudiantes tenían la tarea de comparar dos fracciones mediante el uso del modelo de área. Se debía hacer una conversión del lenguaje numérico al pictórico y luego establecer una relación de orden. Entre los hallazgos encontrados se observa que los integrantes de los grupos 1 y 5 resolvieron el ítem de manera adecuada en relación con la rúbrica, haciendo la correcta conversión de las fracciones y de manera visual fueron capaces de argumentar la relación de orden existente entre ambas fracciones. Sin embargo, los demás grupos tuvieron dificultades en representar la fracción $\frac{7}{9}$ en el modelo de área y en establecer el orden de estas.

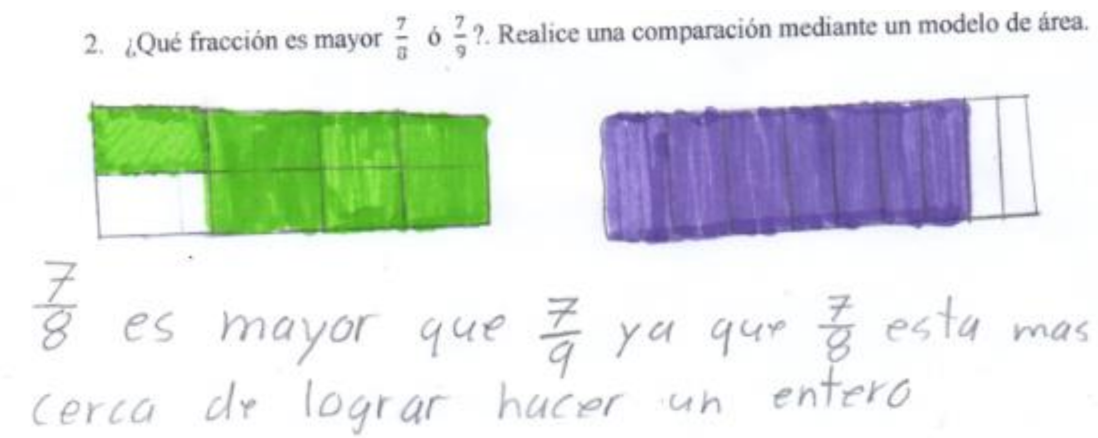


Figura 4.23 Producciones de los estudiantes de la relación de orden mediante modelos visuales
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.3.3 Resultados y análisis del ítem # 3

En el ítem 3 se presenta un problema de aplicación, los estudiantes tenían la tarea de realizar una conversión de las fracciones $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{4}$. Luego, debían encontrar la fracción restante mediante la aplicación del modelo visual de área. Entre los hallazgos se pueden observar que el grupo 1 realizó el ítem de forma adecuada, siendo capaces de realizar la conversión del lenguaje numérico al pictórico y un tratamiento correcto en el lenguaje numérico de las fracciones. Se evidencia que este grupo fue capaz de realizar una suma de fracción con distinto denominador, de igual forma fueron capaces de realizar una simplificación de la fracción. Según Neagoy (2016), una de las dificultades encontradas en las fracciones es la aplicación memorizada de algoritmos, como se pudo ver, el grupo 1 aplicó de manera correcta el algoritmo de la suma de dos fracciones.

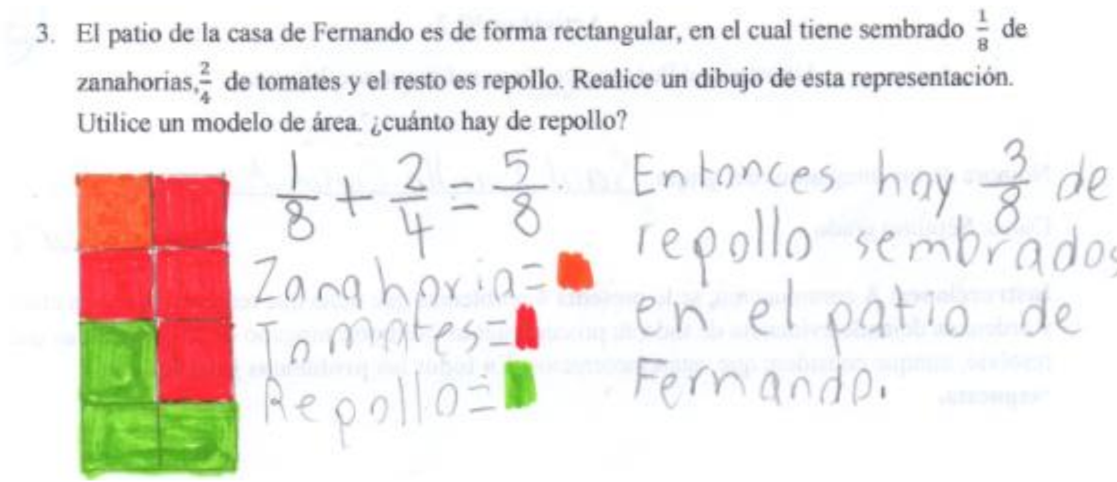


Figura 4.24 Conversión y tratamiento del problema de aplicación mediante un modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Por otra parte, el resto de los grupos obtuvieron el ítem de manera inadecuada. Entre las dificultades encontradas se pueden resaltar; errores en la simplificación de las fracciones, incorrecta interpretación del problema de aplicación ya que algunos grupos realizaron la conversión correcta de las fracciones de manera individual, pero cuando tuvieron que representar $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{4}$ y deducir la fracción restante al representarlas en el modelo de área no lograron hacer la conversión.

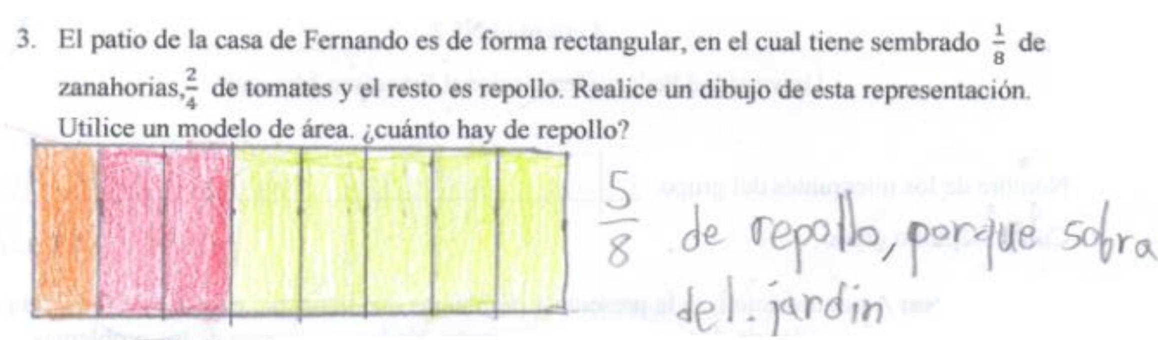


Figura 4.25 Error en la representación $\frac{2}{4}$ en el modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.3.4 Resultados y análisis del ítem # 4

En el ítem cuatro cuyo objetivo hacer una interpretación del subconstructo operador de la fracción, que según Kieren (1976) se debe enseñar este significado para que el estudiante adquiera la comprensión del concepto $\frac{a}{b}$. Los estudiantes de los grupos 1, 3, 4 y 5. Obtuvieron el ítem de forma adecuada, realizaron la correcta conversión de la fracción y visualmente pudieron interpretar la fracción como operador y deducir la cantidad que se había gastado de la mesada.

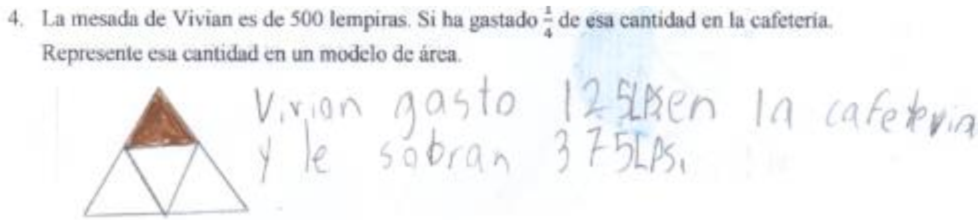


Figura 4.26 Interpretación de la fracción como operador mediante el modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

No obstante, los grupos 2 y 6 no lograron hacer la correcta conversión e interpretar la fracción como operador mediante le modelo de área.

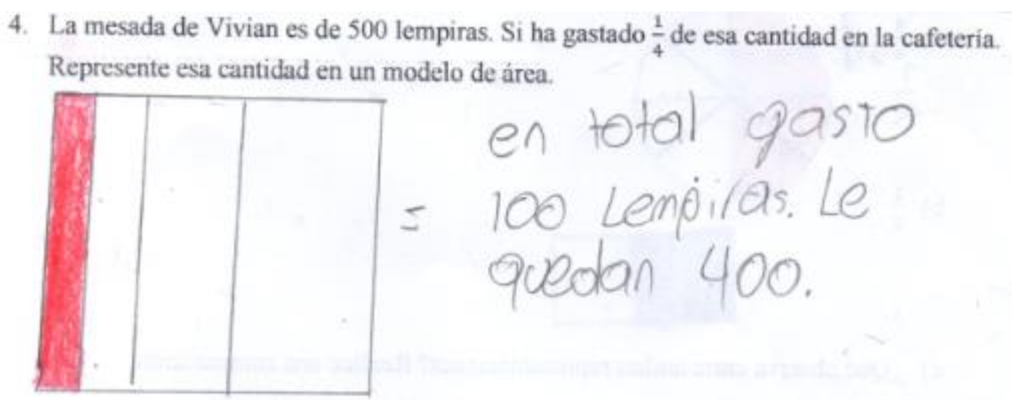


Figura 4.27 Error en la interpretación de la fracción como operador
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.3.5 Resumen de la sesión de trabajo # 2

A continuación, se presenta un resumen de los resultados de la sesión # 2.

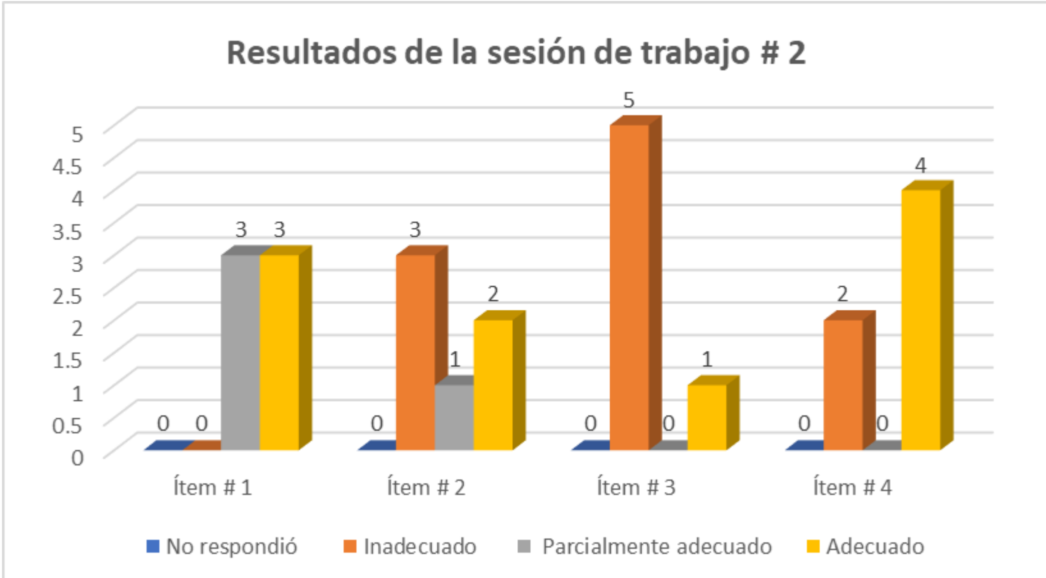
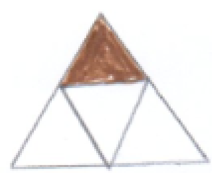


Figura 4.28 Resultados de la sesión de trabajo # 2
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados obtenidos de los estudiantes

Tabla 4.3
Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 2

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 3		El 67% de los estudiantes fue capaz de relacionar la imagen mental que tiene de la fracción con el significado operador (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la sesión de trabajo 2, cuyo objetivo consistía en la conversión de un registro numérico a un registro pictórico a través del modelo de área. Se evidencia que en el ítem 1 la mayoría de los estudiantes pudo realizar la conversión en el modelo de área, aunque algunos tuvieron dificultades al identificar las fracciones equivalentes. En el ítem 2, se observa que muchos estudiantes tuvieron dificultades al establecer una relación de orden entre ambas fracciones. En el ítem 3, la mayoría de los grupos tuvieron dificultades al representar varias fracciones en un modelo de área, siendo este un problema de aplicación. Finalmente, el ítem 4 pretende abordar el significado de operador, pero se observa que la mayoría pudo realizar la correcta representación en un modelo de área y argumentar su respuesta; sin embargo, 2 de los grupos tuvieron dificultades al representar este significado en un modelo de área. En relación con la sesión número dos se observa que el 67% de los estudiantes están en un nivel 2 del modelo de la comprensión matemática propuesto por Pirie y Kieren.

4.4 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 3

Se presenta sesión de trabajo número 3, la cual consta de cuatro ítems orientados a la realización de una conversión, dado un registro pictórico a un registro numérico mediante la implementación del modelo de longitud.

4.4.1 Resultados y análisis del ítem # 1

El ítem número 1 tiene como finalidad realizar la conversión de la fracción parte todo a partir del modelo de longitud que es propuesto por el NCTM (2000) para la enseñanza de los números racionales. Por otra parte, se evidencia que el grupo 6 pudo lograr con el objetivo del ítem, contestando de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación, que la fracción representada es $\frac{1}{5}$. Los integrantes de los grupos 1, 3, 4 y 5 contestaron el ítem de manera parcial ya que realizaron la correcta conversión, pero no pudieron argumentar su respuesta.

En cambio, el grupo 2 no pudo realizar la conversión del modelo de longitud al lenguaje numérico.

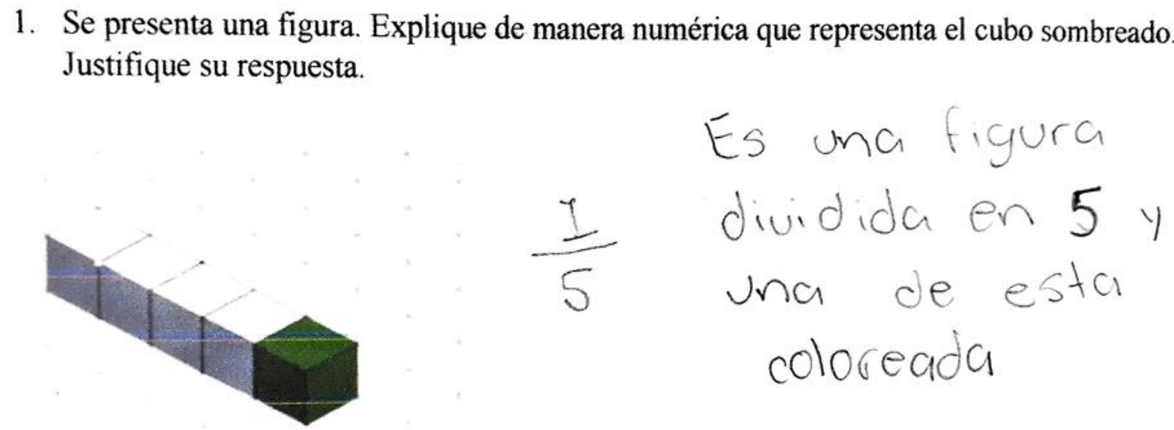


Figura 4.29 Respuesta correcta de la fracción $\frac{1}{5}$ en el modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.4.2 Resultados y análisis del ítem # 2

En el ítem número 2 se puede evidenciar que todos los estudiantes en relación con la rúbrica de evaluación tuvieron dificultades en la identificación de la fracción señalada en un modelo de longitud conformado por una regla dividida en pulgadas. El objetivo del ítem era identificar el entero y la fracción señala por la flecha. Sin embargo, se encontraron errores en la comprensión de la fracción mixta por parte de los estudiantes.

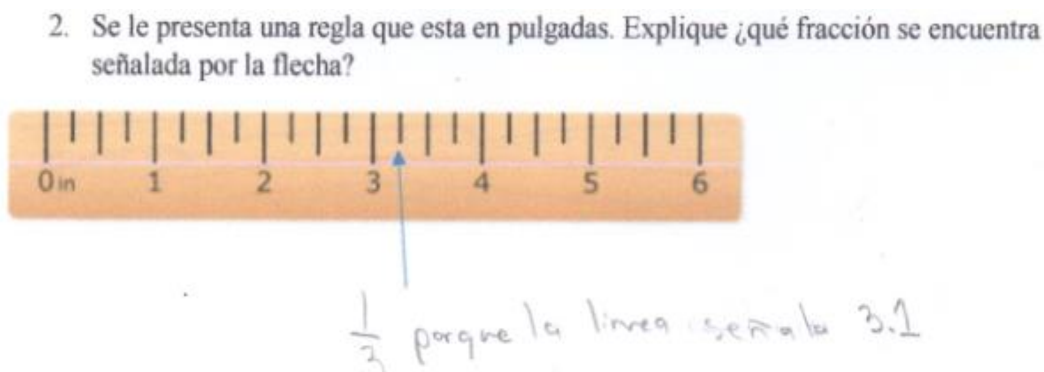


Figura 4.30 Error en la interpretación de una fracción mixta $3\frac{1}{4}$
Fuente: Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

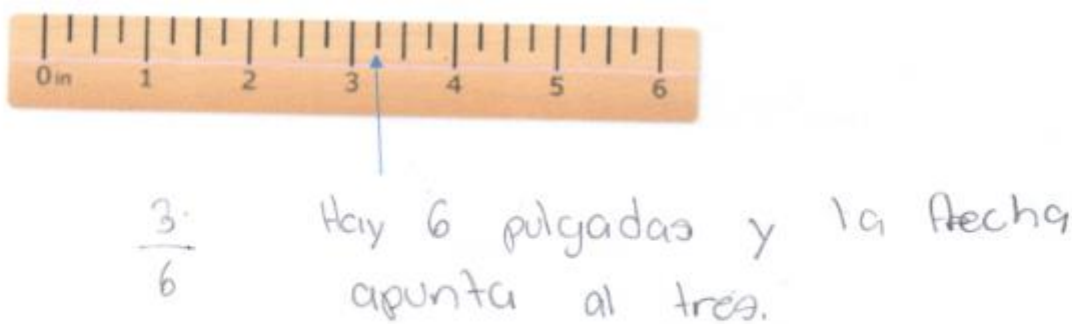


Figura 4.31 Ubicación incorrecta de la fracción $3\frac{1}{4}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.4.3 Resultados y análisis del ítem # 3

En el ítem número tres cuyo propósito era la conversión de una fracción impropia dada en el lenguaje pictórico al lenguaje numérico mediante la interpretación del modelo de longitud. Se evidencia que los grupos 1, 4 y 5 interpretaron de manera correcta la fracción impropia $\frac{5}{3}$, siendo capaces de ver las dos figuras como una sola unidad.

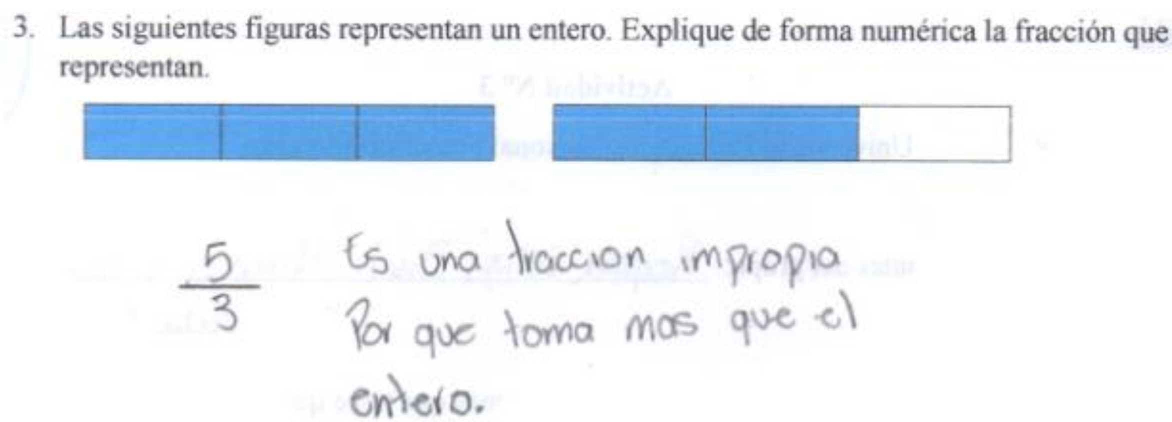


Figura 4.32 Adecuada interpretación de la fracción $\frac{5}{3}$ en un modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

No obstante, los estudiantes de los grupos 2, 3 y 6 tuvieron dificultades en la interpretación de la fracción impropia ya que muchos de ellos comprendieron las dos figuras como dos enteros y no como la unidad. Lo anterior demuestra que existe una gran resistencia de partes de los estudiantes hacia el pensamiento visual, tal como señaló Vinner (1989) en su investigación.

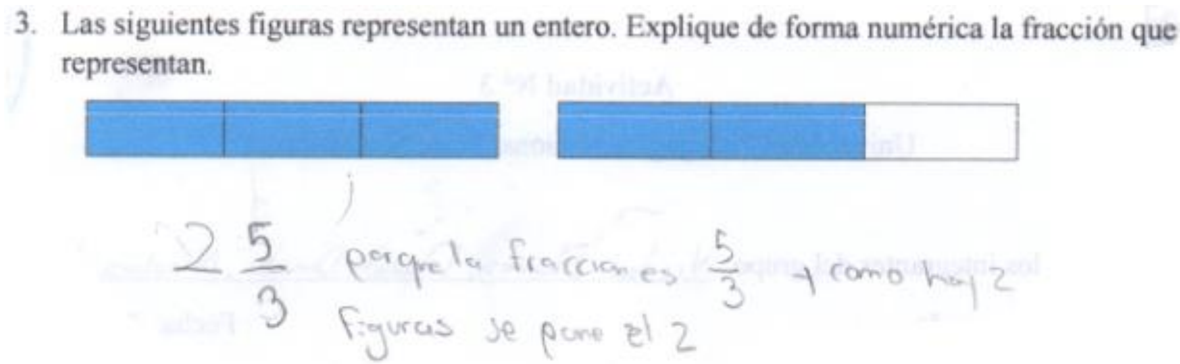


Figura 4.33 Error en la interpretación de la fracción impropia de un modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.4.4 Resultados y análisis del ítem # 4

Se observa que los estudiantes de todos los grupos tuvieron dificultades en identificar una fracción dada en una recta numérica, dificultades similares fueron encontradas en comparación al ítem número dos de la prueba. El objetivo del ítem era la identificación de la fracción impropia $\frac{7}{6}$ que representa el segmento en la recta numérica.

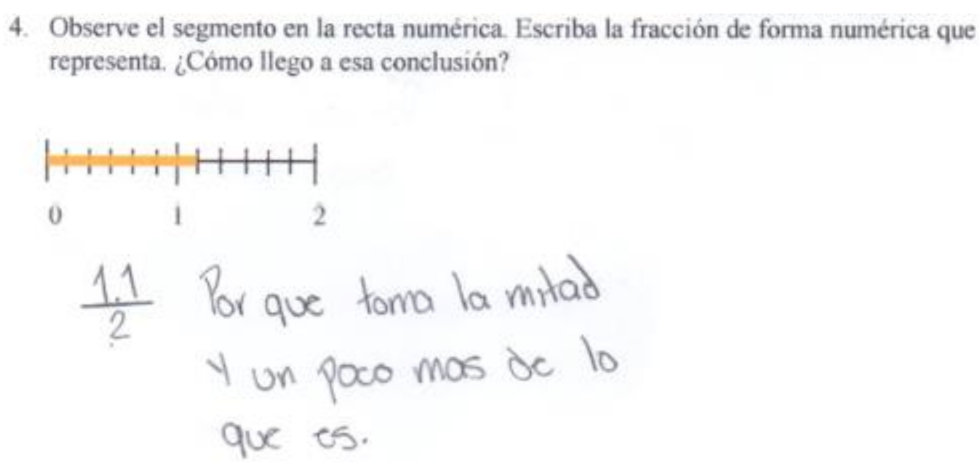


Figura 4.34 Error en la interpretación de la fracción $\frac{7}{6}$ en un modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

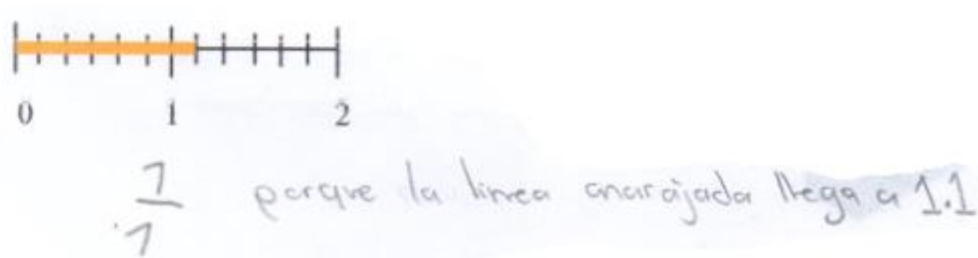


Figura 4.35 Dificultades en la interpretación en la recta numérica
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.4.5 Resumen de la sesión de trabajo # 3

A continuación, se presenta un resumen de los resultados de la sesión # 3.

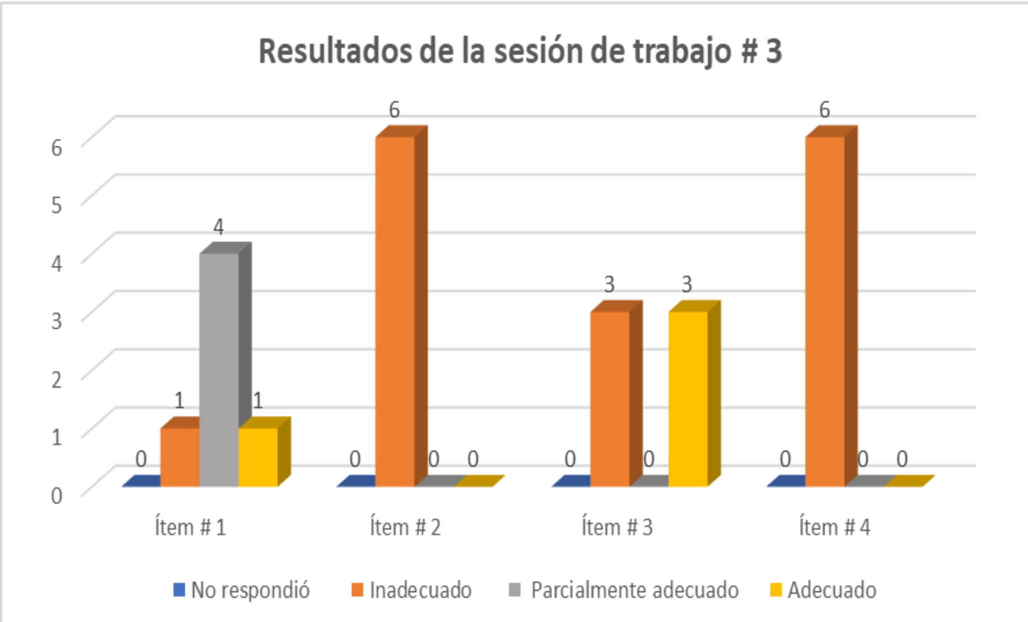
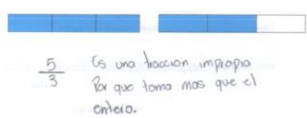


Figura 4.36 Resultados de la sesión de trabajo # 3
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de los estudiantes

Tabla 4. 4 Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 3

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 4		El 50% de los estudiantes fue capaz de observar la propiedad del concepto fracción impropia basándose en las características de la imagen propuesta (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la sesión de trabajo 3, se puede evidenciar que los estudiantes de manera general pueden realizar una conversión de ciertos modelos de longitud, pero cuando se les presenta un modelo como la recta numérica tiene dificultades en representar una fracción ya sea propia o impropia. Se observan muchas dificultades en realizar una conversión de una fracción impropia representada en un modelo de longitud a un registro numérico. Por otra parte, se observa que el 50% de los estudiantes, en el ítem número 3, están en el nivel 4 del modelo de la comprensión matemática según los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

4.5 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 4

La siguiente sesión de trabajo 4 que consta de 5 ítems los cuales estaban orientados a la representación de una fracción del lenguaje numérico al lenguaje pictórico y gráfico mediante la interpretación del modelo de longitud.

4.5.1 Resultados y análisis del ítem # 1

En el ítem número 1, cuya finalidad era la representación de una fracción en una recta numérica ya dada. Se puede observar que los integrantes del grupo 1 lograron graficar la fracción $\frac{4}{5}$ de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación. Ellos enfatizaron que el número 4 son las partes que fueron tomadas, las cuales corresponden al numerador según lo señalado en el desarrollo realizado por los estudiantes. El modelo de longitud se encuentra dentro de las diversas representaciones matemáticas propuestas por el NCTM (2000) para la enseñanza de las matemáticas.

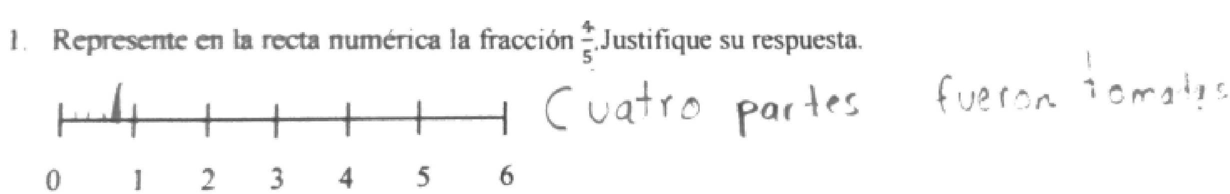


Figura 4.37 Representación adecuada de la fracción $\frac{4}{5}$ en el modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En cambio, los estudiantes de los grupos 2, 3, 4, 5 y 6 tuvieron dificultades en la conversión del lenguaje numérico al gráfico, mostrando errores en la comprensión de la representación de la fracción en la recta numérica. Este es un error recurrente que se ha observado en los estudiantes al utilizar el modelo de longitud, en especial la recta numérica.

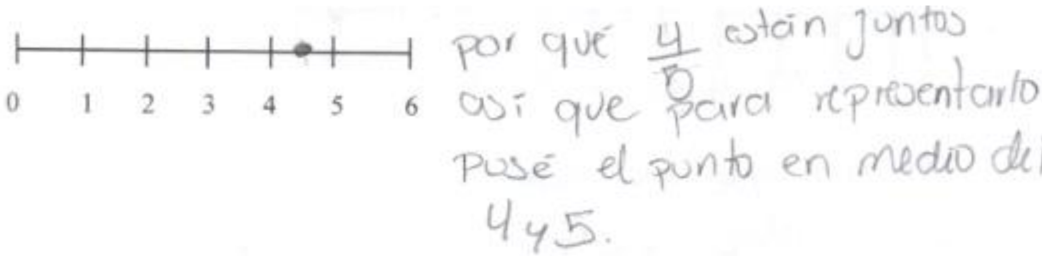


Figura 4.38 Dificultades en la conversión de la fracción $\frac{4}{5}$ al lenguaje gráfico
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

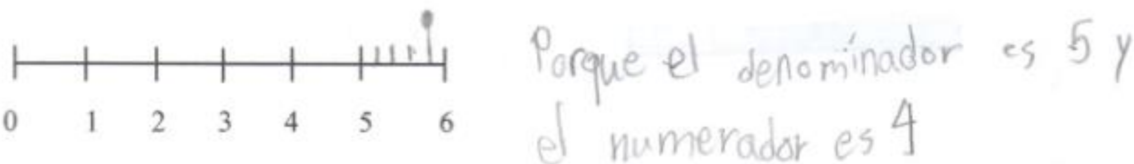


Figura 4.39 Error en la comprensión de la unidad al representar la $\frac{4}{5}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.5.2 Resultados y análisis del ítem # 2

En el ítem número 2 se presentan las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de las cuales los estudiantes tienen la tarea de representar ambas en un modelo de longitud y argumentar cuál de ellas es mayor. Se evidencia que los grupos 1, 2 y 3 obtuvieron el ítem de la forma parcialmente adecuada. Realizaron la correcta conversión en el modelo de longitud, pero se observan dificultades en la argumentación de la relación de orden sobre las fracciones dadas.

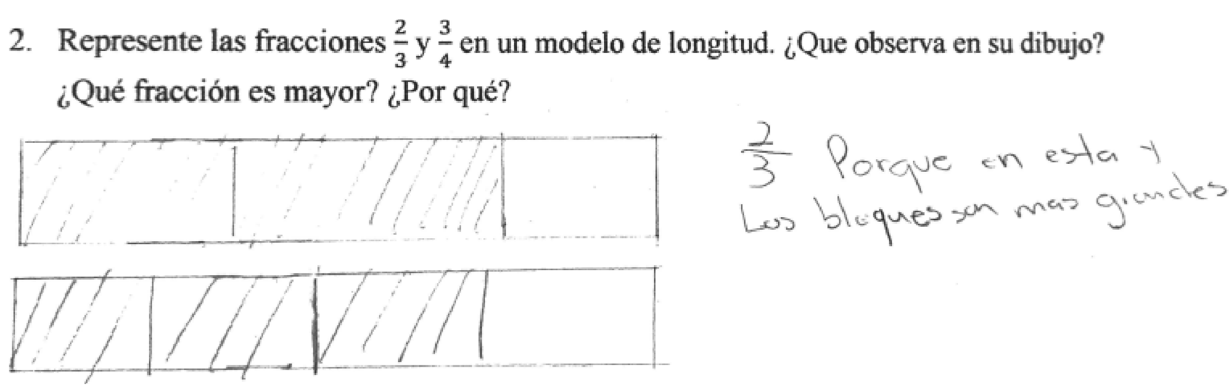


Figura 4.40 Correcta conversión, pero error en la identificación visual de la relación de orden de las fracciones
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

No obstante, los grupos 4, 5 y 6 obtuvieron el ítem de la forma inadecuada ya que tuvieron errores en la conversión de las fracciones al lenguaje gráfico sugerido en la prueba. Encontrando errores como; la interpretación parte todo en una recta numérica; dificultades en la comprensión de la unidad en una recta numérica y dificultades en la argumentación de la relación de orden de las fracciones dadas.

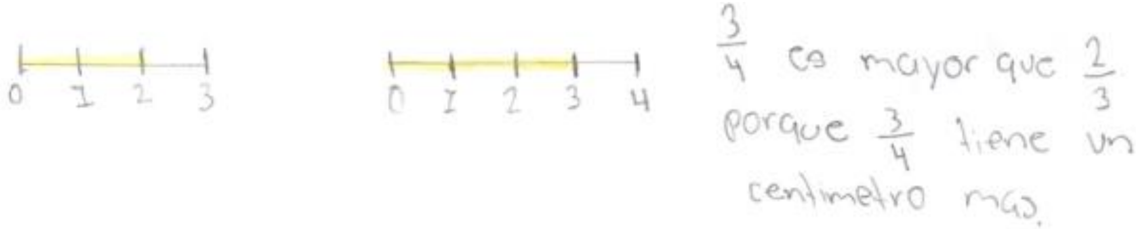


Figura 4.41 Error en la representación y argumentación de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.5.3 Resultados y análisis del ítem # 3

En el ítem tres, los estudiantes tienen como tarea la construcción de una fracción equivalente a partir de una fracción impropia representada en un modelo de longitud. Entre los hallazgos encontrados se puede evidenciar que los integrantes de los grupos 1, 2 y 4 contestaron al ítem de manera parcialmente adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación. Observándose dificultades en encontrar una fracción equivalente a la proporcionada en la tarea. Los integrantes de los grupos 3, 5 y 6 resolvieron la tarea de manera inadecuada, no pudieron representar la fracción $\frac{4}{3}$ en un modelo de longitud.

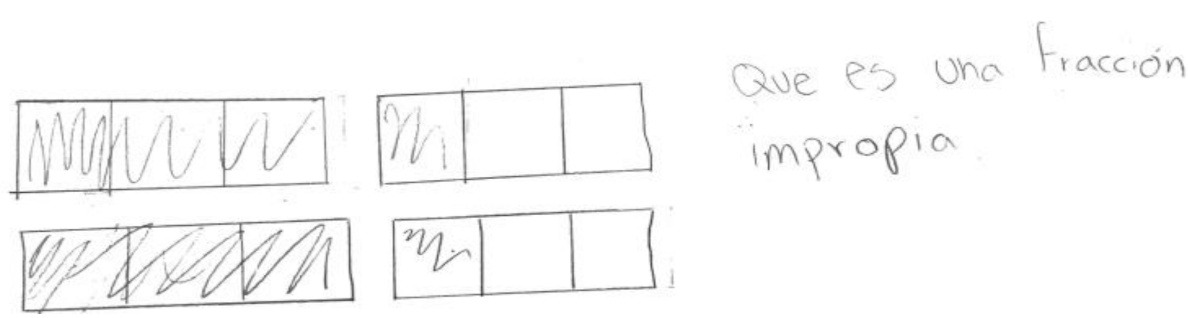


Figura 4.42 Dificultades en la construcción de una fracción equivalente
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

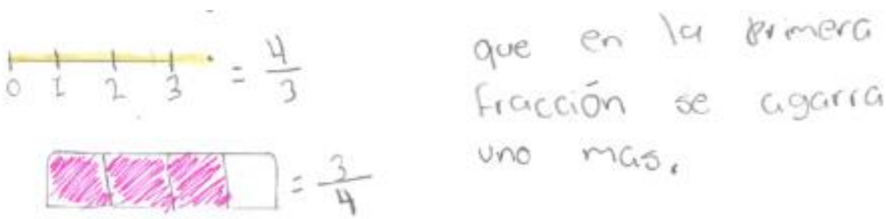


Figura 4.43 Error en la representación de una fracción impropia en la recta numérica
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.5.4 Resultados y análisis del ítem # 4

El ítem número 4 cuyo objetivo era la interpretación del concepto de fracción como operador dado un problema del contexto del estudiante en donde se tiene que realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico por medio del modelo de longitud. Se han encontrado los siguientes hallazgos en los grupos 1, 2, 3 y 4; han resuelto el ítem de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación; han implementado diferentes modelos de longitud, incluyendo la recta numérica y han argumentado las respuestas desarrolladas. Se observa que la mayoría de los estudiantes pudo realizar la conversión del lenguaje numérico al pictórico empleando el significado operador propuesto por Kieren (1976).

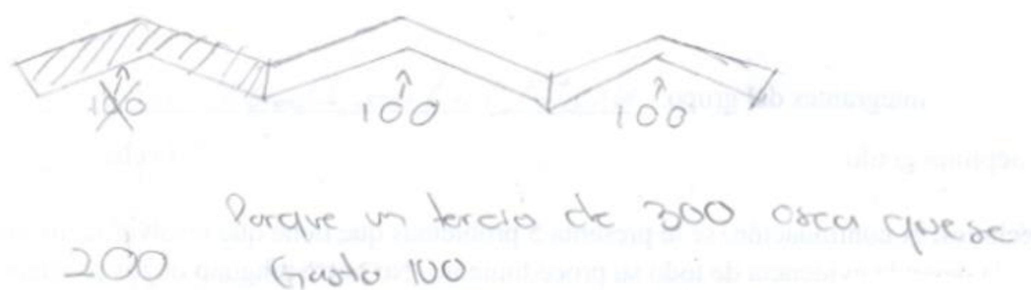


Figura 4.44 Conversión correcta del subconstructo operador de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Por otra parte, entre los hallazgos encontrados se observa que los grupos 5 y 6 resolvieron el ítem de manera inadecuada resaltando dificultades en la interpretación del subconstructo operador de la fracción.

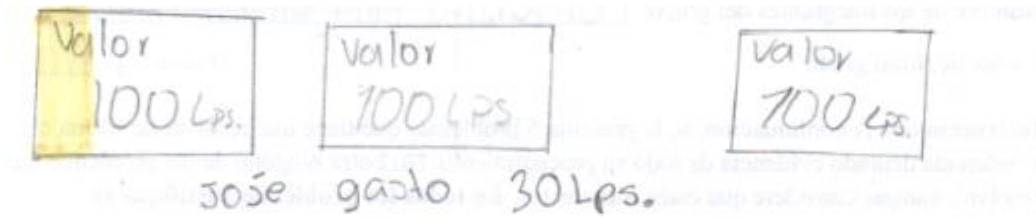


Figura 4.45 Error en la interpretación de la fracción como operador
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.5.5 Resultados y análisis del ítem # 5

El problema número 5 cuyo propósito era la interpretación del significado razón del concepto fracción propuesto por Kieren (1976), mediante la implementación del modelo de longitud. Se observa que los estudiantes de los grupos 1, 2 y 4 lograron interpretar el subconstructo de la fracción como razón y así su representación gráfica.

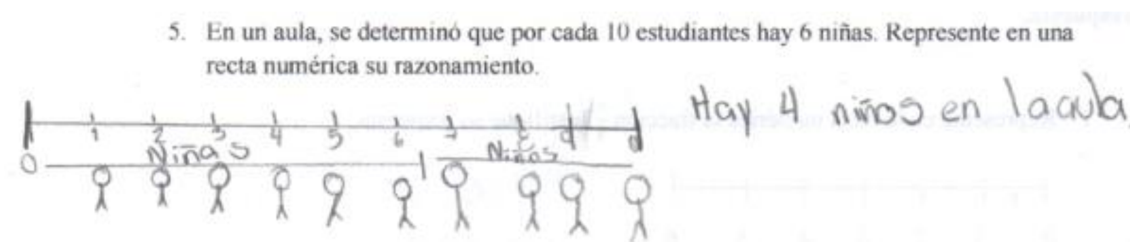


Figura 4.46 Representación adecuada del subconstructo razón utilizando el modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En cambio, los integrantes de los grupos 3, 5 y 6 resolvieron el problema de manera inadecuada ya que en su representación gráfica mostraron errores recurrentes en la representación de la razón $\frac{6}{10}$ y en la implementación de la recta numérica como modelo visual.

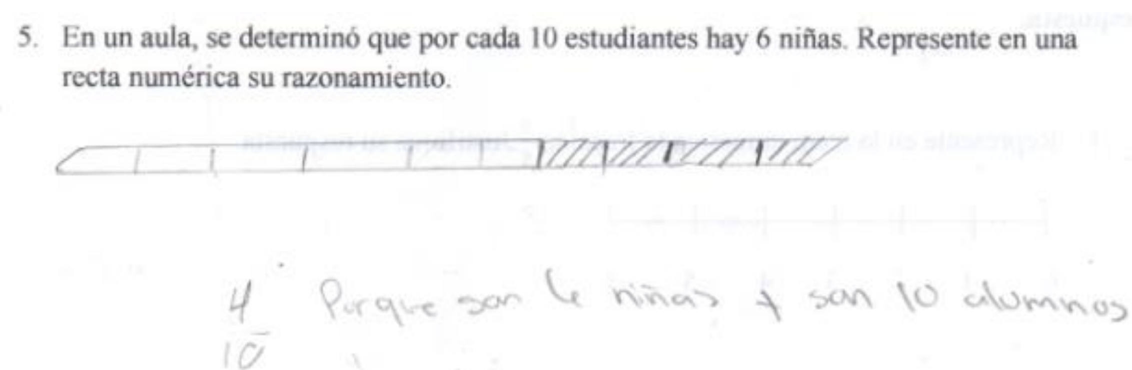


Figura 4.47 Representación errónea del modelo de longitud y de la fracción como razón
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.5.6 Resumen de la sesión de trabajo # 4

A continuación, se presenta un resumen de los resultados de la sesión # 4.

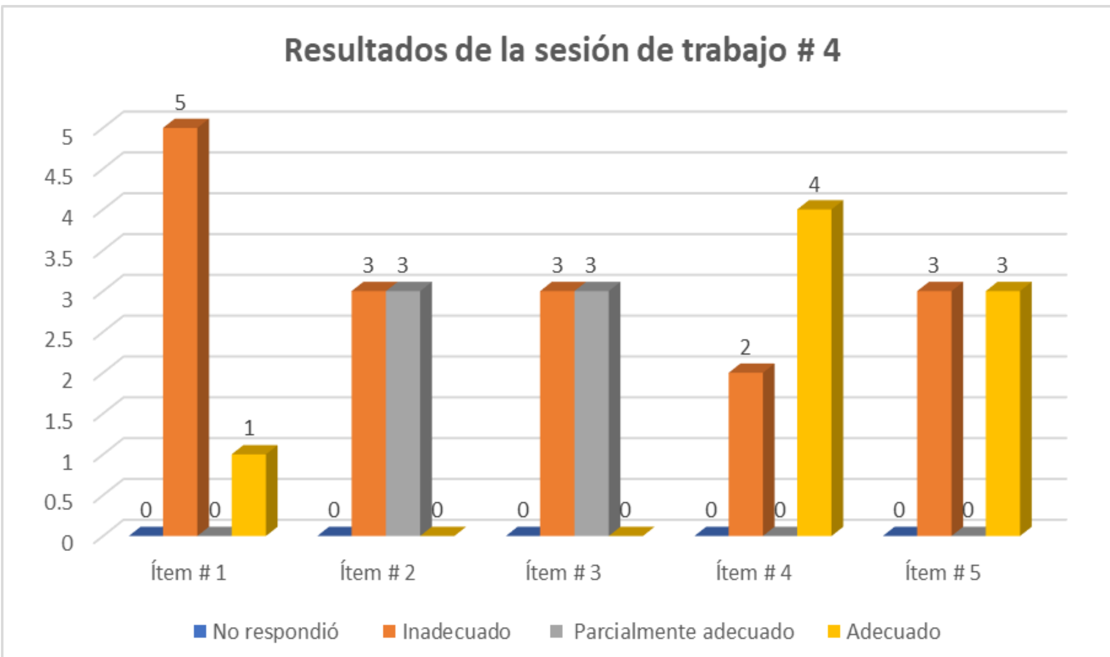
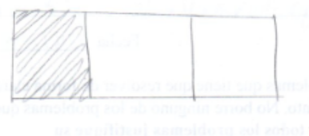


Figura 4.48 Resultados de la sesión de trabajo # 4
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de los estudiantes

Tabla 4.5
Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 4

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 3		Se observó que el 67% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 3 al relacionar el significado operador de la fracción y representarla en un modelo de longitud (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la sesión de trabajo 4 cuyo propósito estaba enfocado en la conversión del lenguaje numérico al lenguaje gráfico a través del modelo de longitud. Se evidencia que la mayoría de los grupos, igual que en la sesión previa, tuvieron dificultades recurrentes al representar en el modelo de longitud una fracción en un registro numérico. Según los señalamientos del NCTM (2000), los estudiantes deben estar inmersos en una variedad de modelos, incluyendo el modelo de longitud que tiene muchas aplicaciones en los cursos posteriores. No obstante, el 67% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 3 en el ítem # 4, según los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren.

4.6 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 5

La presente sesión de trabajo consta de 4 ítems orientados a la conversión del concepto de fracción del lenguaje pictórico al lenguaje numérico mediante la implementación del modelo de conjunto.

4.6.1 Resultados y análisis del ítem # 1

En el ítem 1, el estudiante tiene la tarea de identificar la parte del todo por medio del modelo visual de conjunto dado, dicho modelo es también sugerido por el NCTM (2000) para la enseñanza de los objetos matemáticos. Además, cabe recalcar que el modelo de conjunto se emplea para la enseñanza cantidades discretas. En los hallazgos se puede evidenciar que todos los grupos lograron identificar la parte y el todo del conjunto y realizaron la conversión de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación, argumentando cada una de las respuestas.

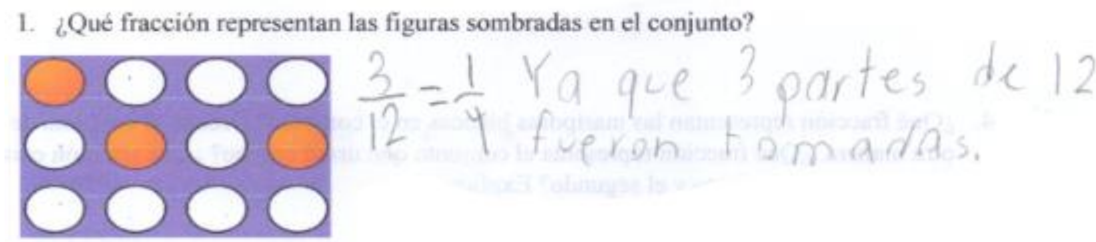


Figura 4.49 Correcta conversión del modelo de conjunto e interpretación de la fracción equivalente
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

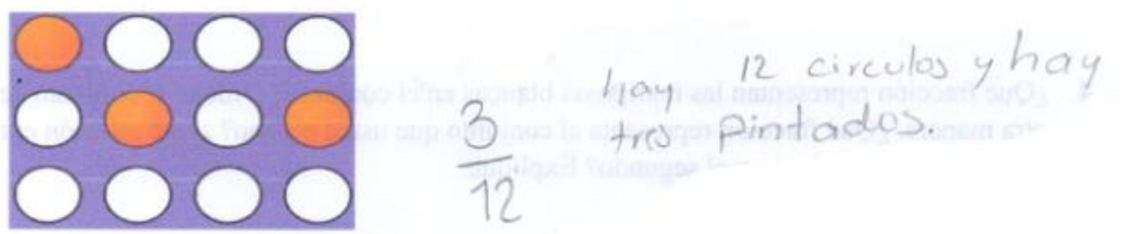


Figura 4.50 Adecuada interpretación de la fracción parte todo en el conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.6.2 Resultados y análisis del ítem # 2

El ejercicio número 2 cuya finalidad estaba basada en la identificación del subconstructo razón propuesto por Kieren (1976) para la comprensión del concepto fracción, mediante la interpretación del modelo visual de conjunto. De acuerdo con la rúbrica de evaluación se puede observar que los integrantes de los grupos 1 y 5 respondieron el ítem de manera parcialmente adecuada ya que mostraron dificultades en la interpretación de razón de la fracción.

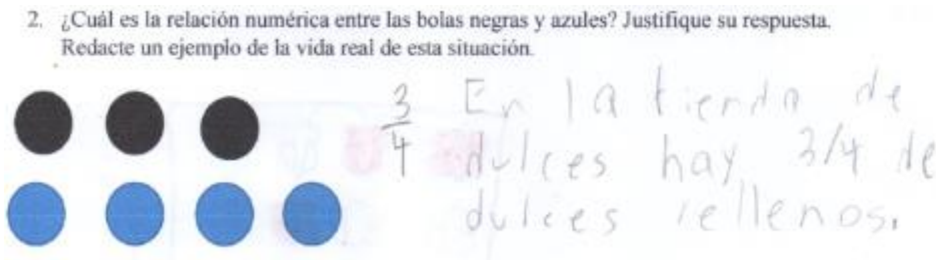


Figura 4.51 Dificultades en la comprensión del subconstructo razón de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Por otra parte, los estudiantes de los grupos 2, 3, 4 y 6 obtuvieron respuestas de manera inadecuada conforme a la rúbrica de evaluación, debido a que interpretaron de manera incorrecta la relación 3 es a 4.

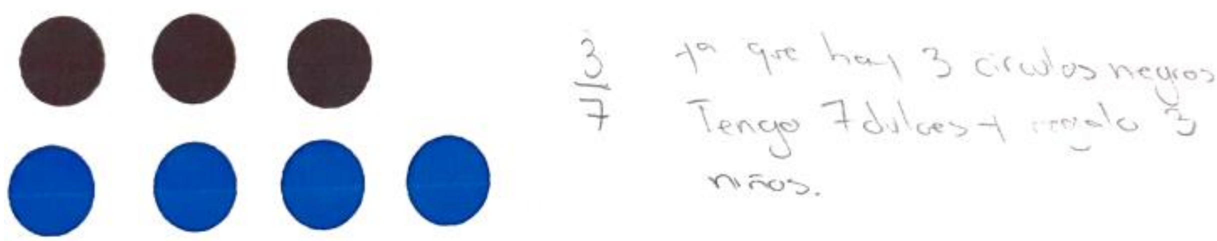


Figura 4.52 Error en establecer la relación entre dos cantidades
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.6.3 Resultados y análisis del ítem # 3

El ejercicio número 3 cuyo objetivo estaba basado en la identificación de una fracción impropia dada en un modelo de conjunto y en la construcción de un nuevo modelo para la demostración de una de fracción equivalente. Se evidencia que los estudiantes del grupo 6 lograron realizar el ítem de forma parcialmente adecuada, mostrando problemas en la construcción de un nuevo modelo equivalente al primero.

3. ¿Qué fracción representan las bolas amarillas de las azules en el conjunto? Dibuje un nuevo conjunto que sea equivalente al primero.

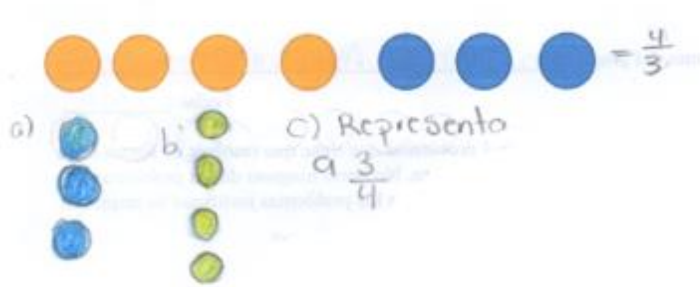


Figura 4.53 Respuesta del ítem parcialmente adecuada
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En ese mismo sentido, los integrantes de los grupos 1, 2, 3, 4 y 5 respondieron la tarea de manera inadecuada, ya que no realizaron la correcta conversión del lenguaje pictórico al lenguaje numérico presentado en el modelo de conjunto.

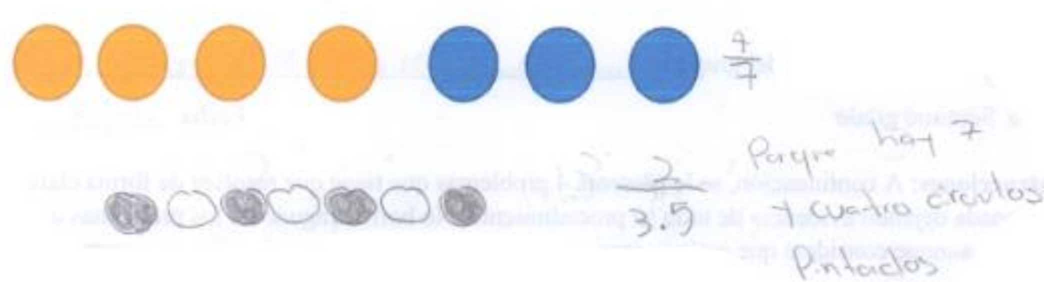


Figura 4.54 Error en la interpretación de una fracción impropia en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.6.4 Resultados y análisis del ítem # 4

La siguiente figura presenta los hallazgos obtenidos del problema 4 al realizar una conversión del lenguaje pictórico al numérico. Al estudiante se le presentan 12 mariposas, de las cuales 6 son blancas y 6 de color naranja. El ejercicio consiste en identificar que fracción representan las mariposas blancas en el conjunto. Se observa que los grupos 1, 2, 3, 5 y 6 lograron con el objetivo del ejercicio de manera parcialmente adecuado, ya que realizaron la correcta conversión y reordenamiento del conjunto obteniendo otra fracción equivalente a la propuesta, pero no lograron argumentar su reordenamiento.

Figura 4.55 Representación de una fracción equivalente en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En cambio, los integrantes del grupo 4 no pudieron lograr identificar la fracción representada por las mariposas blancas en el modelo de conjunto. Ellos argumentaban que la fracción representaba $\frac{6}{6}$ lo cual es erróneo ya que es un ejercicio de parte todo y no de razón.

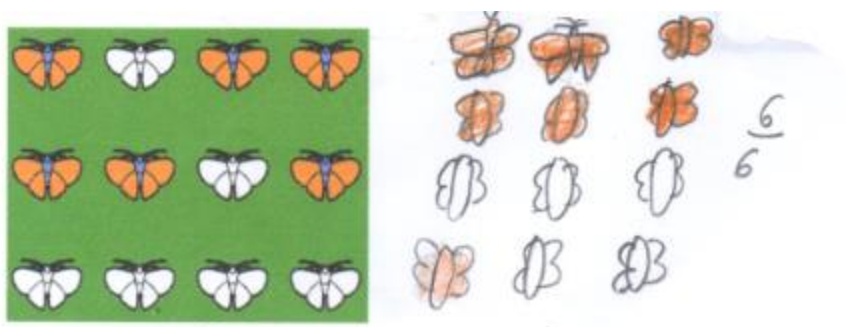


Figura 4.56 Error en la identificación de la fracción $\frac{6}{12}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.6.5 Resumen de la sesión de trabajo # 5

A continuación, se presenta un resumen de los resultados de la sesión de trabajo # 5.

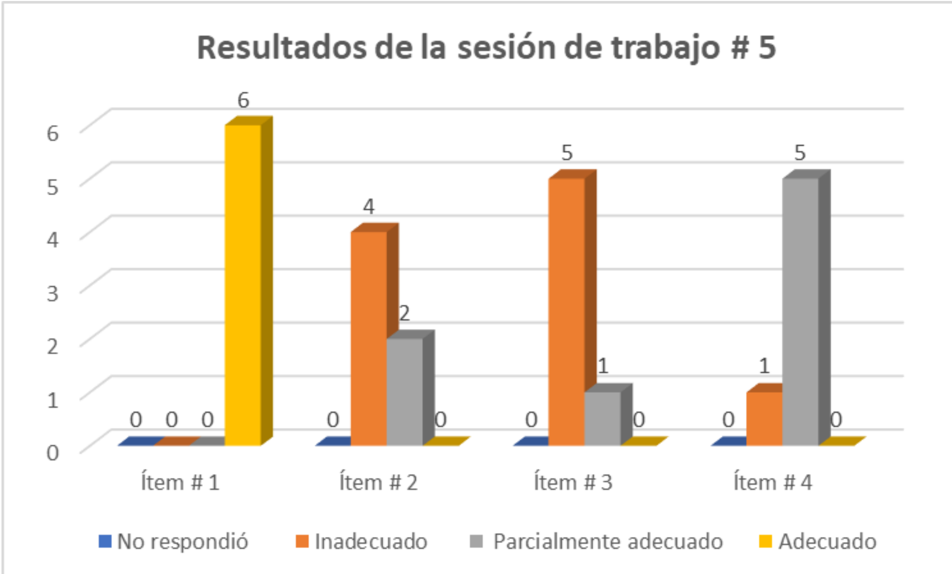
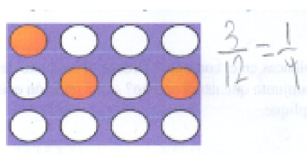


Figura 4.57 Resultados de la sesión # 5
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de los estudiantes

Tabla 4.6
Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 5

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 4		Todos los grupos (100%) alcanzaron un nivel de comprensión 4 en la cual los estudiantes pudieron comprender el concepto de fracción a partir del modelo de conjunto propuesto. (Ver pág. 37)

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

Se puede observar que en la sesión de trabajo 5, la cual tenía como objetivo la conversión del modelo pictórico de conjunto al registro numérico; se observa que el 100% de los estudiantes pudieron realizar la conversión de la fracción propia. Se evidencia dificultades en el significado razón, en el cual Ríos (2008:153) menciona que “la razón de un número a otro como un valor de comparación entre dos números”. Dicho significado mencionado previamente, es confundido con el subconstructo parte todo de la fracción. Se manifiestan nuevamente dificultades en la representación de una fracción impropia en el modelo de conjunto, así como en el modelo de longitud. En esta sesión de trabajo, el 100% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 4 con respecto al ítem # 1

4.7 Resultados y producciones de la sesión de trabajo # 6

La siguiente sesión de trabajo que consta de 4 problemas enfocados en la conversión del lenguaje numérico al pictórico mediante la implementación del modelo visual de conjunto, siguiendo los señalamientos del NCTM (2000) sobre la implementación de diversos modelos visuales para la enseñanza de las fracciones.

4.7.1 Resultados y análisis del ítem # 1

En el problema número 1, se le presenta al estudiante las razones 5:6 y 2:3 referentes a un juego, las cuales deben ser representadas en un modelo de conjunto, luego realizar una comparación de estas y argumentar que fracción es mayor a través del modelo visual de conjunto. Se puede evidenciar, según los resultados de la sesión de trabajo que los integrantes del grupo 6 obtuvieron el problema de manera parcialmente adecuada, ya que pudieron comprender el subconstructo razón de la fracción, pero tienen errores en su argumento.

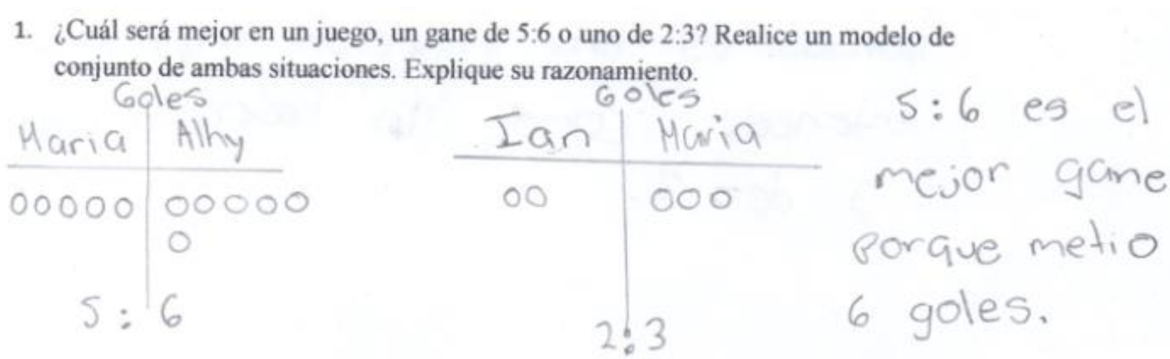


Figura 4.58 Respuesta parcialmente adecuada al problema 1
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Por otra parte, los integrantes de los grupos 1, 2, 3, 4, y 5 realizaron la tarea de manera inadecuada ya que confundieron el significado razón de la fracción con el de parte todo, no obstante, pudieron decir de manera visual que fracción era la mayor.

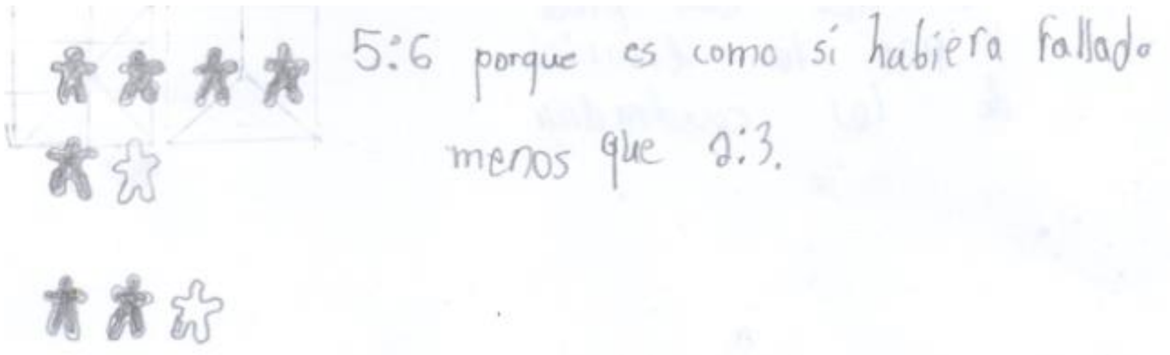


Figura 4.59 Error en la representación visual del subconstructo razón de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.7.2 Resultados y análisis del ítem # 2

El problema número 2 cuyo propósito estaba enfocado en la representación e identificación de dos fracciones equivalentes $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ respectivamente, a través del modelo de conjunto. Se observa que los integrantes de los grupos 1, 3 y 4 resolvieron el problema de manera adecuada de acuerdo con la rúbrica de evaluación, ya que realizaron la correcta representación visual y lograron comparar las fracciones.

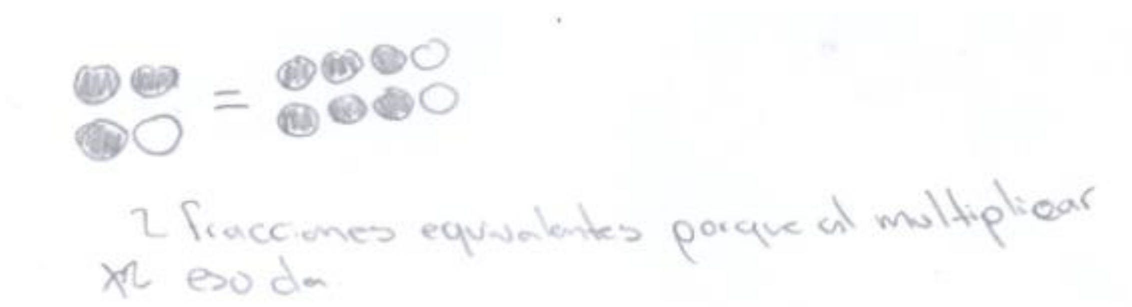


Figura 4.60 Comparación de dos fracciones equivalentes empleando el modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Sin embargo, los integrantes de los grupos 2 y 6 realizaron la correcta conversión de las fracciones, pero no lograron argumentar correctamente su respuesta de acuerdo con la rúbrica de evaluación.

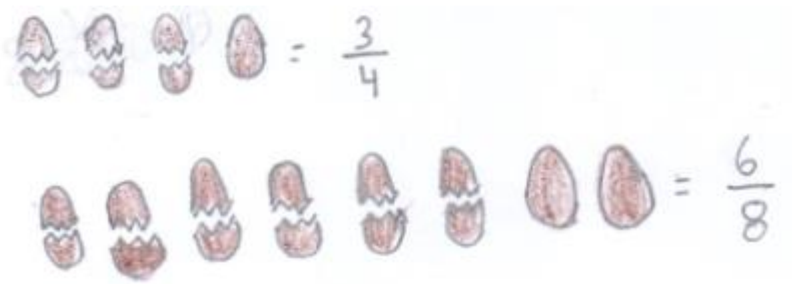


Figura 4.61 Problema resuelto de manera parcial
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Los integrantes de los grupos 1 y 5 tuvieron dificultades en la representación de las fracciones en el modelo de conjunto.

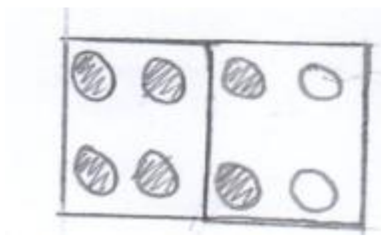


Figura 4.62 Error en la representación de la fracción $\frac{3}{4}$ en el modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.7.3 Resultados y análisis del ítem # 3

El ejercicio número 3 cuya finalidad era la representación de una la fracción impropia $\frac{5}{4}$ en un modelo de conjunto. Entre los hallazgos encontrados se pueden observar que los integrantes de los grupos 1, 2, 3, 4 y 5 lograron con el objetivo del ejercicio, realizando la correcta conversión del lenguaje numérico al lenguaje pictórico y argumentaron sus respuestas. El grupo número 6 representó la fracción en un modelo que no era el que se le solicitaba.

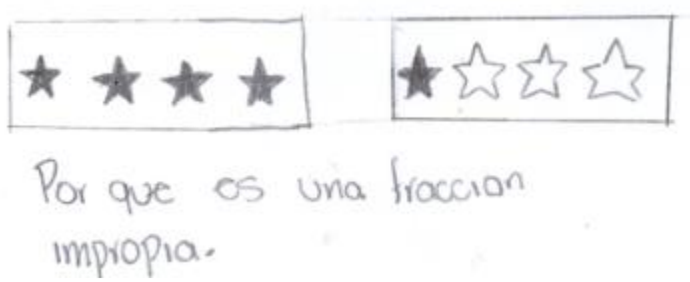


Figura 4.63 Correcta conversión del lenguaje numérico al pictórico mediante el modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Figura 4.64 Interpretación de la fracción impropia
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.7.4 Resultados y análisis del ítem # 4

En el ejercicio número 4 se observan debilidades recurrentes de parte de todos los estudiantes cuando se les da un modelo de conjunto y tienen la tarea de representar una fracción impropia en él. El ejercicio consistía en que, dado un modelo de conjunto, los estudiantes tenían que representar en el modelo la fracción impropia $\frac{3}{2}$; esto se lograba ampliando el modelo al agregar más elementos al conjunto.

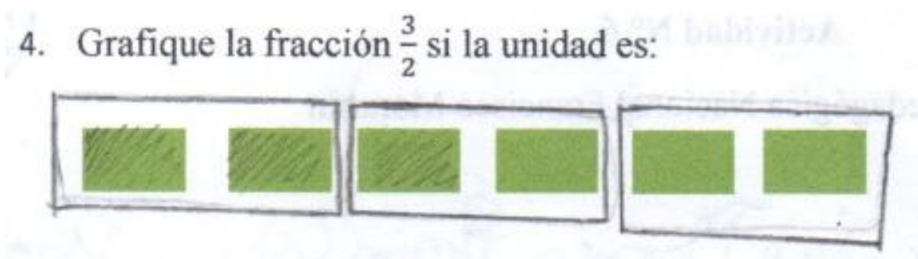


Figura 4.65 Dificultad en comprender la unidad de una cantidad discreta
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.7.5 Resumen de la sesión de trabajo # 6

Seguidamente, se presenta un resumen de la sesión de trabajo # 6.

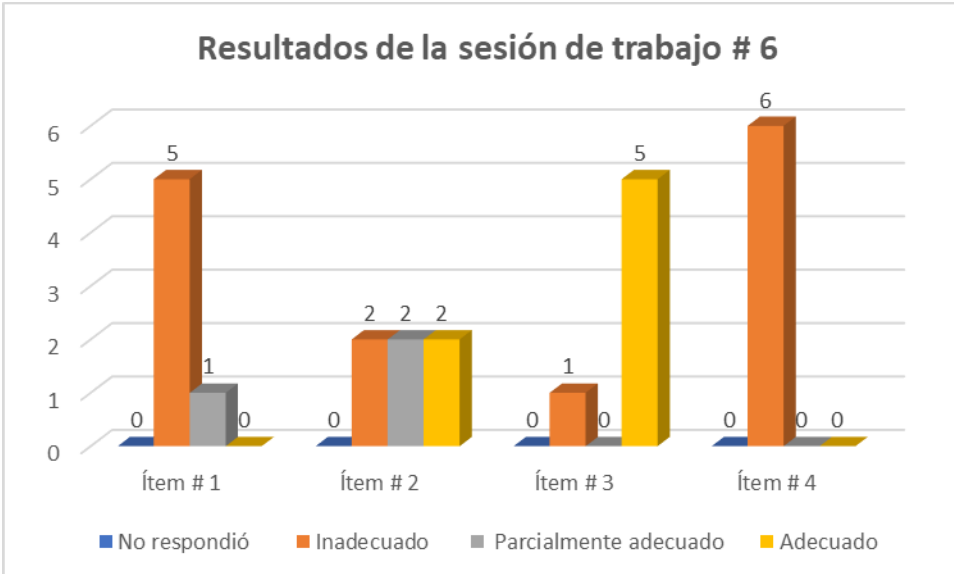
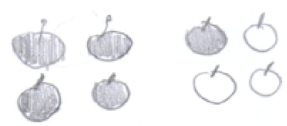


Figura 4.66 Resultados de la sesión de trabajo # 6
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de la sesión de trabajo # 6

Tabla 4.7
Nivel de comprensión matemática de la sesión de trabajo # 6

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 4		En este ejercicio se evidencia que el 83% de los estudiantes logró alcanzar un nivel de comprensión 4, ya que pudieron observar distintos atributos relaciones con la fracción impropia en el ítem # 3. (ver pág. 37)

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la sesión de trabajo número 6, cuya finalidad estaba enfocada en la conversión del registro numérico al pictórico haciendo énfasis en la implementación del modelo de conjunto sugerido por el NCTM (2000) se observa que: algunos estudiantes tuvieron dificultades en la comprensión del significado razón de la fracción; en la relación de orden de dos fracciones, en la comprensión de una fracción equivalente y en la representación de una fracción impropia en un modelo de conjunto dado, en especial cuando la unidad está formada por varias figuras. No obstante, se observa que el 83% de los estudiantes pudo representar una fracción impropia en un modelo de conjunto, cuando el modelo es creado por los mismos estudiantes.

4.8 Resultados y producciones de la prueba final

La prueba final fue aplicada de manera individual, con el propósito de evaluar la comprensión del concepto de fracción que tienen los estudiantes al utilizar los modelos de área, longitud y conjunto mediante las diferentes interpretaciones que tiene el concepto de fracción, según las indicaciones de Kieren (1976) para la comprensión del concepto.

4.8.1 Resultados y análisis del ítem # 1

El ejercicio del ítem 1 está enfocado en la representación de fracción $\frac{2}{5}$ en un modelo de área cuya figura es un pentágono. Se puede evidenciar que el 17% de los estudiantes realizó la tarea de manera adecuada, realizando la correcta partición de la figura y su representación. Mientras que el 83% de los estudiantes realizó el ejercicio de manera inadecuada ya que se encontró un error recurrente en la división del pentágono propuesto. Uno de los errores señalados por Neagoy (2016) sobre la división de las partes se puede apreciar en este ítem.

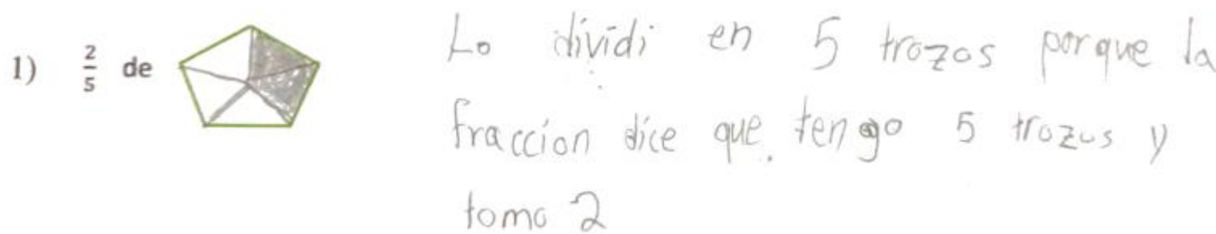


Figura 4.67 Correcta representación de la fracción $\frac{2}{5}$ en un modelo de área
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Figura 4.68 Representación inadecuada de la fracción $\frac{2}{5}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.2 Resultados y análisis del ítem # 2

El ítem 2 tiene como objetivo la representación de la fracción $\frac{2}{3}$ en un modelo de conjunto. Se puede evidenciar que el 50% de los estudiantes representó la fracción de manera adecuada, en la figura se observa la correcta conversión en el modelo de conjunto.

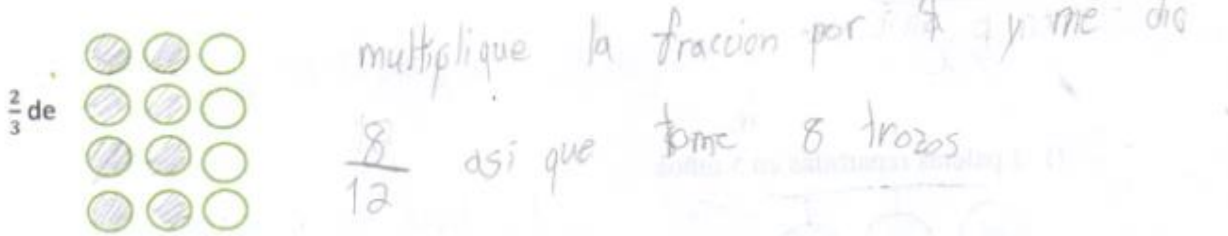


Figura 4.69 Correcta representación de la fracción $\frac{2}{3}$ en el modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En ese mismo sentido se evidencia que el 28% de los estudiantes respondió al ítem de manera parcial, ya que realizaron la correcta conversión, pero no argumentaron sus respuestas.

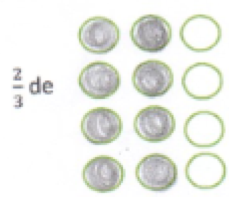


Figura 4.70 Representación en el modelo sin argumento
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

En cambio, el 22% de los estudiantes contestó el ítem de manera inadecuada al representar la fracción de manera incorrecta en el modelo de conjunto.

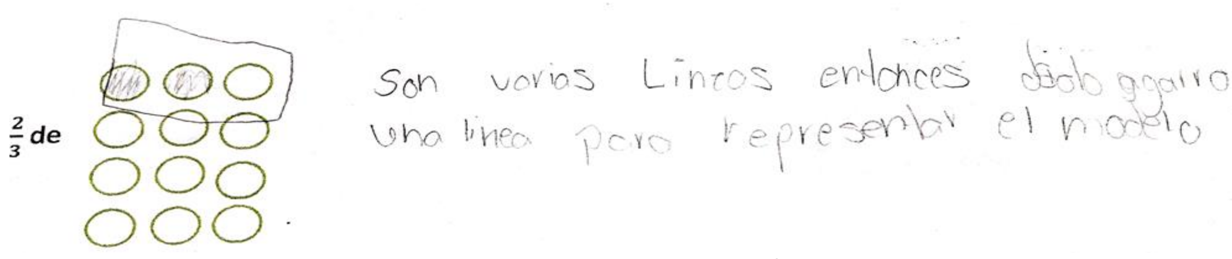


Figura 4.71 Error en la representación de la fracción $\frac{2}{3}$ en el modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.3 Resultados y análisis del ítem # 3

El problema 3 está orientado a la representación de la fracción empleando el modelo de longitud. Entre los hallazgos se pueden evidenciar que el 56% de los estudiantes realizó la correcta representación y argumentación conforme a la rúbrica de evaluación. El 11% de los estudiantes hizo la correcta conversión de la fracción, pero no logró argumentar su respuesta. Se observa que el 33% resolvió el ítem de manera inadecuado ya que no pudo realizar la correcta representación en el modelo de longitud. Se observan problemas recurrentes al dividir la figura en partes iguales.

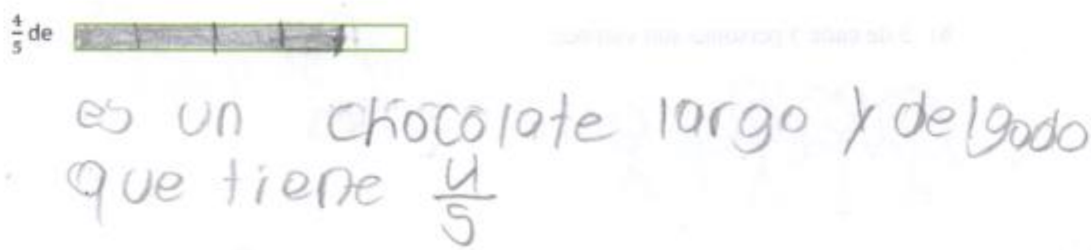


Figura 4.72 Adecuada representación en el modelo de longitud
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

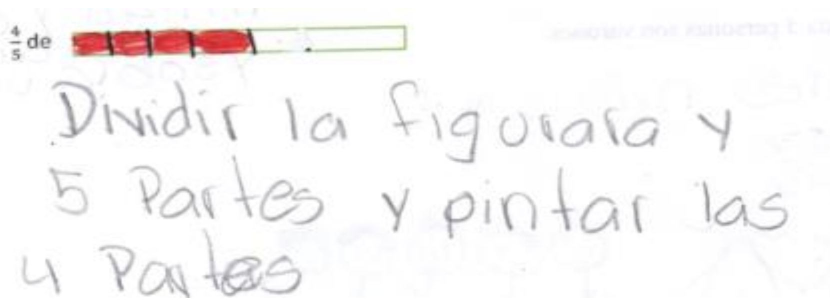


Figura 4.73 Dificultad en particionar una figura
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.4 Resultados y análisis del ítem # 4

El problema número cuatro de la presente sesión tiene como propósito realizar una conversión del lenguaje numérico al pictórico mediante un modelo elegido por el estudiante. En el ítem, se hace énfasis en el significado parte todo propuesto por Kieren (1976). Se puede evidenciar, de acuerdo con la rúbrica de evaluación que 55% de los estudiantes respondió el ítem de manera adecuada los estudiantes. El 28% respondió de manera parcial, ya que no argumentó su representación. El 17% de los estudiantes resolvió el ítem de manera inadecuada al no poder hacer la correcta conversión de la fracción.

Figura 4.74 Correcta representación de la fracción $\frac{3}{4}$ en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

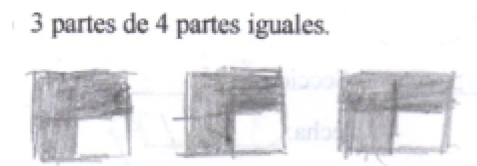


Figura 4.75 Interpretación errónea del subconstructo parte todo
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.5 Resultados y análisis del ítem # 5

El problema número 5 tiene como finalidad la conversión de la fracción $4\frac{1}{4}$ en un modelo visual. En el ítem se hace énfasis en el significado medida de la fracción mencionado por Kieren (1976). El estudiante decide en cuál de los 3 modelos es más pertinente su representación. Se evidencia que 28% de los estudiantes respondió al problema de manera adecuada, representando la fracción en los diferentes modelos conocidos. El 11% respondió de manera parcialmente adecuado ya que no pudo argumentar su respuesta correctamente de acuerdo con la rúbrica de evaluación. El 56% respondió de manera inadecuada, observando errores recurrentes al interpretar una fracción mixta o impropia. El 5% de los estudiantes no respondió el ítem.

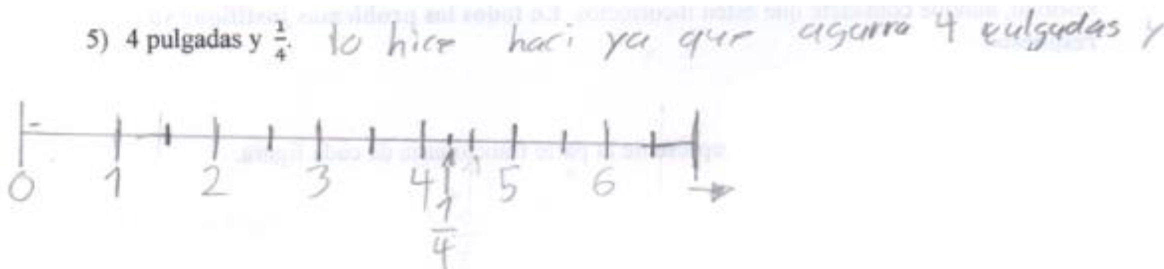


Figura 4.76 Conversión adecuada de la fracción mixta en un modelo de conjunto
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

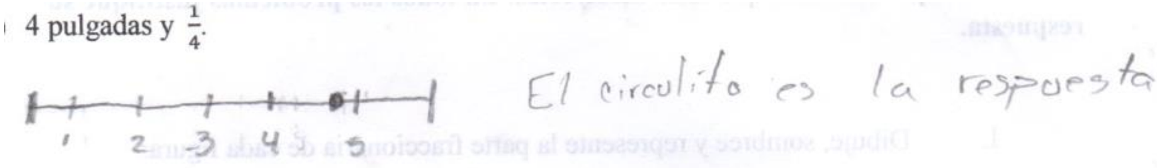


Figura 4.77 Error en la representación de la fracción $4\frac{1}{4}$
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.6 Resultados y análisis del ítem # 6

El ejercicio tiene como objetivo la conversión del significado operador de la fracción, donde se le presenta al estudiante la cantidad de L.600 lempiras y este, tiene que representar $\frac{1}{3}$ de esa cantidad en un modelo visual de su elección. Se puede observar que el 28% de los estudiantes respondió al problema de manera adecuada conforme a la rúbrica. El 17% de forma parcial ya que no argumentó su representación visual. El 39% de los estudiantes mostró errores en la representación de la fracción como operador, cuya respuesta es considerada de manera inadecuada según la rúbrica de evaluación. El 16% no respondió el ítem.

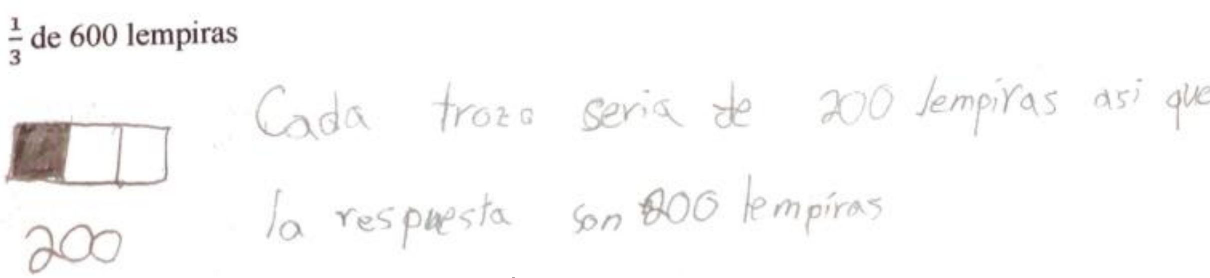


Figura 4.78 Ítem resuelto de manera adecuada
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

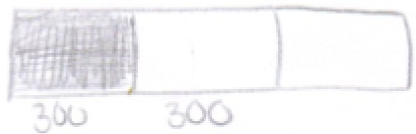


Figura 4.79 Error en la partición del entero L. 600
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.7 Resultados y análisis del ítem # 7

El ejercicio número 7 cuya finalidad era la conversión del lenguaje numérico al pictórico considerando el significado de la fracción cociente, en donde los estudiantes tenían la tarea de representarla en un modelo visual según fuese pertinente. Entre los hallazgos encontrados se puede observar que; el 17% contestó al ítem de manera adecuada. El 5% respondió de manera parcial ya que pudo hacer una correcta conversión de la fracción, pero no argumentó su representación visual. El 78% de los estudiantes respondió el ejercicio de manera inadecuada, identificando problemas al interpretar el concepto de denominador y representarlo en un modelo.

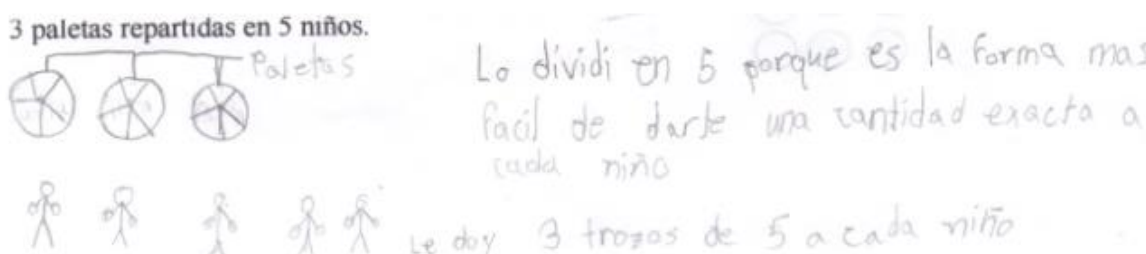


Figura 4.80 Correcta interpretación del significado cociente de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

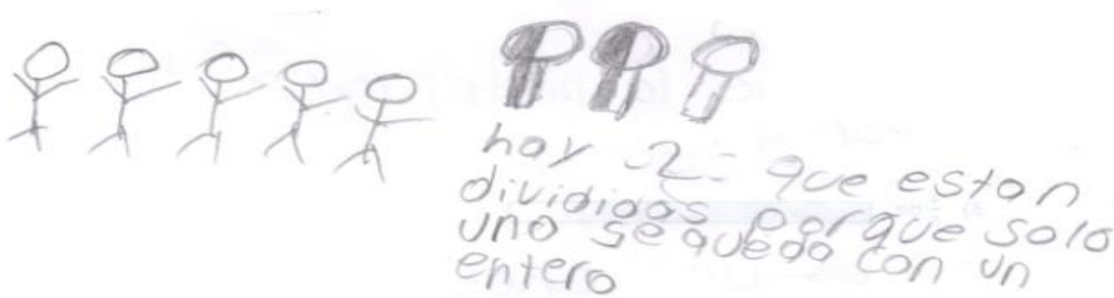


Figura 4.81 Error en la interpretación del significado cociente de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.8 Resultados y análisis del ítem # 8

El ejercicio número 8 cuyo propósito estaba enfocado en la conversión del significado razón de la fracción mediante la implementación de un modelo visual. Se pueden observar los siguientes hallazgos; el 61% de los estudiantes pudo realizar la conversión adecuadamente e interpretó el significado de razón correctamente. El 17% respondió el ítem de manera parcial, realizando la correcta conversión, pero no logró argumentar su respuesta. El 22% de los estudiantes contestó el ítem de manera errónea y mostró dificultades en la representación visual e interpretación del significado razón.

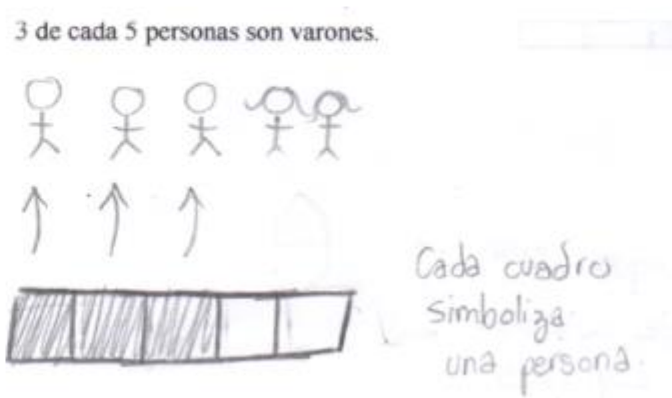


Figura 4.82 Correcta representación del significado razón de la fracción
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

Figura 4.83 Error en la interpretación verbal del problema.
Fuente: Elaboración propia con base a respuestas de los estudiantes

4.8.9 Resumen de la prueba final

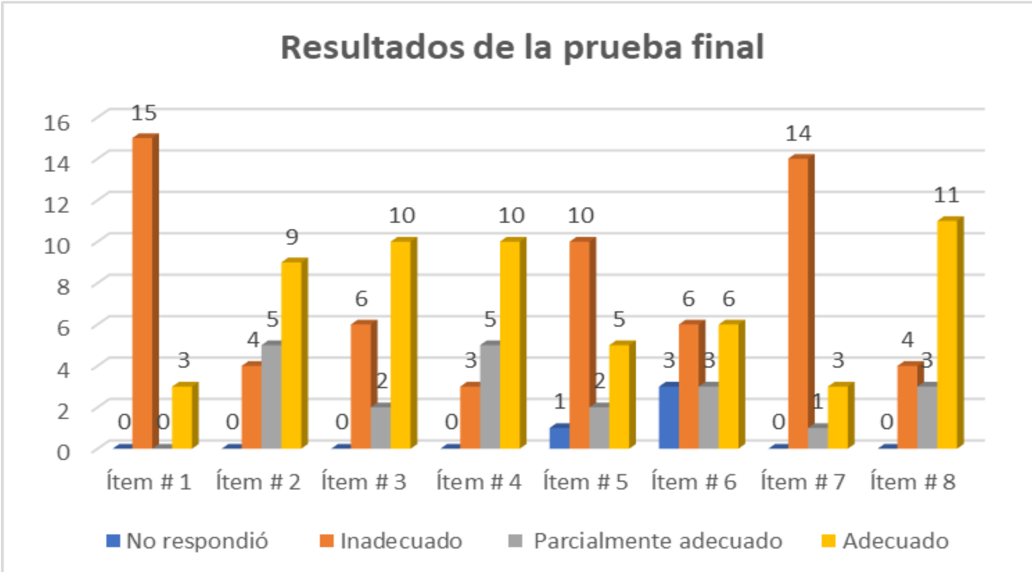
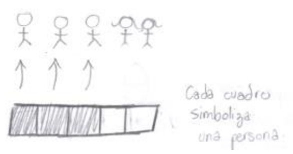


Figura 4.84 Resultados de la prueba final
Fuente: Elaboración propia con base a los resultados de la prueba final

Tabla 4.8
Nivel de comprensión matemática en la prueba final

Nivel de comprensión	Indicadores	Observaciones
Nivel de comprensión 3		Se puede evidenciar que el 61% de los estudiantes logra alcanzar un nivel de comprensión 3 al representar el significado razón de la fracción en un modelo de longitud (ver pág. 37).

Fuente: Elaboración propia a partir de Pirie y Kieren (1989)

En la prueba final, cuyo objetivo era evaluar la comprensión que los estudiantes tienen del concepto de fracción con la implementación de los diferentes modelos, se observa en el ítem 1 que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades en la división de las partes iguales de una figura que no es visualmente la figura tradicional como el círculo o un cuadrado, en este caso un pentágono. En el ítem 2 se observa que el 50% de los estudiantes respondió el ejercicio de manera correcta, al representar la fracción en el modelo de conjunto. No obstante, se observan errores en la parte del todo en este modelo. En el ítem 3, se observa que el 56% realizó la tarea de convertir la fracción dada en un registro numérico al registro de longitud. De igual manera, se observan errores en la división equitativa del modelo de longitud por parte de algunos estudiantes. En los ítems 4, 5, 6, 7 y 8 se evalúan los 5 significados de la fracción según Kieren (1976), donde los estudiantes pueden emplear un modelo visual que sea pertinente al caso.

En este sentido, se observa que el ítem 4, cuyo significado de la fracción es parte todo, la mayoría de los estudiantes representó correctamente la fracción en diferentes modelos. Aunque, algunos tuvieron dificultades al realizar la conversión de la fracción. En el ítem 5 se abordó el significado medida de la fracción, la mayoría resolvió el ítem erróneamente, mostrando errores recurrentes en este significado de la fracción y en el modelo de longitud. El ítem 6 abordó el significado operador de la fracción, se evidencia que un pequeño porcentaje comprende este subconstructo de la fracción, por otro lado, el resto de los estudiantes tuvo dificultades en interpretar este significado y en su correcta conversión. En el ítem 7, que estaba enfocado en el significado cociente, se observa que la mayoría de los estudiantes tenían dificultades en este significado en especial, en la división equitativa.

Finalmente, el ítem 8 cuyo significado de la fracción estaba enfocado en la razón de dos cantidades; se observa que la mayoría comprendió este significado y pudieron implementar diferentes registros de representación.

Con relación a lo anterior, se puede observar que el 61% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 3 en el ítem # 8, según los niveles de comprensión matemática propuestos por Pirie y Kieren.

4.9 Síntesis de resultados

A continuación, se presenta una síntesis de los principales resultados obtenidos con base a los objetivos propuestos en el trabajo de investigación. En cada tabla se destacan los objetivos de la investigación, los participantes, la teoría utilizada, así como las referencias para encontrar más información de cada punto mencionado.

Tabla 4.9
Síntesis de resultados del objetivo # 1

Investigación Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo
Objetivo 1. Explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes del Tercer Ciclo vinculados al concepto de fracción.
Participantes y recurso empleado – 18 estudiantes – 1 prueba diagnóstica (Ver anexo 1)
Marco teórico utilizado (Ver capítulo 2) – Diferentes interpretaciones de las fracciones propuesto por Kieren (1976) – Modelos de área, longitud y conjunto sugerido por el NTCM (2000) – Dificultades y errores en matemáticas propuesto por Rico (1995) – Los registros de representación semiótica propuesto por Duval (2006) – Los niveles de comprensión matemática propuesta por Pirie y Kieren (1989)
Principales resultados. Objetivo 1 – La mayoría de los estudiantes (72%) tiene una noción previa sobre las fracciones. (Ver figura 4.1) – El 78% de los estudiantes tiene errores en la comprensión y representación de la fracción impropia. (Ver figura 4.6) – La mayoría (83% y 89%) de los estudiantes tiene dificultades al interpretar el significado operador y cociente de la fracción en los ítems # 6 y # 7. (Ver figura 4.7 y 4.8) – El 100% de los estudiantes no pudo realizar la conversión del lenguaje numérico al gráfico. (Ver figura 4.9 y 4.10) – El 72% de los estudiantes se encuentra en un nivel 2 de comprensión de la fracción. (Ver tabla 4.1)

Fuente: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes

Tabla 4.10
Síntesis de resultados del objetivo # 2

Investigación Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo
Objetivo 2. Diseñar sesiones de trabajo que incluyan los modelos de área, longitud y conjunto relacionadas con el concepto de fracción.
Participantes y recurso empleado – 6 grupos de estudiantes. Cada grupo consta de 3 integrantes. – 6 sesiones de trabajo.
Marco teórico utilizado (Ver capítulo 2) – Diferentes interpretaciones de las fracciones propuesto por Kieren (1976) – Modelos de área, longitud y conjunto sugerido Van de Walle et al. (2010), Lamon (2012), Neagoy (2016) – La visualización en matemáticas Boaler (2016) – Los registros de representación semiótica propuesto por Duval (2006) – Los niveles de comprensión matemática propuesta por Pirie y Kieren (1989)
Principales resultados. Objetivo 2 – Diseño de la sesión de trabajo # 1 (Ver anexo 2) – Diseño de la sesión de trabajo # 2 (Ver anexo 3) – Diseño de la sesión de trabajo # 3 (Ver anexo 4) – Diseño de la sesión de trabajo # 4 (Ver anexo 5) – Diseño de la sesión de trabajo # 5 (Ver anexo 6) – Diseño de la sesión de trabajo # 6 (Ver anexo 7) Los problemas propuestos en el diseño de las sesiones de trabajo incluyeron: – Los modelos de área, longitud y conjunto. – Los diferentes significados de las fracciones – Actividades de conversión y tratamiento

Fuente: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes

Tabla 4.11

Síntesis de resultados del objetivo # 3

Investigación Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo
Objetivo 3. Reconocer las dificultades presentadas en los estudiantes sobre la representación del concepto de fracción en los diferentes modelos.
Participantes y recurso empleado – 6 grupos de estudiantes. Cada grupo consta de 3 integrantes. – 6 sesiones de trabajo.
Marco teórico utilizado (Ver capítulo 2) – Dificultades y errores en las fracciones presentadas por Rico (1995), Neagoy (2016), Ríos (2008) – El enfoque constructivista (Sección 2.6)
Principales resultados. Objetivo 3 – El 83% de los estudiantes presentó errores en la representación de la fracción $\frac{2}{4}$ al utilizar el modelo de área. (Ver figura 4.25) – El 100% de los estudiantes mostró dificultades en la representación del concepto de fracción en el modelo de longitud. (Ver figura 4.35) – Todos los estudiantes (100%) mostraron dificultades al graficar una fracción impropia en un modelo de conjunto dado. (Ver figura 4.65)

Fuente: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes

Tabla 4.12
Síntesis de resultados del objetivo # 4

Investigación Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo
Objetivo 4. Identificar qué modelo visual evidencian los estudiantes para la comprensión del concepto de fracción.
Participantes y recurso empleado – 6 grupos de estudiantes. Cada grupo consta de 3 integrantes. – 6 sesiones de trabajo. – 1 prueba final
Marco teórico utilizado (Ver capítulo 2) – Dificultades y errores en las fracciones presentadas por Rico (1995), Neagoy (2016), Ríos (2008) – El enfoque constructivista (Sección 2.6)
Principales resultados. Objetivo 4 – En el modelo de conjunto se evidencia un aprovechamiento de los estudiantes del 78% en diversos ítems. (Ver figuras 4.49, 4.63, 4.64 y 4.69) – Se evidencia un aprovechamiento del 56% en el modelo de área en ítems recurrentes. (Ver figuras 4.12, 4.26 y 4.67) – El 46% de los estudiantes respondió de manera correcta diversos ítems del modelo de longitud. (Ver figuras 4.32, 4.44 y 4.72) – El 100% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 4 en el ítem # 1 del modelo de conjunto. (Ver tabla 4.6)

Fuente: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes

Tabla 4.13
Síntesis de resultados del objetivo # 5

Investigación Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo
Objetivo 5. Analizar de qué manera la implementación de diversos modelos visuales coadyuva a la comprensión del concepto de fracción en los estudiantes del Tercer Ciclo.
Participantes y recurso empleado – 6 grupos de estudiantes. Cada grupo consta de 3 integrantes. – 6 sesiones de trabajo. – 1 prueba final
Marco teórico utilizado (Ver capítulo 2) – El enfoque constructivista (Sección 2.6) – Diferentes interpretaciones de las fracciones propuesto por Kieren (1976) – Modelos de área, longitud y conjunto sugerido por el NTCM (2000) – Los registros de representación semiótica propuesto por Duval (2006) – Los niveles de comprensión matemática propuesta por Pirie y Kieren (1989) – La visualización en matemáticas Boaler (2016)
Principales resultados. Objetivo 5 – Un correcto desarrollo de la tarea a partir de un modelo dado de parte del 83% de los estudiantes. (Ver figura 4.14) – Los modelos fomentaron la visualización de las fracciones. (Ver figuras 4.20, 4.22, 4.24, 4.29, 4.32, 4.50 y 4.78) – El 56% de los estudiantes mostró una mejoría en el modelo de longitud de la prueba final. (Ver figura 4.72) – El 61% de los estudiantes alcanzó un nivel de comprensión 3 en el ítem # 8 de la prueba final. (Ver tabla 4.8)

Fuente: Elaboración propia a partir de las producciones de los estudiantes

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

Sobre el análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en los estudiantes del Tercer Ciclo; los cuales presentan dificultades en este objeto matemático y basados en los hallazgos del presente estudio y en los objetivos de investigación se describen las siguientes conclusiones.

Con relación al primer objetivo que se planteó en el estudio sobre explorar los conocimientos previos que poseen los estudiantes vinculados al concepto de fracción, no se reflejan de manera satisfactoria en la prueba diagnóstica. Se observó que el 78% los estudiantes no cuentan con los conocimientos sobre conceptos básicos en fracciones y sus diferentes interpretaciones (ver tabla 4.9), que según las indicaciones del DCNB (2000) estos se deben enseñar en los cursos previos. Lo anterior demuestra que los estudiantes de séptimo grado no cumplen con las competencias necesarias, señaladas por los estándares en matemáticas que van de la mano para lograr con éxito el resto de los tópicos del curso. Algunas de las dificultades, debilidades y errores que se observaron es en la etapa diagnóstica son:

a) Dificultades

- Dificultades en identificar figuras que parecen correctamente divididas. (Ver figura 4.3).
- Los estudiantes tienen dificultades al dividir una figura en partes iguales. (Ver figura 4.5).
- Dificultades en el subconstructo cociente de la fracción. (Ver figura 4.7).
- Dificultades en la conversión del lenguaje numérico al gráfico mediante la implementación del modelo visual de longitud. (Ver figura 4.10).

b) Errores

- Errores en la escritura de parte de los estudiantes. (Ver figura 4.1).
- Error en la representación del concepto de fracción. (Ver figura 4.2).
- Errores en la representación de una fracción impropia. (Ver figura 4.6).

c) Debilidades

- Debilidades en el significado cociente de la fracción. (Ver Figura 4.7).
- Debilidades al interpretar la fracción como operador. (Ver Figura 4.8).

Por otra parte, se observa que el 72% de los estudiantes se encuentran en el segundo nivel de comprensión según Pirie y Kieren (1989), ya que lograron asociar las fracciones con esquemas mentales previos de los cursos anteriores.

Con respecto al segundo objetivo referente al diseño de sesiones de trabajo que incluyan los modelos de área, longitud y conjunto relacionadas con el concepto de fracción; estas fueron diseñadas en conformidad con los señalamientos del NCTM (2000) en donde menciona que la enseñanza de las matemáticas debe ser de forma visual y que los estudiantes deben estar sometidos a una diversidad de modelos. Aunado a lo anterior, se implementó la teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (2006), tomando en consideración los registros, pictóricos, numérico y gráfico. Sobre el objeto matemático se consideraron, en las sesiones de trabajo, los significados de parte todo, cociente, razón, operador y medida en el marco de la teoría sugerido por Kieren (1976) para la comprensión del concepto fracción. Además, en las sesiones incluyeron ejercicios sobre el concepto de fracción impropia, igualdad de fracciones y la relación de orden entre dos fracciones. En el desarrollo de las sesiones de trabajo se hizo énfasis en la comprensión del concepto dejando a un lado los algoritmos y su memorización.

En relación con los párrafos anteriores, las sesiones de trabajo fueron diseñadas con la finalidad de que los estudiantes estuviesen sometidos a actividades donde prevaleciera la visualización matemática sobre la algorítmica; los estudiantes realizaron conversiones de un registro dado a otro en cada una de las sesiones; tal como lo señala Boaler (2016:185) sobre la importancia de la visualización en las actividades matemáticas.

Por otra parte, en cada una de las sesiones de trabajo se consideraron los niveles de comprensión matemática propuestos por Pirie y Kieren (1989), los cuales nos proporcionaron un amplio panorama de la comprensión del concepto de fracción que los estudiantes tienen al aplicar las sesiones de trabajo sobre este objeto matemático.

El tercer objetivo de la investigación; reconocer las dificultades presentadas en los estudiantes sobre la representación del concepto de fracción en los diferentes modelos. En este sentido, se observaron grandes dificultades en la representación de una fracción en el modelo de longitud, ya que el 100% de los estudiantes presentaron errores en la representación del denominador en la recta numérica en ciertos ítems (ver figura 4.34 y 4.35); error que también se evidenció en la prueba diagnóstica debido a una poca experiencia de parte de los estudiantes con este modelo (ver figura 4.9). También se observaron dificultades al representar una fracción impropia en un registro de conjunto ya proporcionado, debido a que los estudiantes confundían la unidad cuando se les proporcionaban dos figuras que representan un entero (ver figura 4.65). Por otra parte, se observaron dificultades en la relación de orden de dos fracciones que tenían distintos denominadores y en su representación visual como tal.

En relación con el párrafo anterior, muchos estudiantes (83%) tuvieron dificultades en el tratamiento en un modelo de conjunto ya dado (ver figura 4.54). En este mismo sentido, se identificaron errores en la división equitativa de las figuras el cual era recurrente, según los estudiantes, dividían la figura en partes iguales (ver figura 4.27), pero en las sesiones de trabajo se evidenció lo contrario; ya que muchas figuras estaban divididas erróneamente tal y como lo señala Neagoy (2016) sobre esta dificultad en las fracciones.

En consecuencia, se aprecian debilidades en algunos significados del concepto de fracción; ya que no todos tenían la fortaleza en la comprensión de los diferentes significados propuestos por Kieren (1976), a pesar de que se introdujo el tema antes iniciar las sesiones de trabajo.

Con respecto al cuarto objetivo de investigación; identificar qué modelo visual evidencian los estudiantes para la comprensión del concepto de fracción. En relación con lo anterior, se puede observar que el 78% de los estudiantes tuvo un buen desempeño en algunos ítems relacionados con el modelo de conjunto. En este sentido, es importante mencionar que los estudiantes no tenían experiencia alguna con las fracciones discretas, ya que durante las discusiones en los grupos focales mostraron un desconocimiento del modelo de conjunto.

Por otra parte, los estudiantes evidenciaron un aprovechamiento del 56% en las respuestas de algunos ítems concernientes al modelo de área (ver figura 4.12, 4.26 y 4.67). En este sentido, los estudiantes ya tenían una noción de algunos modelos de área tal y como se mostró en la prueba diagnóstica. No obstante, presentaron errores al momento de interpretar los diferentes significados de las fracciones en un modelo de área no convencional (ver figura 4.15 y 4.67). Además, se pueden observar dificultades al momento de dividir las figuras en el modelo de área como es el caso de ítem # 1 de la prueba final (ver anexo 1); ya que solo el 17% de los estudiantes mostró un buen desempeño en este modelo (ver sección 4.8.1). En este mismo sentido, Neagoy (2016:70) señala que “es un error típico en la repartición de una figura ya que muchos estudiantes no se percatan que las áreas sean iguales”.

Con relación al modelo de longitud, se evidencia que el 46% de los estudiantes logró un buen desempeño en ciertos ítems relacionados con este modelo (ver figuras 4.32, 4.44 y 4.72). No obstante, en este modelo es donde se observan más debilidades de parte de los estudiantes, sobre todo cuando se utiliza la recta numérica para la representación de las fracciones propias e impropias (ver figuras 4.30, 4.31 y 4.34). Es importante recalcar, que los estudiantes tenían muchas debilidades previas al implementar el modelo de longitud tal y como se muestra en el ítem # 8 de la prueba diagnóstica (ver figuras 4.9, 4.10 y 4.11).

Aunado a los párrafos anteriores, se puede apreciar que todos los estudiantes alcanzaron un nivel de comprensión 4 en el ítem # 1 relacionado con el modelo de conjunto. En este sentido se pue apreciar, que los estudiantes evidenciaron un mayor desempeño con este modelo.

En cuanto al quinto objetivo, sobre la manera en que la implementación de diversos modelos visuales coadyuva a la comprensión del concepto de fracción, se pudo observar que: el empleo de los modelos visuales contribuyó a la comprensión del concepto de fracción en diversos ítems de las sesiones de trabajo presentadas. Los estudiantes estuvieron inmersos en diferentes conversiones en los registros numérico, pictórico y gráfico; y en tratamientos en un registro ya dado (ver figura 4.14); lo cual implica según Hitt (1998) y Duval (2006) el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, con la implementación de los modelos se fomentó la visualización matemática, ya que el 61% de los estudiantes pudo lograr el nivel 3 de comprensión del concepto de fracción, en el ítem # 8 de la prueba final (ver figura 4.82), lo cual se debe al involucramiento en cada uno de los modelos visuales tal y como señalan Van de Walle et al., (2007: 288) “los modelos visuales usados de manera apropiada pueden ayudar a los estudiantes a entender las ideas que se confunden en un mundo simbólico". En relación con lo anterior, se puede observar en cada una de las sesiones de trabajo que los estudiantes tuvieron un mejor desenvolvimiento al utilizar un dibujo que al resolver un problema (ver figura 4.20) mediante un algoritmo común. Por su parte, Lamon (2012) enfatiza en la enseñanza de las fracciones es importante que se utilicen diversos modelos visuales para su representación para que los niños no se acostumbren a pensar en una sola manera cuando se les mencione este objeto matemático.

Por otra parte, el 56% de los estudiantes logró representar en el modelo de longitud en el ítem # 3 de la prueba final. Cabe recalcar, que en la prueba diagnóstica y en las sesiones de trabajo los estudiantes mostraron un rendimiento muy bajo en este modelo. Lo anterior demuestra, que las sesiones de trabajo diseñadas a través de los modelos visuales, contribuye a que los estudiantes comprendan de una mejor manera los conceptos matemáticos, en este caso particular, el concepto de fracción.

Por lo tanto, las sesiones de trabajo basadas en la teoría de representaciones semióticas de Duval (2006) y la implementación de los modelos visuales de área, longitud y conjunto señalados por diversos autores de la enseñanza de la matemática, se puede observar que dichos modelos coadyuvan a la comprensión de este objeto matemático.

5.2 Recomendaciones

Se realizan las siguientes recomendaciones basadas en los hallazgos del estudio sobre la comprensión del concepto de fracción.

El concepto de fracción debe ser enseñado involucrando actividades que incluyan los diferentes significados, Neagoy (2016) menciona que, los niños desde edades tempranas deben estar sometidos a problemas relacionados con las fracciones y sus operaciones. De igual manera la implementación de los modelos visuales que el NCTM (2000) sugiere desde los comienzos de la escuela, fomenta la visualización matemática. Por lo anterior mencionado, se necesita estimular las habilidades cognitivas que los niños desde muy pequeños ya traen consigo; mediante actividades innovadoras que tomen consideración la visualización de los objetos matemáticos.

A los docentes en general, se les recomienda tomarse el tiempo en crear ejercicios de fracciones que incluyan problemas de visualización y limitar el tiempo al empleo de algoritmos que los estudiantes tienen que memorizar y no crean ninguna conexión matemática.

A la escuela Happy Summer School, se le recomienda capacitar a sus docentes en las diferentes áreas de la enseñanza de las matemáticas con la implementación de la visualización como ayuda didáctica para la mejora de la comprensión de los objetos matemáticos; en especial en el área de las fracciones. Así mismo, se les sugiere un diferente abordaje del tema de las fracciones y sus diferentes significados ya que es enseñado en varios niveles del sistema educativo hondureño según el DCNB (2000).

A la Secretaría de Educación se le recomienda la implementación de actividades visuales en el curso de séptimo grado, que promuevan la comprensión del concepto de fracción y así mismo el empleo de los modelos visuales de área, longitud y conjunto desde edades tempranas. La enseñanza de las fracciones debería ser vista desde un panorama distinto y evitar que los estudiantes memoricen algoritmos sin realizar ninguna confección mental entre los conceptos.

A la Dirección de Posgrado de la UPNFM se le recomienda dar seguimiento al presente estudio sobre la comprensión de las fracciones y los modelos visuales, ya que es un tema muy amplio y relevante para continuar estudiándolo.

Referencias Bibliográficas

Aksu, M. (1997). *Student performance in dealing with fractions*. The Journal of Educational Research, 90(6), 375-380.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). *Rational number concepts*. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). *Visualización y pensamiento matemático*. Acta latinoamericana de matemática educativa, 16(2), 694-701.

Carretero, M. (2005). *Constructivismo y educación*. México, D.F.: Editorial Progreso.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics.* Washington, DC: CCSSO & National Governors Association. Recuperado de http://www.corestandards.org/Math/

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. Revista Ciencias de la Educación, 19 (33), 229-247

D'Amore, B. (2009). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Revista científica, 11, 150-164.

D´Amore, B., Fandiño, M. I. & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* (M. Fandiño, Trad.). Bogotá: Magisterio.

DCNB. (2000). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica.* Tegucigalpa: LITHOPRESS INDUSTRIAL

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). *El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el* *mecanismo "folding back"*. Avances de Investigación en Educación Matemática, 6, 25 - 44.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking–The Registers of Semiotic Representations*. Cham, Switzerland, Springer International Publishing.

Ervin, H.K. (2017). *Fraction multiplication and division models: A practitioner reference paper*. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3(1), 258-279

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). Enseñanza de las fracciones. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000212781_spa

Flotts, P., Manzi, J., Barrios, C., & Mejías, N. (2016). *Aportes para la enseñanza matematicas*. Chile: Place de Fontenoy.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holanda: Reidel Pub.

González Retana, J. F. y Eudave Muñoz, D. (2018). *Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales*. Educación matemática, 30(2), 106-139.

Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Education.

Historia de África (s.f). *Papiro de Rhind y papiro de Moscú las fuentes africanas de las matemáticas.* Recuperado de https://historiadeafrica.com/papiro-de-rhind-y-papiro-de-moscu-las-fuentes-africanas-de-las-matematicas/

Hitt, F. (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum.* Educación Matemática, 10(02), 23-45.

Hodgkin, L. (2005). *A history of mathematics: from Mesopotamia to modernity*. Oxford University

IEA. (2012). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias.* Volumen I. Informe Español. Press on Demand. Recuperado de https://ampaipse.files.wordpress.com/2012/12/pirls-e28090-timss-2011-volumen-ii.pdf

Kajander, A. & Boland, T. (2014). Mathematical models for teaching: Reasoning without memorization. Toronto, ON: Canadian Scholars' Press.

Kieren T. E. (1976). "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers," in R. A. Lesh (Ed.), Number and Measurement (pp. 101–145). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kieren T. E. (1980). "The rational number construct — its elements and mechanisms," in T. E. Kieren (Ed.), Recent Research on Number Learning (pp. 125–149). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science Mathematics, and Environmental Education.

Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia. Bogotá: Una empresa docente.

Kitzinger, J. (1995). *Qualitative research: introducing focus groups*. Bmj, 311(7000), 299-302.

Lamon, S. J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). New York: Routledge.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3ra ed.). New York: Routledge.

Matute Colindres, K. V. (2010). *Concepciones Matemáticas en los estudiantes de Séptimo Grado de la Escuela Normal Pedro Nufio* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Francisco Morazán, Honduras.

Meel, D. E. (2003). *Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6(3), 221-278.

Mendoza Valencia, M. R. (2013). *Significando el paso al límite en estudiantes que inician cálculo* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Francisco Morazán, Honduras.

NCTM. (s.f.). *Fraction Models.* Recuperado de https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/x1

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematics success for all. Reston, VA: NCTM.

Neagoy, M. (2016). *Unpacking fractions: Classroom-tested strategies to build students'* *mathematical understanding*. Alexandria, Virginia: ASCD.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). *Los registros semióticos de representación en matemática.* Aula Universitaria, 1(13), 29-36.

OECD (2016), *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, PISA*, OECD Publishing, Paris. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

Palmer, C. I., & Bibb, S. F. (2003). *Matemáticas prácticas*. Barcelona: Reverté.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). *A recursive theory of mathematical understanding*. For the learning of mathematics, 9(3), 7-11.

Radatz, H. (1980). *Students' errors in the mathematical learning process: a survey. For the learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.

Rebollo, T. C. (2001). *Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces* (Vol. 2). Universidad de Sevilla.

Rendón, R. y Londoño, R. (2013). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Recuperado de http://hdl.handle.net/10495/3253

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.

Ríos, Y. (2008). *Las fracciones: sus representaciones externas e interpretaciones* (Tesis doctoral). Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela).

Secretaría de Educación. (2010). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2010 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2011a). Estándares Educativos Nacionales Español y Matemáticas 1er-11mo grado. Tegucigalpa.

Secretaría de Educación. (2012). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2012 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2013). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2013 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2014). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2014 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2015). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2015 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras.

Secretaría de Educación. (2017). *Informe Nacional de Desempeño Académico 2016 Español y Matemáticas. 1ro a 9no grado. Proyecto Mejorando el Impacto al Desempeño Estudiantil de Honduras*, MIDEH. Honduras

Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics. For the learning of mathematics*, *10*(3), 24-41.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años*. Barcelona-España: Crítica.

Swokowski, E., & Cole, J. (2009). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Edamsa Impresiones.

UPNFM, (2017). *Sistema de Líneas Institucionales de Investigación 2017-2018*. Tegucigalpa: COIMPRES.

Van de Walle, K., & Karp, K. Baywilliams. 2010. *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (7th ed.). Boston: Pearson.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 149-56.

Vizcarra, R. E., & Sallán, J. M. G. (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria.* Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 1, 17-35.

Zarzar, C. B. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Horizontes Pedagógicos, 15(1).

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). *Understanding primes: The role of representation. Journal for research in mathematics education, 164-186.*

Anexos

Anexo 1: Prueba diagnóstica

Anexo 2: Sesión de trabajo # 1

Anexo 3: Sesión de trabajo # 2

Anexo 4: Sesión de trabajo # 3

Anexo 5: Sesión de trabajo # 4

Anexo 6: Sesión de trabajo # 5

Anexo 7: Sesión de trabajo # 6

Anexo 8: Prueba final

Anexo 9: Rúbricas de evaluación y resultados

Anexo 10: Fotografías

Anexo 11: Constancias de validación

Anexo 12: Observaciones de la validación de los instrumentos

Anexos

Anexo 1: Prueba diagnóstica

Anexo 1: Prueba Diagnóstica

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del estudiante: ______________________ _____Sección: _________

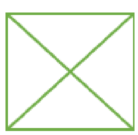
Curso: Séptimo grado Fecha: __________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 8 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. En todos los problemas justifique su respuesta.

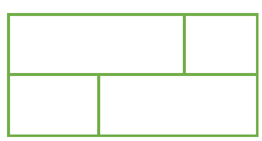
1. ¿Para qué se utilizan las fracciones? Explique con sus palabras y realice un ejemplo a través de una figura.

2. Clasifique las siguientes figuras según estén correcta e incorrectamente divididos en cuartos. Explique cada una de sus respuestas.

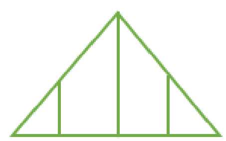
a)

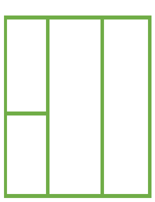


b)



c)





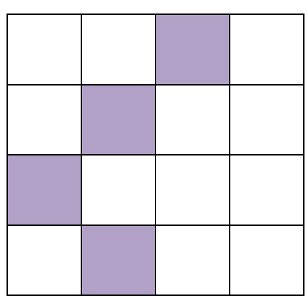
d)

e)

3. Si usted ha limpiado $\frac{3}{5}$ del patio de su casa. Represente en el rectángulo como luciría esa fracción del patio. Describa con sus palabras porque lo realizó de esa manera.

4. ¿Cómo representaría la fracción $\frac{5}{3}$ de manera gráfica. ¿Explique por qué hizo esa representación?

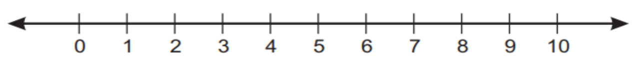
5. ¿Qué fracción representan los cuadrados coloreados del total? Justifique su respuesta.



6. Si hay 7 baleadas y se tienen que repartir equitativamente entre 4 niños. ¿Cuánto le tocara a cada niño? Haga uso de una representación gráfica. Describa su razonamiento.

7. En la panadería Tabora se hornean 240 pasteles al día, de los cuales $\frac{3}{10}$ son de chocolate. ¿cuántos pasteles de chocolate se hornean al día? ¿porque esa cantidad? Realice un dibujo de la situación.

8. Marque con un punto que represente la fracción $\frac{4}{5}$ en la recta numérica. Justifique su respuesta.



Anexo 2: Sesiones de trabajo # 1

Sesión de trabajo # 1

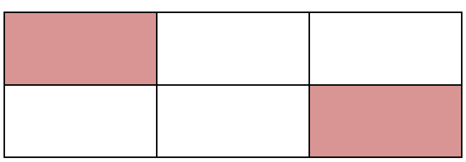
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ________________________________

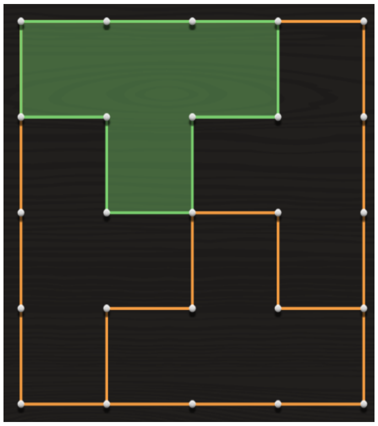
Curso: Séptimo grado Fecha: _______

Instrucciones: A continuación, se le presenta 5 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. **En todos los problemas justifique su respuesta.**

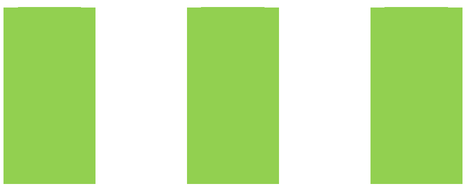
1. ¿Qué fracción representa el área sombreada del total? Explique su respuesta.



2. Se presenta un geoplano ¿qué fracción representa el área sombreada? ¿por qué esa cantidad?



3. En la figura identifique lo siguiente:



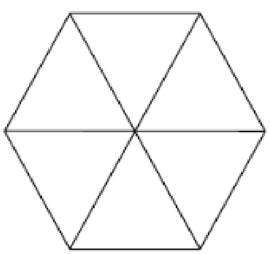
a) Fracción sombreada: _______________

b) En la misma figura, traces líneas para tener 15 partes iguales.

c) ¿Cuál es la fracción sombreada ahora? Explique.

d) ¿Qué observa entre la primera fracción y la segunda?

4. Se presenta un hexágono. Pinte las siguientes regiones.

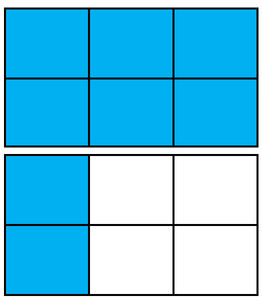


a) Dos regiones. ¿Qué fracción representa?

b) Ahora, trace líneas que divida la figura en 12 partes iguales y luego coloree un triángulo más ¿Qué fracción representa el área pintada?

c) ¿Qué puede decir de las dos fracciones? ¿qué fracción es mayor?

5. Siendo la unidad las dos figuras. Conteste.



a) ¿Qué fracción representa el área sombreada del total?

b) ¿Por qué esa cantidad?

Anexo 3: Sesiones de trabajo # 2

Sesión de trabajo # 2

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ____________________________________

Curso: Séptimo grado   Fecha: __________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 4 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. **En todos los problemas justifique su respuesta.**

1. Represente mediante un dibujo de área las fracciones.
   a) $\frac{4}{8}$
   b) $\frac{1}{2}$
   c) ¿Qué observa entre ambas representaciones? Realice una comparación.

2. ¿Qué fracción es mayor $\frac{7}{8}$ ó $\frac{7}{9}$?. Realice una comparación mediante un modelo de área.

3. El patio de la casa de Fernando es de forma rectangular, en el cual tiene sembrado $\frac{1}{8}$ de zanahorias, $\frac{2}{4}$ de tomates y el resto es repollo. Realice un dibujo de esta representación. Utilice un modelo de área. ¿cuánto hay de repollo?

4. La mesada de Vivian es de 500 lempiras. Si ha gastado $\frac{1}{4}$ de esa cantidad en la cafetería. Represente esa cantidad en un modelo de área.

Anexo 4: Sesiones de trabajo # 3

Sesión de trabajo # 3

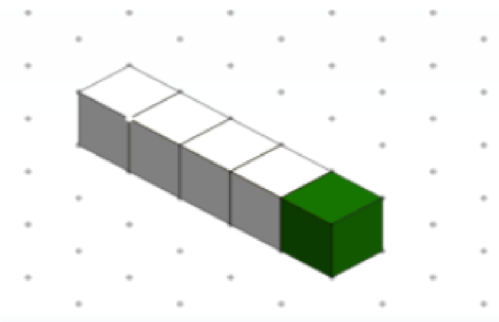
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ____

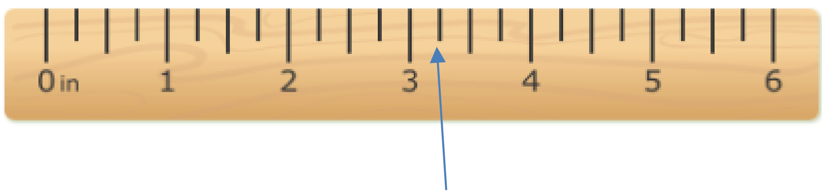
Curso: Séptimo grado Fecha: __________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 4 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. **En todos los problemas justifique su respuesta**.

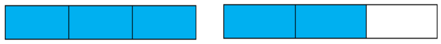
1. Se presenta una figura. Explique de manera numérica que representa el cubo sombreado. Justifique su respuesta.



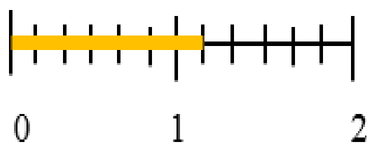
2. Se le presenta una regla que está en pulgadas. Explique ¿qué fracción se encuentra señalada por la flecha?



3. Las siguientes figuras representan un entero. Explique de forma numérica la fracción que representan.



4. Observe el segmento en la recta numérica. Escriba la fracción de forma numérica que representa. ¿Cómo llegó a esa conclusión?



Anexo 5: Sesiones de trabajo # 4

Sesión de trabajo # 4

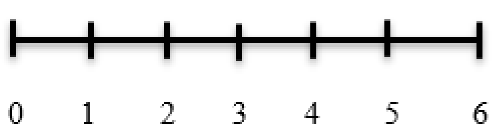
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ____

Curso: Séptimo grado Fecha: __________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 5 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. **En todos los problemas justifique su respuesta.**

1. Represente en la recta numérica la fracción $\frac{4}{5}$.Justifique su respuesta.



2. Represente las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ en un modelo de longitud. ¿Que observa en su dibujo? ¿Qué fracción es mayor? ¿Por qué?

3. Represente la fracción $\frac{4}{3}$ en un modelo de longitud. Escriba otra fracción que sean equivalente a $\frac{4}{3}$ en otro modelo de longitud. ¿Que observa?

4. Emiri da a su hijo José 300 lempiras semanales para que él compre en la cafetería de la escuela. Hasta el momento ha gastado $\frac{1}{3}$ de esa cantidad. Represente en un modelo lineal la cantidad que José tiene ahora.

5. En un aula, se determinó que por cada 10 estudiantes hay 6 niñas. Represente en una recta numérica su razonamiento.

Anexo 6: Sesiones de trabajo # 5

Sesión de trabajo # 5

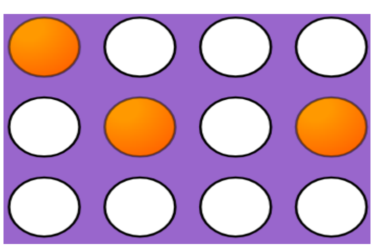
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ____

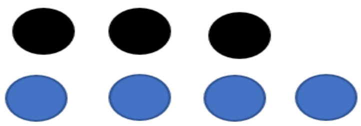
Curso: Séptimo grado Fecha: ___________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 4 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. En todos los problemas justifique su respuesta.

1. ¿Qué fracción representan las figuras sombradas en el conjunto?

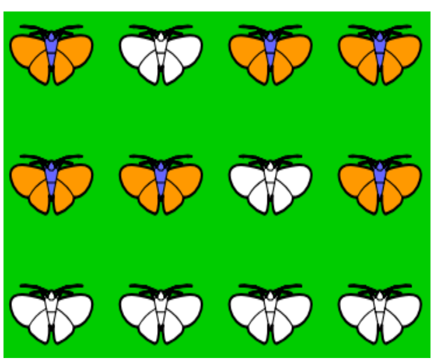


2. ¿Cuál es la relación numérica entre las bolas negras y azules? Justifique su respuesta. Redacte un ejemplo de la vida real de esta situación.



3. ¿Qué fracción representan las bolas amarillas de las azules en el conjunto? Dibuje un nuevo conjunto que sea equivalente al primero.

4. ¿Qué fracción representan las mariposas blancas en el conjunto? Reordene el conjunto de otra manera. ¿Qué fracción representa el conjunto que usted ordeno? ¿Qué relación existe entre el primer conjunto y el segundo? Explique.



Anexo 7: Sesiones de trabajo # 6

Sesión de trabajo # 6

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre de los integrantes del grupo: ____________________________

Curso: Séptimo grado   Fecha: _______

Instrucciones: A continuación, se le presenta 4 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. En todos los problemas justifique su respuesta.

1. ¿Cuál será mejor en un juego, un gane de 5:6 o uno de 2:3? Realice un modelo de conjunto de ambas situaciones. Explique su razonamiento.

2. Compare las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$. Utilice un modelo de conjunto. ¿Que observa?

3. Representa la fracción $\frac{5}{4}$ en un modelo de conjunto. ¿porque lo hizo así?

4. Grafique la fracción $\frac{3}{2}$ si la unidad es:

¿Por qué lo hizo de esa manera?

Anexo 8: Prueba final

Prueba Final

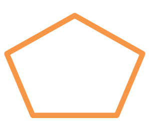
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

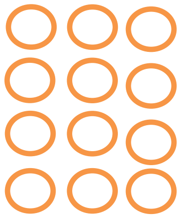
Nombre del estudiante: ________________________ _____Sección: _________

Curso: Séptimo grado Fecha: __________

Instrucciones: A continuación, se le presenta 8 problemas que tiene que resolver de forma clara y ordenada dejando evidencia de todo su procedimiento. No borre ninguno de los problemas que resolvió, aunque considere que estén incorrectos. **En todos los problemas justifique su respuesta.**

I. Dibuje, sombree y represente la parte fraccionaria de cada figura.

1) $\frac{2}{5}$ de 

2) $\frac{2}{3}$ de 

3) $\frac{4}{5}$ de 

II. Represente las siguientes fracciones empleando un modelo visual (área, longitud ó conjunto.

4) 3 partes de 4 partes iguales.

5) 4 pulgadas y $\frac{1}{4}$.

6) $\frac{1}{3}$ de 600 lempiras

7) 3 paletas repartidas en 5 niños.

8) 3 de cada 5 personas son varones.

Anexo 9: Rúbricas de evaluación y resultados

Rúbrica de evaluación para la prueba diagnóstica.

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	El estudiante deja el ejercicio en blanco sobre el correcto uso del concepto de fracción.	Responde el ejercicio de manera correcta pero no realiza la representación visual o viceversa.	Realiza una explicación correcta de la fracción, pero falla en la representación visual.	Responde correctamente sobre la utilización de las fracciones, representa de manera correcta con un ejemplo y argumenta su respuesta.
Ítem # 2	No aporta ninguna clasificación de las figuras dadas.	Clasifica las figuras, pero tiene uno o más ítems con errores.	Realiza una correcta clasificación de todos los ítems, pero no argumenta.	Clasifica de manera correcta cada una de las figuras y argumenta su respuesta.

Ítem # 3	No representa en el rectángulo la fracción $\frac{3}{5}$.	Representa la fracción en el rectángulo de manera incorrecta.	Representa la fracción en el rectángulo, pero no explica por qué lo realizó de esa manera o no aporta datos relevantes.	Representa en el rectángulo la fracción y argumenta su respuesta.
Ítem # 4	No aporta ninguna representación de la fracción impropia.	Representa de manera incorrecta la fracción impropia.	Representa la fracción impropia pero no explica como lo realizó.	El estudiante representa la fracción impropia de manera correcta y argumenta su respuesta.
Ítem # 5	No responde cuanto representa los cuadrados coloreados del total.	Realiza la conversión de manera incorrecta.	Responde de manera correcta la representación, pero no argumenta su respuesta.	Responde de manera correcta y argumenta su respuesta.
Ítem # 6	No realiza una representación visual o deja el ítem en blanco.	Realiza una representación errónea de la fracción como cociente.	El estudiante representa la fracción como cociente, pero no explica su razonamiento.	El estudiante representa la fracción de manera correcta y explica su razonamiento.

Ítem # 7	No realiza ninguna representación visual o numérica de la fracción como operador.	Realiza una representación errónea de la fracción como operador.	Realiza el correcto tratamiento, pero no hace la conversión.	Representa y argumenta la representación de la fracción como operador de manera correcta.
Ítem # 8	No representa la fracción en la recta numérica.	Representan erróneamente la fracción como medida en la recta numérica.	Grafica correctamente la fracción en la recta numérica pero no argumenta su respuesta.	Gráfica y argumenta la representación visual de la fracción como medida.

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	5	0	13
Ítem # 2	0	7	3	8
Ítem # 3	0	10	5	3
Ítem # 4	0	14	0	4
Ítem # 5	0	3	2	13
Ítem # 6	0	15	0	3
Ítem # 7	0	16	2	0
Ítem # 8	0	18	0	0

Rúbrica de evaluación para la sesión de trabajo # 1

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	No dice que fracción representa el área sombreada en el modelo de área.	Responde sobre la representación del modelo de manera incorrecta.	Responde de manera correcta la fracción que se representa, pero no puede explicarlo.	Responde correctamente la fracción sombreada y argumenta lo realizado.
Ítem # 2	No da ningún aporte de la fracción que representa el geoplano.	Contesta erróneamente sobre la fracción que representa el geoplano.	Contesta de manera correcta sobre la fracción que se le pide en el modelo, pero no logra argumentar su respuesta.	Responde de manera asertiva sobre la fracción que representa el geoplano y lo argumenta correctamente.
Ítem # 3	El estudiante no logra responder la fracción representada.	Traza las líneas de manera incorrecta.	Realizó el inciso a), b), c) y d) obteniendo errores en algunos de ellos.	Responde todos los incisos correctamente y argumenta su repuestas.
Ítem # 4	No logra realizar ninguna de las actividades del hexágono.	Contesta de manera incorrecta el inciso a).	Contesta correctamente los incisos a) pero tiene errores en el inciso b), c) o en ambos.	Contesta correctamente todos los incisos y argumenta su respuesta.

Ítem # 5	No responde ninguno de los incisos presentados en la figura.	Responde de manera incorrecta la interpretación de la fracción impropia propuesta en el inciso a).	Realiza correctamente la conversión del registro pictórico al numérico, pero no argumenta su respuesta aportando datos relevantes.	El estudiante identifica la fracción impropia y argumenta su respuesta aportando datos relevantes.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo # 1

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	0	1	5
Ítem # 2	0	1	0	5
Ítem # 3	0	0	5	1
Ítem # 4	0	0	4	2
Ítem # 5	0	4	0	2

Rúbrica de evaluación para la sesión de trabajo # 2

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado

Ítem # 1	No representa ninguna de las fracciones propuestas en un modelo de área.	Representa de manera incorrecta una o ambas fracciones en un modelo de área.	Logra representar ambas fracciones, pero no realiza la comparación.	Representa correctamente ambas fracciones en un modelo de área y realiza la correcta comparación de la igualdad.
Ítem # 2	No representa ningún dato al problema plateado.	Realiza la representación incorrecta de una o ambas fracciones.	Representa correctamente ambas fracciones, pero no logra decir que fracción es mayor o menor.	Representa de manera acertada y logra decir que fracción es mayor con argumento.
Ítem # 3	No realiza un dibujo del patio.	Realiza un dibujo del patio, pero representa de manera errónea las fracciones.	Representa todas las fracciones, pero no logra argumentar cuanto repollo hay en el patio.	Representa todas las fracciones y logra argumentar cuanto repollo hay en el patio.
Ítem # 4	No realiza ningún tipo de representación del problema planteado.	Representa la fracción en un modelo de área de manera incorrecta.	Representa la cantidad proporcionada pero no logra argumentar cuanto ha gastado.	Representa y argumenta correctamente las fracciones y logra explicar cuanto ha gastado.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo # 2

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado

Ítem # 1	0	0	3	3
Ítem # 2	0	3	1	2
Ítem # 3	0	5	0	1
Ítem # 4	0	2	0	4

Rúbrica de evaluación para sesión de trabajo # 3

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	No convierte del lenguaje pictórico al numérico del modelo de longitud propuesto.	Realiza una conversión, errónea del modelo propuesto.	Realiza la conversión del modelo de longitud al lenguaje numérico, pero no argumenta su respuesta.	Realiza la correcta conversión y logra argumentar su respuesta.

Ítem # 2	No identifica la fracción que se representada en la regla.	Identifica la fracción que se representa en la regla manera incorrecta.	Identifica la fracción que se representa en la regla, pero no logra dar un argumento de su respuesta.	Identifica con precisión la fracción señalada en la regla y argumenta su respuesta dando un aporte significativo.
Ítem # 3	No presenta aportes de la fracción impropia en el modelo de longitud.	Interpreta de manera incorrecta la fracción impropia en el modelo de longitud.	Interpreta correctamente la fracción impropia, pero no sabe argumentar su respuesta.	Interpreta y argumenta su respuesta aportando datos bastante significativos sobre la fracción impropia.
Ítem # 4	No identifica la fracción impropia desde una recta numérica.	Identifica la fracción impropia de manera incorrecta al interpretar la recta numérica.	Identifica la fracción impropia desde la recta numérica pero no argumenta su repuesta.	Identifica la fracción impropia correctamente y argumenta su respuesta con datos muy relevantes.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo #3

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	1	4	1
Ítem # 2	0	6	0	0
Ítem # 3	0	3	0	3

Ítem # 4	0	6	0	0

Rúbrica de evaluación para la sesión de trabajo # 4

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	No realiza la conversión del lenguaje numérico al lenguaje gráfico.	El estudiante realiza la conversión, pero obtiene una representación errónea.	El estudiante realiza la correcta conversión, pero no da un argumento de su repuesta.	El estudiante logra realizar la correcta conversión y aporta datos relevantes con su argumento.
Ítem # 2	El estudiante no representa las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ en el modelo de longitud.	Representa las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ pero obtiene una o ambas conversiones incorrectas.	El estudiante representa de manera correcta las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ pero no argumenta.	Representa de manera correcta ambas fracciones y realiza una argumentación que aporta datos relevantes.
Ítem # 3	No representa la fracción impropia $\frac{4}{3}$ en un modelo de longitud.	Representa la fracción impropia en un modelo de longitud de manera errónea.	Logra representar la fracción impropia $\frac{4}{3}$ en el modelo de longitud, pero no construye una fracción equivalente.	Representa correctamente la fracción impropia y construye otra fracción que es equivalente a la primera argumentando su respuesta.

Ítem # 4	No representa en un modelo de longitud la cantidad que José ha gastado.	Representa en un modelo de longitud una cantidad errónea.	El estudiante representa la cantidad correctamente en un modelo de longitud, pero no argumenta.	Representa correctamente la cantidad que José tiene ahora y argumenta su respuesta.
Ítem # 5	No representa en el modelo de longitud el subconstructo razón del concepto de fracción.	Representa en el modelo de longitud el subconstructo razón del concepto de fracción, pero obtiene errores.	Realizar la correcta representación en el modelo de longitud, pero no argumenta su respuesta.	Representa correctamente la fracción como razón y argumenta su respuesta.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo # 4

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	5	0	1
Ítem # 2	0	3	3	0
Ítem # 3	0	3	3	0
Ítem # 4	0	2	0	4

Ítem # 5	0	3	0	3

Rúbrica de evaluación para la sesión de trabajo # 5

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	No dice cuanto representan las figuras sombreadas en el modelo de conjunto.	Realiza una incorrecta conversión del modelo de conjunto al lenguaje numérico.	Realiza la correcta conversión del modelo de conjunto al lenguaje numérico, pero no argumenta.	Convierte del lenguaje pictórico al numérico de manera correcta y justifica su repuesta.
Ítem # 2	No dice que relación numérica hay entre las bolas negras y azules.	El estudiante establece una relación incorrecta de las bolas negras y azules.	Establece una correcta relación de las bolas negras y azules, pero su argumento tiene errores.	Realiza una correcta relación y da un buen argumento de su respuesta.
Ítem # 3	No dice que fracción representan las bolas amarillas de las azules en el conjunto.	Dice que fracción representan las bolas amarillas de las azules de manera incorrecta.	Realiza la correcta conversión, pero no dibuja un nuevo conjunto equivalente al primero.	Realiza la correcta conversión y logra construir un conjunto equivalente al primero.

Ítem # 4	El estudiante no logra hacer la conversión del lenguaje pictórico al numérico en el modelo de conjunto.	Realiza una conversión errónea del lenguaje pictórico al numérico.	El estudiante puede hacer la conversión de un registro a otro, pero reordenó el conjunto de manera errónea o no argumenta su respuesta.	Realiza la correcta conversión de un registro a otro y reordena el conjunto explicando la relación que existe entre ambos.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo # 5

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	0	0	6
Ítem # 2	0	4	2	0
Ítem # 3	0	5	1	0
Ítem # 4	0	1	5	0

Rúbrica de evaluación para la sesión de trabajo # 6

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado

Ítem # 1	No realiza una representación en un modelo de conjunto de las razones planteadas.	El estudiante realiza una comparación errónea haciendo uso del modelo de conjunto.	Realiza una correcta representación de ambas razones, pero tiene errores en su argumento.	Representa correctamente las dos fracciones como razón y así su argumento.
Ítem # 2	No representa las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ en un modelo de conjunto.	Representa las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ de manera incorrecta en un modelo de conjunto	Representa las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ correctamente en un modelo de conjunto, pero no argumenta su respuesta.	Representa las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ correctamente en un modelo de conjunto y argumenta su respuesta.
Ítem # 3	No representa la fracción impropia $\frac{5}{4}$ en el modelo de conjunto.	Representa la fracción impropia $\frac{5}{4}$ en el modelo de conjunto de manera incorrecta.	Representa la fracción impropia $\frac{5}{4}$ en el modelo de conjunto correctamente pero no argumenta su respuesta.	El estudiante representa la fracción impropia $\frac{5}{4}$ en el modelo de conjunto correctamente y argumentan su respuesta.
Ítem # 4	El estudiante no grafica la fracción $\frac{3}{2}$ en el modelo de conjunto proporcionado.	El estudiante grafica la fracción $\frac{3}{2}$ en el modelo de conjunto de manera incorrecta.	Grafica la fracción $\frac{3}{2}$ en el modelo de conjunto de manera correcta pero no argumenta su respuesta.	Grafica la fracción $\frac{3}{2}$ en el modelo de conjunto de manera correcta y argumenta su respuesta.

Resultados obtenidos en la sesión de trabajo # 6

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	5	1	0
Ítem # 2	0	2	2	2
Ítem # 3	0	1	0	5
Ítem # 4	0	6	0	0

Rúbrica de evaluación para la prueba final

Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	No realiza ningún tipo de representación de la fracción $\frac{2}{5}$ en el modelo de área.	Representa de manera incorrecta la fracción $\frac{2}{5}$ en el modelo de área.	Representa de manera correcta la fracción $\frac{2}{5}$ en el modelo de área, pero no dice su argumento.	Representa correctamente la fracción $\frac{2}{5}$ en el modelo de área, argumenta su respuesta.

Ítem # 2	El estudiante no realiza la representación en el modelo de conjunto de la fracción $\frac{2}{3}$.	Realiza la representación en el modelo de conjunto de la fracción $\frac{2}{3}$ de manera incorrecta.	Realiza la representación en el modelo de conjunto de la fracción $\frac{2}{3}$ de manera correcta pero no argumenta su respuesta.	El estudiante realiza la representació n en el modelo de conjunto de la fracción $\frac{2}{3}$ de manera correcta y argumenta su respuesta.
Ítem # 3	No representa la fracción $\frac{4}{5}$ en el modelo de longitud presentado.	Representa la fracción $\frac{4}{5}$ en el modelo de longitud de manera incorrecta.	Representa la fracción $\frac{4}{5}$ en el modelo de longitud correctamente, pero no logra argumentar su respuesta.	Representa la fracción $\frac{4}{5}$ en el modelo de longitud de manera correcta y argumenta su respuesta.
Ítem # 4	No logra representar el subconstructo parte-todo de la fracción en un modelo.	Representa el subconstructo parte-todo de la fracción en un modelo de manera incorrecta.	Representa el subconstructo parte-todo de la fracción en un modelo correctamente, pero sin argumentar su respuesta.	Representa el subconstruct o parte-todo de la fracción en un modelo de manera correcta y argumenta su respuesta.

Ítem # 5	No representa el subconstructo medida de la en un modelo visual.	El estudiante representa el subconstructo medida de la fracción de manera errónea en un modelo visual.	Representa el subconstructo medida de la fracción correctamente en un modelo visual, pero no argumenta su respuesta.	El estudiante representa el significado medida de la fracción de manera correcta en un modelo visual y argumenta su respuesta.
Ítem # 6	No realiza la conversión del significado operador de la fracción en un modelo visual.	Realiza la conversión del significado operador de la fracción de manera errónea.	Realiza la conversión del significado operador de la fracción correctamente, pero no argumenta su respuesta.	Realiza la conversión del significado operador de la fracción de manera correcta y argumenta su respuesta.
Ítem # 7	El estudiante no hace una conversión del subconstructo cociente de la fracción.	El estudiante hace una conversión del subconstructo cociente de la fracción de manera incorrecta.	El estudiante hace una conversión del subconstructo cociente de la fracción de manera correcta sin argumentar su respuesta.	Realiza una conversión del subconstructo cociente de la fracción de manera correcta y argumenta su respuesta.

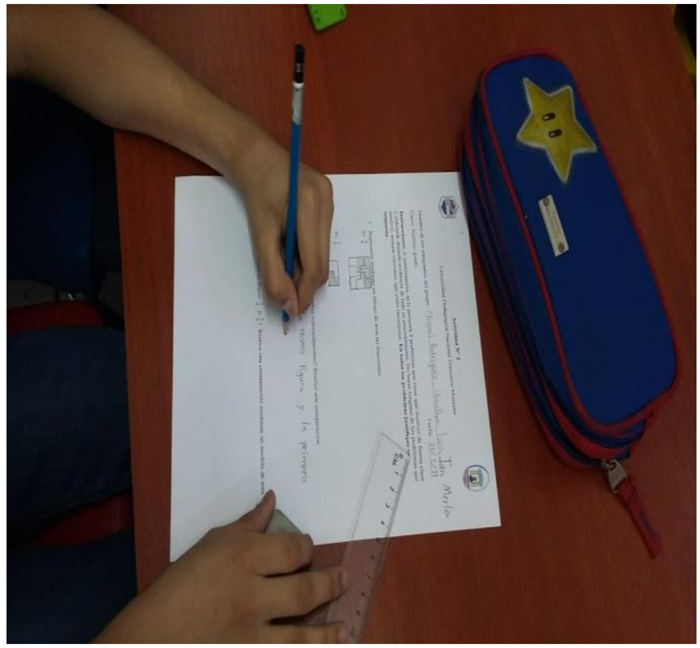
Ítem # 8	No representa el significado razón de la fracción en un modelo visual.	Representa el significado razón de la fracción de manera incorrecta.	El estudiante representa el significado razón de la fracción en un modelo visual sin argumentar su respuesta.	El estudiante representa el significado razón de la fracción en un modelo visual y argumenta su respuesta.

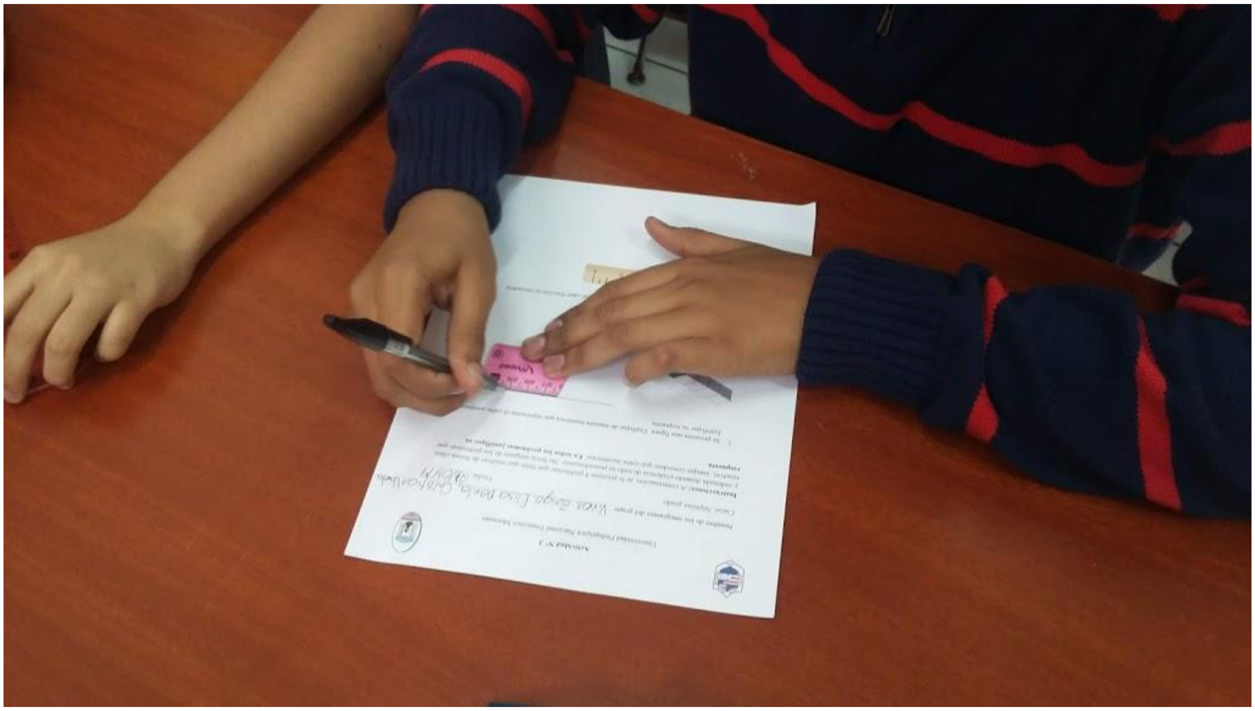
Resultados obtenidos en la prueba final

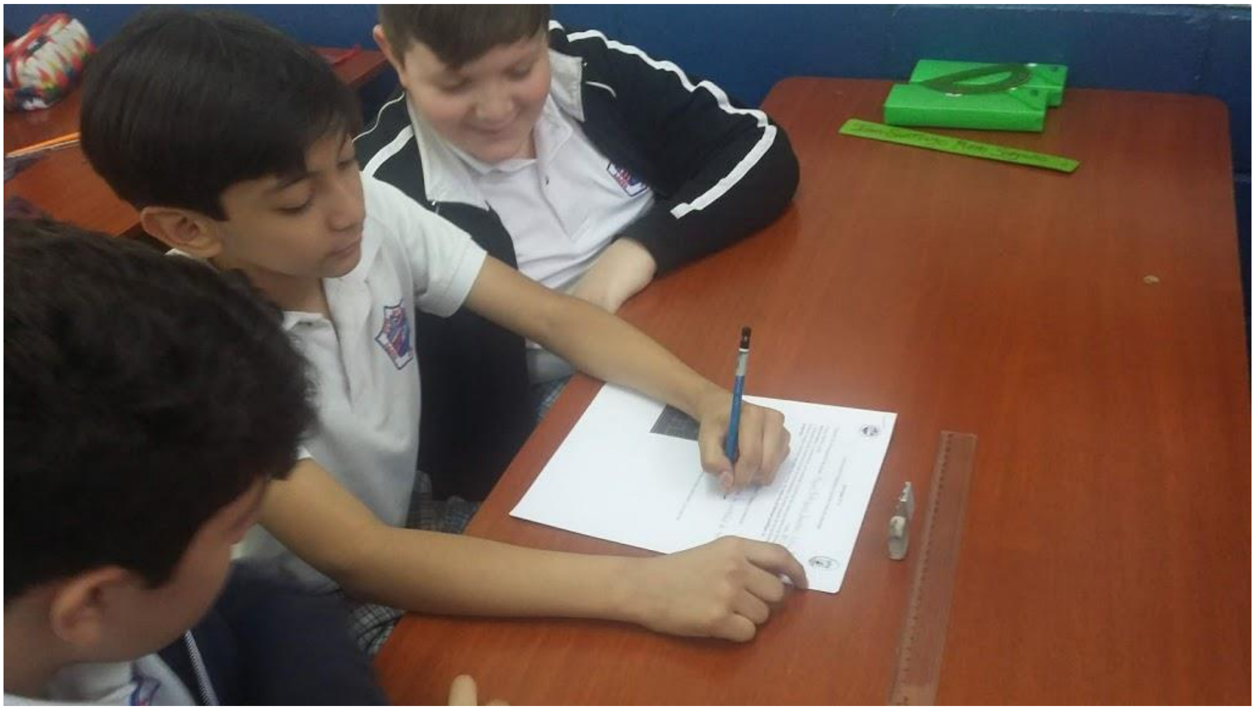
Ítems	No respondió	Inadecuado	Parcialmente adecuado	Adecuado
Ítem # 1	0	15	0	3
Ítem # 2	0	4	5	9
Ítem # 3	0	6	2	10

Ítem # 4	0	3	5	10
Ítem # 5	1	10	2	5
Ítem # 6	3	6	3	6
Ítem # 7	0	14	1	3
Ítem # 8	0	4	3	11

Anexo 10: Fotografías







Anexo 11: Constancias de validación

Zulia. Venezuela, Febrero 11 de 2019

Constancia de validación

Yo, Yaneth Ríos García portadora de la cédula de identidad V-6928321, Doctora en Ciencias Humanas ejerciendo actualmente en la Universidad del Zulia. Venezuela con 30 años de experiencia.

Hago constar que he revisado y hecho los comentarios pertinentes de los instrumentos con fines de validaciones por medio de experto en el área de las fracciones, de las tesis de maestría titulada "Análisis comparativo del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del tercer ciclo" presentada por José Antonio Elvir Ramírez, maestrante del programa de maestría de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.

Instrumentos validados:

- Instrumento prueba diagnóstica (8 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 1 (5 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 2 (4 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 3 (4 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 4 (4 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 5 (4 preguntas)
- Instrumento secuencia didáctica # 6 (4 preguntas)
- Instrumento prueba final (8 preguntas)

Cordialmente,

Yaneth Ríos García, Ph.D.
Doctora en Ciencias Humanas
yanriosgarcia@gmail.com

Tegucigalpa, M.D.C., Honduras, septiembre 4 de 2019

Yo, José Ramón Flores Triminio con el grado académico de Magíster en Ciencias Naturales otorgado por la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, ejerciendo actualmente como Profesor y miembro del equipo de redacción del Instituto Hondureño de Educación por Radio (IHER); Profesor del Instituto Gustavo Adolfo Alvarado.

Hago constar por medio de la presente, que he revisado y validado cada uno de los instrumentos presentados con fines de validación por juicio de experto del trabajo de investigación titulado "Análisis de la comprensión del concepto de fracción, mediante la interpretación de modelos visuales en estudiantes del Tercer Ciclo" presentado por José Antonio Elvir Ramírez, estudiante de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

A continuación, se representan los instrumentos validados y los criterios que reúne cada uno.

Instrumento	Criterios		
	Deficiente	Bueno	Excelente
Prueba diagnóstica		X	
Secuencia de aprendizaje 1			X
Secuencia de aprendizaje 2			X
Secuencia de aprendizaje 3			X
Secuencia de aprendizaje 4			X
Secuencia de aprendizaje 5			X
Secuencia de aprendizaje 6			X
Prueba final			X

Cordialmente,

RFlores

José Ramón Flores
Magíster en Ciencias Naturales
joseramonflorestriminio@gmail.com
+5043395-1163

Anexo 12: Observaciones de la validación de los instrumentos

Prueba Diagnóstica

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

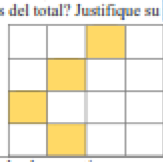
Objetivo general: Analizar los conocimientos previos sobre el concepto de fracción a través de diferentes problemas adaptados al contexto del estudiante.

Descripción general: La prueba diagnóstica consiste de 8 ítems que están enfocados en la exploración del concepto de fracción, que los estudiantes de séptimo grado tienen. El ítem 1) explora el conocimiento previo de los estudiantes. Los ítems 2) y 3) están enfocados en la interpretación parte- todo de la fracción y la congruencia que tiene que existir entre sus partes divididas. En el ítem 4) el estudiante pasa del lenguaje numérico al figural. El ítem 5) se enfoca en la interpretación parte-todo con cierta dificultad en identificar el numerador. Los ítems 6) y 7) son problemas del contexto del estudiante, que necesitan pasar de un registro de lenguaje verbal al figural y el ítem 8) requiere que se represente del lenguaje numérico al gráfico.

Commented [a1]: En las preguntas observe que utilizas diferentes interpretaciones de las fracciones. Debes cerciorarte que estas se trabajan previamente en la escuela o que aparezcan en el programa de sexto grado. Te indico con un comentario cuales son las respectivas interpretaciones.
Observo además que no utilizas las fracciones impropias

Instrumento (Prueba Diagnóstica)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Sí	No	
1. ¿Qué entiende por fracción? Explique con sus palabras y realice un ejemplo a través de una figura.	X		Establecer la definición de un concepto es una actividad cognitiva de alto nivel. Quizás es mejor que preguntes para que se utiliza la fracción
2. Clasifique los enteros que están correcta e incorrectamente divididos en cuartos. Explique cada una de las respuestas. 	x		Cambiar la redacción a: clasifica las siguientes figuras según estén …..

Commented [a2]: Cambiar la redacción a:

3. Si usted ha limpiado $\frac{3}{5}$ del patio de su casa. Represente en el rectángulo como luciría esa fracción del patio. Describa con sus palabras porque lo realizo de esa manera.	x		
4. Como representaría la fracción $\frac{1}{3}$ de manera gráfica. Explique porque hizo esa representación.	x		Quizás sea conveniente trabajar con una fracción cuyo numerador sea diferente de uno
5. ¿Qué fracción representan los cuadrados coloreados del total? Justifique su respuesta. 	x		
6. Si hay 7 baleadas y se tienen que repartir equitativamente entre 4 niños. ¿Cuánto le tocara a cada niño? Haga uso de una representación gráfica. Describa su razonamiento.	x		
7. En la panadería Tabora se hornean 240 pasteles al día, de los cuales $\frac{3}{10}$ son de chocolate. ¿cuántos pasteles de chocolate se hornean al día? ¿porque esa cantidad? Realice un dibujo de la situación.	x		
8. Marque con un punto que represente la fracción $\frac{4}{5}$ en la recta numérica. Justifique su respuesta. 	x		

Commented [a3]: Parte todo

Commented [a4]: Parte todo

Commented [a5]: reparto

Commented [a6]: operador

Commented [a7]: medida

Sesión de trabajo # 1

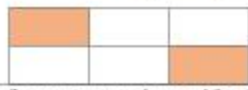
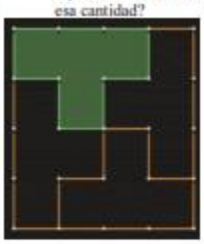
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

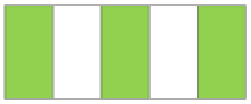
Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

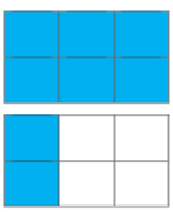
Objetivo general: Expresar una fracción del lenguaje figural al numérico implementando el modelo de área

Commented [a1]: Además se trabaja la noción de fracción equivalente. Debe aparecer en el objetivo

Descripción general: La secuencia de aprendizaje consiste de 5 ítems que están enfocados en la comprensión del concepto de fracción aplicando diferentes modelos visuales de área. El estudiante pasara del registro figural al numérico.

Instrumento (Sesión de trabajo # 1)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
1. Que fracción representa el área sombreada del total. Explique su respuesta. 	X		
2. Se presenta un geoplano ¿qué fracción representa el área sombreada? ¿por qué esa cantidad? 	X		

3. En la figura identifique lo siguiente:  a) Fracción sombreada: _______________ b) En la misma figura, trace líneas para tener 15 partes iguales. c) ¿Cuál es la fracción sombreada ahora? Explique. d) ¿Qué observa entre la primera fracción y la segunda?	X		
4. Se presenta un hexágono. Pinte las siguientes regiones.  a) Dos regiones. ¿Qué fracción representa? b) Ahora, trace líneas que divida la figura en 12 partes iguales y luego coloree un triángulo más ¿Qué fracción representa el área pintada? c) ¿Qué puede decir de las dos fracciones? ¿qué fracción es mayor?	X		

5. Siendo la unidad las dos figuras. Conteste.  a) ¿Qué fracción representa el área sombreada del total? b) ¿Por qué esa cantidad?	X		Cambiar la redacción de la parte b por….explica tu respuesta

Sesión de trabajo # 2

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Representar una fracción de un registro numérico a un registro figural a través del modelo visual de área.

Commented [a1]: Nuevamente se trabaja la noción de fracción equivalente y orden. Debe aparecer explícito en el objetivo

Descripción general: Esta secuencia de aprendizaje contiene 4 ítems que están orientados a la comprensión del concepto de fracción por medio de la implementación del modelo visual de área. Los ítems están orientados a realizar una conversión del lenguaje numérico al figural.

Instrumento (Sesión de trabajo # 2)	Acuerdo Sí	Acuerdo No	Propuesta de mejora
1. Represente mediante un dibujo de área las fracciones. a) $\frac{4}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) ¿Qué observa entre ambas representaciones? Realice una comparación.	X		El término de área quizás los confunda, a menos que en clase se recalque el uso del término
2. ¿Qué fracción es mayor $\frac{7}{8}$ ó $\frac{7}{9}$?. Realice una comparación mediante un modelo de área.	X		
3. El patio de la casa de Fernando es de forma rectangular, en el cual tiene sembrado $\frac{1}{8}$ de zanahorias, $\frac{2}{4}$ de tomates y el resto es repollo. Realice un bosquejo de esta representación. Utilice un modelo de área. ¿cuánto hay de repollo?	X		La palabra bosquejo quizás no sea conocida. Lo mismo con la palabra modelo
4. La mesada de Vivian es de 500 lempiras. Si ha gastado $\frac{1}{4}$ de esa cantidad en la cafetería. Represente esa cantidad en un modelo de área.	X		Cuidado con el uso de a palabra modelo

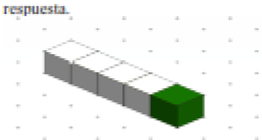
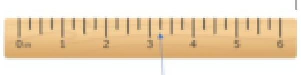
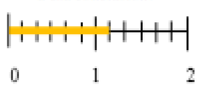
Sesión de trabajo # 3

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Representar una fracción de un registro de visual de longitud al lenguaje numérico.

Descripción general: Se presentan 4 ítems que están relacionados con el modelo de longitud. El estudiante tiene que pasar del lenguaje figural al lenguaje numérico.

Instrumento (Sesión de trabajo # 3)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
1. Se presenta una figura. Explique de manera numérica que representa el cubo sombreado. Justifique su respuesta. 	X		
2. Se le presenta una regla que está en pulgadas. Explique que fracción se encuentra señalada por la flecha. 	X		
3. Las siguientes figuras representan un entero. Explique de forma numérica la fracción que representan. 	X		
4. Observe el segmento en la recta numérica. Escriba la fracción de forma numérica que representa. ¿Como llego a esa conclusión? 	X		

Commented [a1]: Pregunta acento

Commented [a2]: Pregunta acento

Sesión de trabajo # 4

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Representar una fracción del lenguaje numérico al lenguaje figural mediante la aplicación del modelo de longitud.

Descripción general:

Esta secuencia de aprendizaje presenta 4 ítems que están orientados a la conversión del objeto matemático fracción mediante la interpretación del modelo visual de longitud. El estudiante tendrá que realizar una conversión de un lenguaje numérico al figural, así mismo realizar ejercicios que involucren la comparación de dos fracciones.

Instrumento (Sesión de trabajo # 4)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
1. Represente en la recta numérica la fracción $\frac{4}{5}$.Justifique su respuesta. 0 1 2 3 4 5 6	X		
2. Represente las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ en un modelo de longitud. ¿Que observa en su dibujo? ¿Qué fracción es mayor? ¿Por qué	X		Cuidado con la palabra modelo
3. Represente la fracción $\frac{4}{3}$ en un modelo de longitud. Escriba otra fracción que sean equivalente a $\frac{4}{3}$ en otro modelo de longitud. ¿Que observa?	X		Cuidado con la palabra modelo
4. Emiri da a su hijo José 300 lempiras semanales para que ella compre en la cafetería de la escuela. Hasta el momento ha gastado $\frac{1}{3}$ de esa cantidad. Represente en un modelo lineal la cantidad que José tiene ahora.	X		

Sesión de trabajo # 5

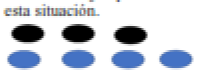
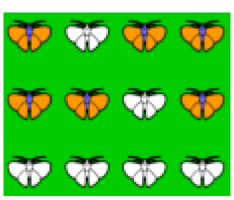
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Convertir una fracción del lenguaje figural al lenguaje numérico mediante la implementación del modelo visual de conjunto.

Descripción general: Esta secuencia didáctica de aprendizaje contiene 4 ítems que están relacionados con el modelo de longitud. Los estudiantes tienen que interpretar las fracciones presentadas y realizar una conversión del lenguaje figural al numérico.

Commented [a1]: Este modelo no es el usado. En este caso estas usando unidades discretas. Los ítems corresponden a tu objetivo general, mas no al modelo de longitud

Instrumento (Sesión de trabajo # 5)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
1. ¿Qué fracción representan las figuras sombradas en el conjunto? 	X		
2. Cuál es la relación entre las bolas negras y azules. Justifique su respuesta. Redacte un ejemplo de la vida real de esta situación. 	X		Explicitar" relación numérica"
3. ¿Qué fracción representan las bolas amarillas de las azules en el conjunto? Ordene el conjunto y forme uno que sea equivalente al primero. 	xx		No entiendo que significa en este caso ordenar, creo que te refieres a agrupar o cambiar de lugar. La noción de equivalencia en el modelo discreto puede confundir
4. ¿Qué fracción representan las mariposas blancas en el conjunto? Ordene el conjunto de otra manera. ¿Qué fracción representa el conjunto que usted ordeno? ¿Qué relación existe entre el primer conjunto y el segundo? Explique. 	x		La misma observación con la palabra ordenar

Sesión de trabajo # 6

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Convertir una fracción del lenguaje numérico al figural mediante la implementación del modelo de conjunto.

Descripción general: La presente secuencia de aprendizaje contiene 4 ítems que están orientados a la conversión e interpretación del concepto de fracción mediante la implementación del modelo de conjunto.

Instrumento (Sesión de trabajo # 6)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
1. ¿Cuál será mejor en un juego, un gane de 5:6 o uno de 2:3? Realice un modelo de conjunto de ambas situaciones. Explique su razonamiento.	X		Hacer en clase hincapié en la expresión modelo de conjunto (que los autores llaman modelo discrte)
2. Compare las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$. Utilice un modelo de conjunto. ¿Que observa?	X		
3. Representa la fracción $\frac{5}{4}$ en un modelo de conjunto. ¿porque lo hizo así?	X		Esta pregunta tiene un alto nivel cognitivo, por ser una fracción impropia
4. Grafique la fracción $\frac{3}{2}$ si la unidad es:  ¿Porque lo hizo de esa manera?	X		Lo mismo

En general en las 6 secuencias se trabaja más con la fracción propia que impropia

Prueba Final

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Nombre del experto: Yaneth Ríos García
Grado académico: Doctora en Ciencias Humanas. Universidad del Zulia. Venezuela
Años de servicio: 30 años

Objetivo general: Analizar el concepto de fracción que adquieren los estudiantes al implementar diversos modelos visuales y las diferentes interpretaciones de las fracciones.

Descripción general: La prueba final consiste en dos partes, la primera consiste en representar las fracciones dadas en cada uno de los modelos visuales de área, longitud y conjunto. La segunda en representar las fracciones del lenguaje numérico al figural, considerando las diferentes interpretaciones de las fracciones para comprender su concepto.

Instrumento (Prueba final)	Acuerdo		Propuesta de mejora
	Si	No	
I. Dibuje, sombree y represente la parte fraccionaria de cada figura. 1) $\frac{2}{5}$ de  2) $\frac{2}{3}$ de  3) $\frac{4}{5}$ de 	X		No se usa la fracción impropia
I. Represente las siguientes fracciones empleando un modelo visual (área, longitud ó conjunto. 4) 3 partes de 4 partes iguales.	X		
5) 4 pulgadas y $\frac{1}{4}$.	X		
6). $\frac{1}{3}$ de 600 lempiras	X		
7) 3 paletas repartidas en 5 niños.	X		
8) 3 de cada 5 personas son varones.	X		